

CBMaths.fr  
<https://cbmaths.fr>

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

## LEÇON n° 9

### Trigonométrie. Applications.

Clément BOULONNE

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 17 août 2020

## Préambule

### Niveau de la leçon

De la 3ème à la Terminale S

### Prérequis

Géométrie du triangle, théorème de Pythagore, notion de fonction, produit scalaire

### Références

- E. SUQUET, *Trigonométrie*. Troisième. URL : [http://automaths.com/3/cours/3\\_Trigonometrie\\_C.pdf](http://automaths.com/3/cours/3_Trigonometrie_C.pdf).
- G. COSTANTINI, *Trigonométrie et fonctions circulaires*. Première S. <http://bacamaths.net>.

## Plan de la leçon

<b>1</b>	<b>De la trigonométrie vue en classe de troisième</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>De la trigonométrie vue en classe de Première S</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Un exercice utilisant la trigonométrie</b>	<b>14</b>

# 1 De la trigonométrie vue en classe de troisième

## 1.1 Définitions



### Définition 9.1.

Dans un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$ , on définit le *sinus*, le *cosinus* et la *tangente* de l'angle aigu  $\widehat{ABC}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sin \widehat{ABC} &= \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} \\ \cos \widehat{ABC} &= \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} \\ \tan \widehat{ABC} &= \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.\end{aligned}$$

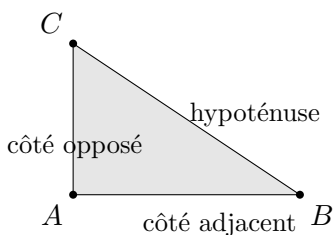


FIGURE 1 – Côté opposé, côté adjacent à un angle, hypoténuse



### Remarque 9.2.

On a aussi avec l'angle  $\widehat{ACB}$  :

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}, \quad \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$





### Propriété 9.3.


Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1 et ils n'ont pas d'unité.



### Remarques 9.4. Sur la calculatrice (Casio FX-92)

1. Lorsque l'on connaît le sinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches :  $\boxed{\text{Shift}}$  -  $\boxed{\sin}$  .
2. Lorsque l'on connaît le cosinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches :  $\boxed{\text{Shift}}$  -  $\boxed{\cos}$  .

3. Lorsque l'on connaît la tangente d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches :  - .

 **Exemples 9.5.** *Connaissant sinus, cosinus et tangente*

1. Si  $\sin \widehat{ABC} = 0,8$  et  $\widehat{ABC}$  est un angle aigu alors  $\widehat{ABC} = 53,13$  degrés à 0,01 près.
2. Si  $\cos \widehat{ABC} = 0,5$  et  $\widehat{ABC}$  est un angle aigu alors  $\widehat{ABC} = 60$  degrés.
3. Si  $\tan \widehat{ABC} = 0,2$  et  $\widehat{ABC}$  est un angle aigu alors  $\widehat{ABC} = 11,30$  degrés à 0,01 près.

## 1.2 Formules de trigonométrie

 **Propriété 9.6.**

Pour toutes valeurs de  $x$ , on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

*Démonstration de la propriété 9.6.*  $\diamond$  On se place dans le cas où  $x$  est une valeur strictement comprise entre 0 et 90 degrés. Prenons un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  tel que  $\widehat{ABC} = x$ . On a alors :

$$\cos x = \frac{AB}{BC}, \quad \sin x = \frac{AC}{BC}, \quad \tan x = \frac{AC}{AB}.$$

Ainsi,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}.$$

On sait que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ . D'après le théorème de Pythagore, on a  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ . D'où :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

De plus :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan x.$$

□

## 1.3 Quelques exemples

 **Exemples 9.7.**

1. Soit  $DEF$  un triangle rectangle en  $D$  tel que  $\widehat{DEF} = 30^\circ$  et  $DF = 5$ . Quelle est la mesure

de  $EF$ ?. Comme  $DEF$  est un triangle rectangle en  $D$  :

$$\begin{aligned}\sin \widehat{DEF} &= \frac{DE}{DF} \\ \sin 30 &= \frac{DE}{5} \\ DE &= 5 \times \sin 30 \\ DE &= 2,5\end{aligned}$$

2.  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  tel que  $AB = 5$  et  $AC = 7$ . On veut déterminer la mesure de l'angle  $\widehat{ABC}$  à 0,01 près. Comme  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .

$$\begin{aligned}\tan \widehat{ABC} &= \frac{AC}{AB} \\ \tan \widehat{ABC} &= \frac{7}{5} \\ \widehat{ABC} &= 50,19 \text{ degrés à } 0,01 \text{ près.}\end{aligned}$$

La dernière étape est faite grâce à la calculatrice (en tapant les touches  $\boxed{\text{Shift}}$  -  $\boxed{\tan}$ ).

## 2 De la trigonométrie vue en classe de Première S

### 2.1 Le radian



**Définition 9.8.** *Radian*

Le *radian* est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat ( $180^\circ$ ) mesure  $\pi$  radians.



**Remarque 9.9.**

Pour trouver la mesure d'un angle de  $x$  degrés, on a recours à un tableau de proportionnalité.

degrés	180	$x$
radians	$\pi$	$\alpha$



**Exemple 9.10.**

Un angle de  $60^\circ$  vaut en radians :

$$\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

### 2.2 Cercle trigonométrique

**Définition 9.11.** *Cercle trigonométrique*

Si on munit le plan d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Le *cercle trigonométrique* est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Soit  $M$  un point du cercle tel que  $\alpha$  soit une mesure (en radians) de l'angle orienté  $(\vec{OI}, \vec{OM})$ .

**Définition 9.12.** *Sinus et cosinus*

On appelle *cosinus* et *sinus* de  $\alpha$  et on note  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$ , les coordonnées du point  $M$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

$$\vec{OM} = (\cos \alpha)\vec{OI} + (\sin \alpha)\vec{OJ}.$$

Soit  $\Delta$  la droite (verticale) d'équation  $x = 1$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $H$  le point défini par  $(OM) \cap \Delta$ . Ce point  $H$  existe dès lors que  $\Delta$  et  $(OM)$  ne sont pas parallèles, c'est-à-dire dès que  $M$  n'est ni en  $J(0, 1)$ , ni en  $J'(0, -1)$ , c'est-à-dire dès que  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Définition 9.13.** *Tangente*

On appelle *tangente* de  $\alpha$  et on note  $\tan \alpha$ , l'ordonnée du point  $H$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

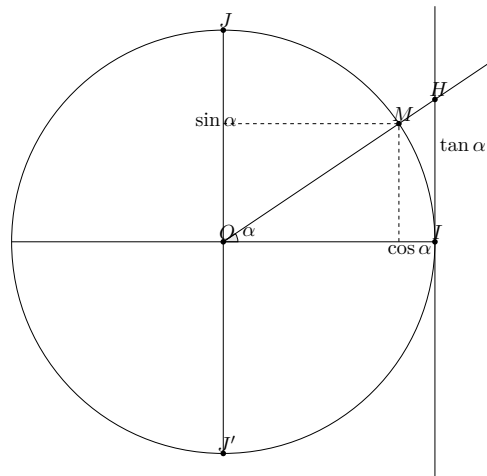


FIGURE 2 – Cercle trigonométrique, cosinus, sinus et tangente d'un angle

La table 1 rappelle les valeurs remarquables du cosinus, du sinus et de la tangente.

*Calcul de valeurs remarquables.*  $\diamond$  Pour calculer les valeurs de  $\sin \frac{\pi}{4}$  et  $\cos \frac{\pi}{4}$ , on exploite la diagonale du carré (de côté 1).

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

TABLE 1 – Valeurs remarquables

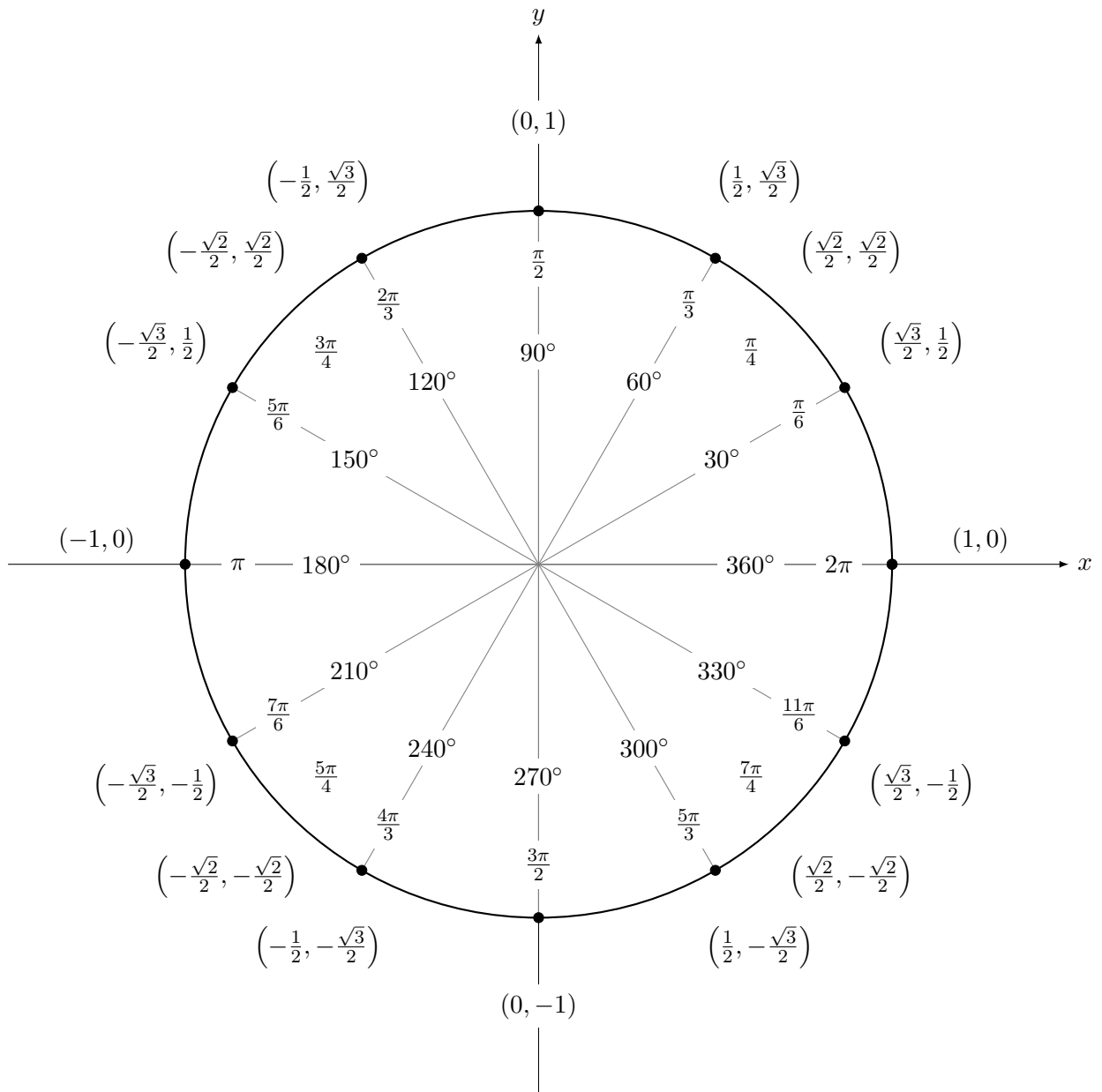
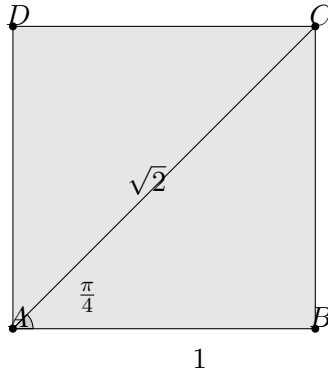


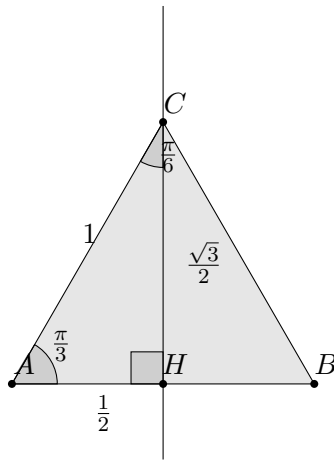
FIGURE 3 – Cercle trigonométrique et quelques valeurs remarquables



Dans le triangle  $ABC$  rectangle en  $B$ , on a :

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{4} &= \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan \frac{\pi}{4} &= \frac{BC}{AB} = 1.\end{aligned}$$

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente de  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{\pi}{6}$ , on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec une de ses hauteurs qui, d'après le théorème de Pythagore, mesure  $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .




Dans le triangle  $AHC$  rectangle en  $H$ , on a :

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{6} &= \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

□



 **Propriété 9.14.** *Sinus et cosinus*

1.  $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
2.  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
3.  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
4.  $-1 \leq \cos x \leq 1$
5.  $-1 \leq \sin x \leq 1$

 **Exemple 9.15.**

On admet que  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ , on veut calculer la valeur exacte de  $\sin \frac{\pi}{12}$ . On utilise la relation 3 :

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1.$$

On calcule  $\cos^2 \frac{\pi}{12}$  :

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

D'où :

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$


Or  $\sqrt{A^2} = |A|$  donc :

$$\left| \sin \frac{\pi}{12} \right| = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}.$$

Or,  $\sin \frac{\pi}{12} \geq 0$  car  $\frac{\pi}{12} \in [0, \pi]$ . Donc :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}.$$

## 2.3 Fonction sinus et cosinus

 **Définition 9.16.** *Fonction périodique*

| Une fonction  $f$  est dite *périodique* de période  $T$  si pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x + T) = f(x)$ .

Pour étudier une fonction périodique, on se limite à une période car :

$$\dots = f(x + 2T) = f(x + T) = f(x) = f(x - T) = f(x - 2T) = \dots$$

 **Theoreme 9.17.**

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ . De plus, la fonction cosinus est paire ( $\cos(-x) = \cos x$ ) et la fonction sinus est impaire ( $\sin(-x) = -\sin x$ ).

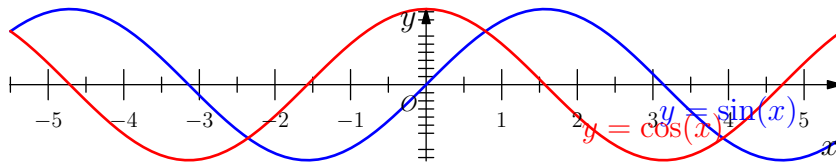


FIGURE 4 – Représentation graphique de  $x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto \cos(x)$

## 2.4 Résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ ( $x \in \mathbb{R}$ )

- Si  $a \notin [-1, 1]$  alors ces équations n'ont pas de solutions (car  $-1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$ )
- Si  $a \in [-1, 1]$ , elles ont une infinité

**Pour**  $\cos x = a$  on résout déjà l'équation sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles  $\alpha$  et  $-\alpha$  dont le cosinus vaut  $a$ . On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de  $2\pi$ .

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Pour**  $\sin x = a$  on résout déjà l'équation sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles  $\alpha$  et  $\pi - \alpha$  dont le sinus vaut  $a$ . On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de  $2\pi$ .

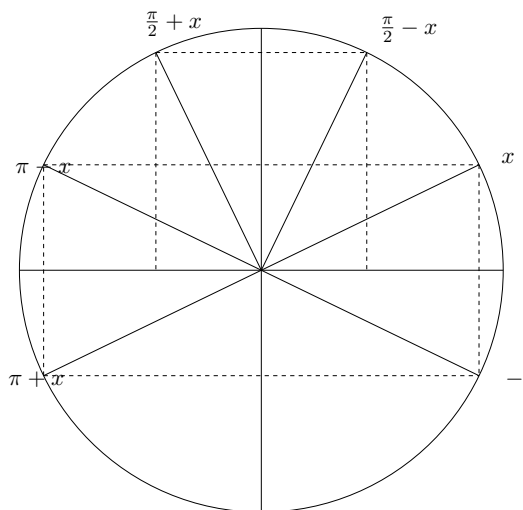
$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## 2.5 Angles associés

### Propriétés 9.18.

On a les propriétés suivantes :

1.  $\cos(-x) = \cos x$ ,
2.  $\sin(-x) = -\sin x$ ,
3.  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ,
4.  $\sin(\pi - x) = \sin x$ ,
5.  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ ,
6.  $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ,
7.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ ,
8.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ ,
9.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ ,
10.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ .



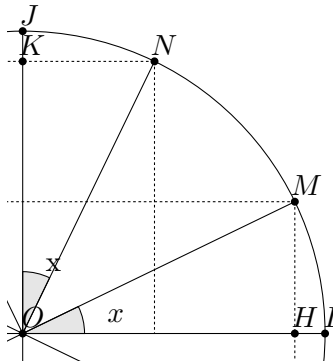
*Démonstration des propriétés 9.18.* Les relations  $\cos(-x) = \cos x$  et  $\sin(-x) = -\sin x$  s'obtiennent immédiatement par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Supposons tout d'abord que  $x$  est un angle aigu (c'est-à-dire  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ). On montre les relations :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

On note  $I, J, M$  et  $N$  les points du cercle trigonométrique correspondants aux angles de  $0, \frac{\pi}{2}, x$  et  $\frac{\pi}{2} - x$  radians respectivement. Notons  $H$  (resp.  $K$ ) le projeté orthogonal de  $M$  (resp.  $N$ ) sur l'axe des abscisses (resp. ordonnées). D'après la relation de Chasles sur les angles :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) &= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) = x \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$



Les coordonnées du point  $M$  sont  $M(\cos x, \sin x)$ , celles du point  $N$  sont :  $N(\cos(\frac{\pi}{2} - x), \sin(\frac{\pi}{2} - x))$ . Comme  $x$  est un angle aigu, toutes ces coordonnées sont positives et :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = KN \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = OK.$$

Mais par ailleurs, d'après les relations métriques dans le triangle  $ONK$  rectangle en  $K$ , on a :

$$\cos x = OK \quad \text{et} \quad \sin x = KN.$$

D'où les relations :  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$  et  $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ . Les autres relations se démontrent de manière analogue.

Par exemple, si  $x$  appartient à  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ , on pose  $y = -x$ . Comme  $y$  est un angle aigu, on a, par exemple, en utilisant ce qui précède :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = -\sin y,$$

c'est-à-dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(-x) = \sin x.$$

De même, si  $x$  appartient à  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ , alors on pose  $y = \pi - x$  et on utilise les formules précédentes.  $\square$

## 2.6 Formules trigonométriques

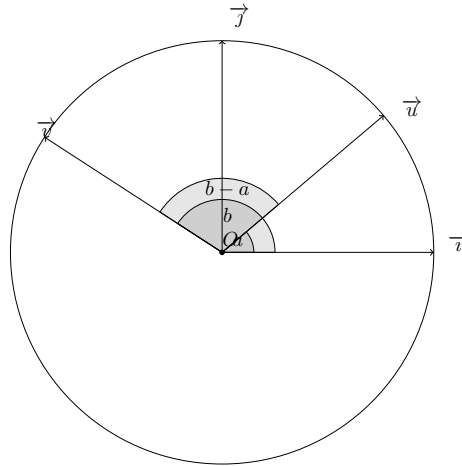
**Proposition 9.19.** *Formules d'addition*

1.  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$
2.  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$
3.  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$
4.  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

*Justification d'une formule de trigonométrie.*  $\diamond$

**Méthode utilisant le produit scalaire** On va étudier la quantité  $\cos(a - b)$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels. Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , considérons deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  unitaires tels que :

$$(\vec{i}, \vec{u}) = a \quad \text{et} \quad (\vec{i}, \vec{v}) = b.$$



Une première expression du produit scalaire donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{v}) = b - a$$

donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(b - a) = \cos(a - b)$  car la fonction cosinus est paire. D'autre part, d'après la définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

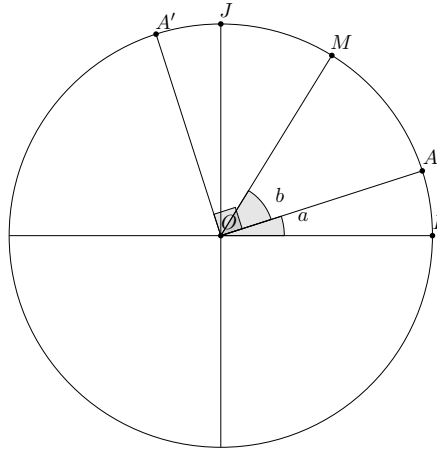
D'après l'expression du produit scalaire avec les coordonnées  $(xx' + yy')$ , on obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ce qui nous donne une formule trigonométrique :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

**Méthode n'utilisant pas le produit scalaire** On étudie cette fois-ci  $\cos(a + b)$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels. On considère le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Sur ce cercle, on place un point  $A$  tel que  $(\vec{OI}, \vec{OA}) = a$ , le point  $M$  tel que  $(\vec{OA}, \vec{OM}) = b$  et le point  $A'$  tel que  $(\vec{OA}, \vec{OA}') = \frac{\pi}{2}$ .



D'après la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a + b \pmod{2\pi}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a + b)\overrightarrow{OI} + \sin(a + b)\overrightarrow{OJ}.$$

Mais en se plaçant dans le repère orthonormé  $(O, A, A')$ , on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

et en exprimant les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OA'}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on a :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

et

$$\overrightarrow{OA'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{OI} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{OJ} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{OI} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{OJ} \\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\overrightarrow{OI} + [\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]\overrightarrow{OJ} \end{aligned}$$

et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, il vient les deux relations :

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a + b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

□


**Proposition 9.20.** *Formules de duplication*

1.  $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a,$
2.  $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$

Démonstration de la proposition 9.20.  $\diamond$

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin(2a) &= \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2 \sin a \cos a\end{aligned}$$

□

 **Proposition 9.21.** Formule de linéarisation

1.  $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ ,
2.  $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$ .

Démonstration de la proposition 9.21.  $\diamond$  On rappelle que  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  quelque soit le réel  $x$ . Donc :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1,$$

d'où  $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ . De même,

$$\cos(2a) = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a,$$

d'où  $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$ . □

 **Exemple 9.22.**

On va calculer les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{8}$ ,  $\sin \frac{\pi}{8}$ ,  $\cos \frac{\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{\pi}{12}$ . En utilisant les formules de linéarisation :

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

et comme  $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ , il vient  $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

et comme  $\sin \frac{\pi}{8} > 0$ , il vient  $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ . D'où :

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

Or :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{4-2} = 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2.$$

D'où :

$$\tan \frac{\pi}{8} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1.$$

En utilisant les formules d'addition :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

D'où

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} = 2 - \sqrt{3}.$$

### 3 Un exercice utilisant la trigonométrie

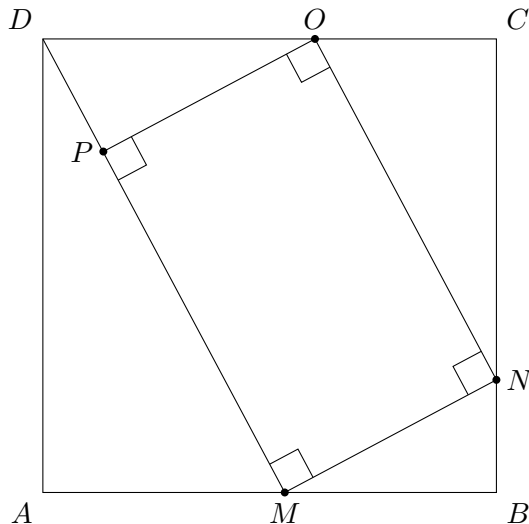
#### Exercice 9.22.

Soit  $ABCD$  un carré de côté 1. On place un point  $M$  sur le côté  $[AB]$  du carré (distinct de  $A$  et  $B$ ) et on trace le segment  $[MD]$ .

Existe-il un carré  $MNOP$  tel que  $N$ ,  $O$  et  $P$  appartiennent respectivement aux segments  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[MD]$ ? Si oui, quelle est l'aire de ce carré?

Solution de l'exercice.  $\diamond$

Figure de l'énoncé



**Calcul de la longueur du segment  $[MD]$**  On note  $AM = x$  et on sait que  $AD = 1$ . On travaille dans le triangle  $MAD$  rectangle en  $A$ , on applique le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} MD^2 &= AM^2 + AD^2 \\ MD^2 &= x^2 + 1^2 \\ MD^2 &= x^2 + 1 \\ MD &= \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

**Calcul de la mesure de l'angle  $\widehat{AMD}$  et  $\widehat{ADM}$**  Toujours dans le triangle  $MAD$  rectangle en  $A$ , on a :

$$\begin{aligned} \tan(\widehat{ADM}) &= \frac{AM}{AD} = \frac{x}{1} = x \Leftrightarrow \widehat{ADM} = \arctan(x) \\ \tan(\widehat{AMD}) &= \frac{AD}{AM} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \widehat{AMD} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On préférera utiliser la mesure de l'angle  $\widehat{ADM}$  pour la suite de l'exercice.

**Calcul de la longueur du segment  $[MN]$**  Si  $AM = x$  alors  $MB = 1 - x$ . De plus, les angles  $\widehat{AMD}$ ,  $\widehat{DMN}$  et  $\widehat{NMB}$  sont adjacents, la somme des mesures des trois angles est égale à  $\pi$  (radians). Donc :

$$\widehat{BMN} = \pi - \widehat{DMN} - \widehat{AMD} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AMD} = \widehat{ADM}.$$

Donc :  $\widehat{BMN} = \arctan(x)$ . Ainsi,

$$\cos(\widehat{BMN}) = \frac{BM}{MN} \Leftrightarrow \cos(\arctan(x)) = \frac{1-x}{MN} \Leftrightarrow MN = \frac{1-x}{\cos(\arctan(x))}.$$

Dans la suite de l'exercice, on notera  $\Phi(x) = \cos(\arctan(x))$  et  $\Phi^2(x) = (\Phi(x))^2$ .



**Calcul de la longueur du segment  $[BN]$**  Dans le triangle  $BMN$  rectangle en  $B$ , on sait que  $BM = 1 - x$  et  $MN = \frac{1-x}{\Phi(x)}$ . On utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur du segment  $[BN]$ .

$$\begin{aligned} MN^2 &= BN^2 + BM^2 \\ BN^2 &= MN^2 - BM^2 \\ BN^2 &= \left(\frac{1-x}{\Phi(x)}\right)^2 - (1-x)^2 = \frac{(1-x)^2 - (1-x)^2\Phi^2(x)}{\Phi^2(x)} = \frac{(1-x)^2}{\Phi^2(x)} (1 - \Phi^2(x)) \\ BN &= \sqrt{\frac{(1-x)^2}{\Phi^2(x)} (1 - \Phi^2(x))} = \frac{(1-x)}{\Phi(x)} \sqrt{1 - \Phi^2(x)} \end{aligned}$$

**Calcul de la longueur du segment  $[CN]$**  Si :

$$BN = \frac{(1-x)}{\Phi(x)} \sqrt{1 - \Phi^2(x)}$$

alors :

$$CN = 1 - BN = 1 - \frac{1-x}{\Phi(x)} \sqrt{1 - \Phi^2(x)} = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1 - \Phi^2(x)}}{\Phi(x)}$$

**Calcul de la longueur du segment  $[ON]$**  Par le même argument sur l'adjacence des angles, on peut dire que  $\widehat{BMN} = \widehat{ONC}$ . On veut calculer la longueur du segment  $[ON]$ , on se place dans le triangle  $NCO$  rectangle en  $C$ . On sait que :

$$\widehat{ONC} = \arctan(x) \quad \text{et} \quad CN = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1 - \Phi^2(x)}}{\Phi(x)}$$

D'où :

$$\cos(\widehat{ONC}) = \frac{CN}{ON} = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1 - \Phi^2(x)}}{\Phi(x)} \times \frac{1}{ON}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} ON &= \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1 - \Phi^2(x)}}{\Phi(x)} \times \frac{1}{\Phi(x)} \\ &= \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1 - \Phi^2(x)}}{\Phi^2(x)} \end{aligned}$$

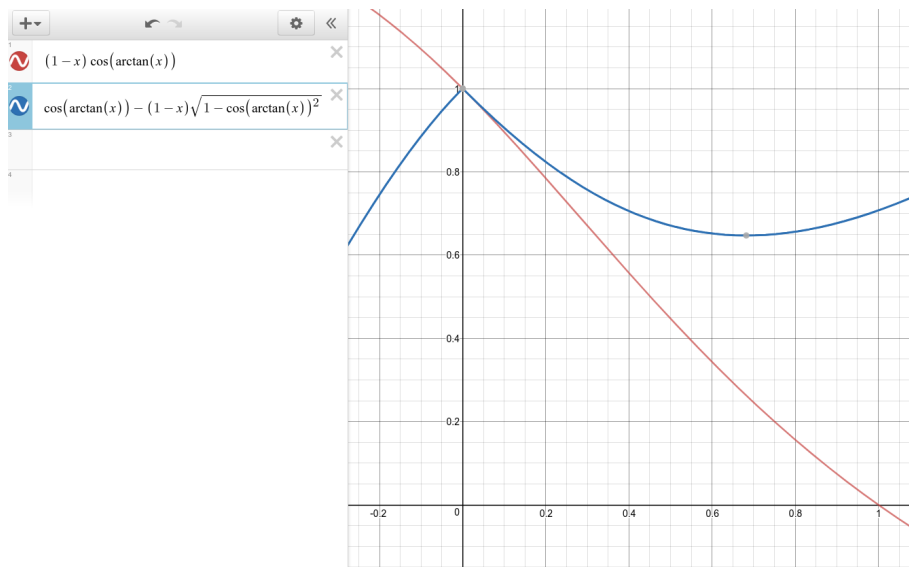
**Résolution de l'équation  $MN = ON$**  Pour répondre au problème posé, il faut résoudre l'équation  $MN = ON$  (c'est-à-dire  $MNOP$  est un carré). Ainsi :

$$\begin{aligned} MN = ON &\Leftrightarrow \frac{1-x}{\Phi(x)} = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1 - \Phi^2(x)}}{\Phi^2(x)} \\ &\Leftrightarrow (1-x)\Phi^2(x) = \Phi(x) \left[ \Phi(x) - (1-x)\sqrt{1 - \Phi^2(x)} \right] \end{aligned}$$

On peut simplifier par  $\Phi(x) = \cos \arctan(x)$  des deux côtés de l'égalité car  $\cos \arctan(x) \neq 0$  pour  $x \in [0; 1]$ . Ainsi :

$$MN = ON \Leftrightarrow (1-x) \cos \arctan(x) = \cos \arctan(x) - (1-x) \sqrt{1 - \cos^2 \arctan(x)}$$

On ne peut pas résoudre cette équation algébriquement. On a recours à la méthode graphique :



**Conclusion** Sur l'intervalle  $[0; 1]$ , il n'y a qu'une seule intersection entre les deux courbes en  $x = 0$ . Or, ce cas ( $x = 0$ ) correspond au cas où  $M = A$ . Comme il est exclu, il n'existe pas de carré  $MNOP$  qui répond à notre problème.

□