CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n$^{\text{o}}$ 13
Transformations du plan. Frises et pavages.

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 18 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Troisième, Seconde, Première et Terminale STD2A

Prérequis

Géométrie vectorielle, barycentres

Références

- UNKNOWN, *Chapitre 10 : Transformations du plan et de l'espace*. Lycée Jean Rostand, Mantes, 1ère S SVT, Année 2007-2008. URL : `http://www.lyc-rostand-mantes.ac-versailles.fr/IMG/pdf/1S_ch10_transfos.pdf/`
- D. FRIN, *Transformations du plan*. Cours Seconde. URL : `http://dominique.frin.free.fr/seconde/cours2_transformations.pdf.`
- M. BOURGOGNE, *Chapitre 01 : construction et transformation de figures*. Collège St Pierre Chanel de Thionville, Quatrième. URL : `http://www.mathmb.com/chapitres4/chapitre01g/tt4geoch1/tt4geoch1.htm`.
- C. BOULONNE, *Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES*. Session 2011. URL : `https://cboumaths.files.wordpress.com/2012/01/leconcapes2011.pdf` .
- X. DELAHAYE, *Homothéties, translation, rotations*. Première S. URL : `http://xmaths.free.fr/`.
- S. DELAUNAY, *M302 : Cours de Géométrie I*, 2009-2010.
- G. BONTEMPS, *Fractales, Maths, 1ère S*. Bordas, Programme 2001.
- A. LIÉTARD, *Isométries planes*. URL : `http://maths1s.chez.com`.
- X. DELAHAYE, *Similitude*. Terminale S Spé. URL : `http://xmaths.free.fr`.
- A. LUCE & O. DECKMYN, *Similitudes planes*. Terminale S. URL : `http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/FichesCours/Similitudes.pdf`.
- A. LIÉTARD, *Similitudes*. Terminale S. URL : `http://maths1s.chez.com/TS/similitudes.pdf`.
- KB, *Homothéties*. URL : `http://labomath.free.fr/faidherbe/permS/vecteur/homothetie.pdf`.
- N. EVEN & al, *Pavages du plan avec des polygones convexes*. URL : `https://perso.univ-rennes1.fr/vincent.guirardel/mej/2014/Dossier_pavage.pdf`.

Plan de la leçon

1 Transformations

1.1 Définition

Définition 13.1.

On appelle *transformation du plan* (ou de l'espace) toute fonction bijective du plan (ou de l'espace), c'est-à-dire que tout point du plan (ou de l'espace) possède *un et un seul* antécédent par cette fonction.

Remarque 13.2.

Une projection sur une droite du plan n'est pas une transformation du plan.

Définition 13.3. *Point fixe*

On dit que M est un *point fixe* (ou invariant) par la transformation f si $f(M) = M$.

Définition 13.4. *Image*

Si F est une figure du plan (un ensemble de points quelconques), on appelle image de F par f et on note $f(F)$ l'ensemble des points de la forme $f(M)$ lorsque M décrit F. Si $f(F) = F$, on dit que F est *globalement invariante* par f.

Définition 13.5. *Transformation identique*

La transformation qui, à tout point M du plan associe le point M lui-même s'appelle la *transformation identique* ou l'*identité* et se note id.

Définition 13.6. *Transformation composée*

La *transformation composée* de f et de g, notée $f \circ g$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point :

$$(f \circ g)(M) = f(g(M)).$$

Définition 13.7. *Transformation réciproque*

La réciproque f^{-1} d'une transformation f est la transformation qui, à tout point N associe son unique antécédent par f.

$$f^{-1}(M) = N \Leftrightarrow M = f(N).$$

f^{-1} est une transformation et $(f^{-1})^{-1} = f$,

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\,.$$

Theoreme 13.8.
Si f et g sont deux transformations, $f \circ g$ est une transformation et :

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

1.2 Isométries

Définition 13.9. *Isométrie*

Une isométrie du plan est une transformation du plan qui conserve les distances. Précisément, pour tous points A et B d'images respectives A' et B' : $A'B' = AB$.

Theoreme 13.10.
Si f est une isométrie du plan :
- l'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$;
- l'image d'une droite (AB) est la droite $(f(A)f(B))$;
- l'image du cercle de centre Ω et de raon R est le cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon R ;
- f conserve le parallélisme ;
- f conserve l'orthogonalité ;
- f conserve les milieux ;
- f conserve les barycentres ;
- f conserve les angles géométriques.

Définition 13.11. *Déplacements et antidéplacements*

- Une isométrie qui conserve l'orientation des angles est un *déplacement*.
- Une isométrie qui inverse l'orientation des angles est un antidéplacment.

Theoreme 13.12.
- La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement (peu importe l'ordre) est un antidéplacement.

2 Symétries

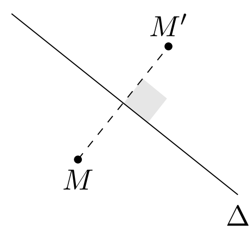
2.1 Symétrie axiale

Définition 13.13.

Soit Δ une droite du plan. On appelle *réflexion* (ou *symétrie* d'axe Δ la transformation notée s_Δ définie par :

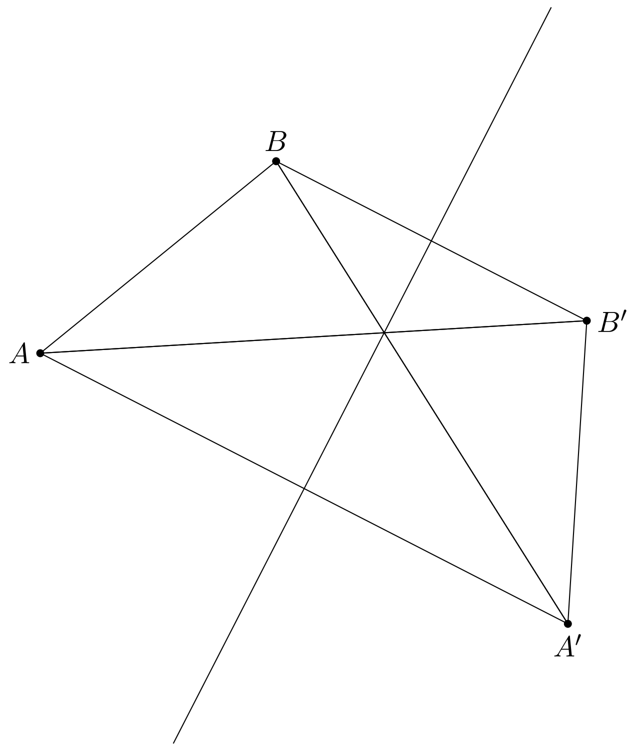
$$M' = s_\Delta(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' = M \text{ si } M \in \Delta \\ \text{ ou} \\ \Delta \text{ est la médiatrice de } [MM'] \end{cases}$$

Exemple 13.14.



Propriétés 13.15.

- Les points de la droite Δ, axe de la symétrie, sont les points invariants de s_Δ.
- Si $s_\Delta(M) = M'$ alors $s_\Delta(M') = M$.
- Si $s_\Delta(A) = A'$ et $s_\Delta(B) = B'$ alors les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en un point de la droite Δ. De plus, les droites (AA') et (BB') sont parallèles et $A'B' = AB$, c'est-à-dire que $ABB'A'$ est un trapèze isocèle. Ce qui signifie que la réflexion conserve les distances.
- L'image d'une droite (d) est une droite (d') ; si (d) est parallèle à Δ, alors (d') leur est parallèle ; si (d) est perpendiculaire à Δ, alors $(d') = (d)$.
- L'image d'un cercle est un cercle de même rayon ; si les deux cercles se coupent, alors les points d'intersection sont sur l'axe Δ.
- L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la réflexion conserve le parallélisme et l'orthogonalité.



Propriétés 13.16. *Propriétés communes de conservation*

Alignement L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre. L'image d'une droite est une droite.

Distances L'image d'un segment est un segment de même longueur. L'image d'un cercle C est un cercle C' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle C, alors son image (d') est tangente à C'.

Parallélisme Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Orthogonalité Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

Centre de gravité L'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

Aires L'image d'un triangle est un triangle de même aire.

Angles L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

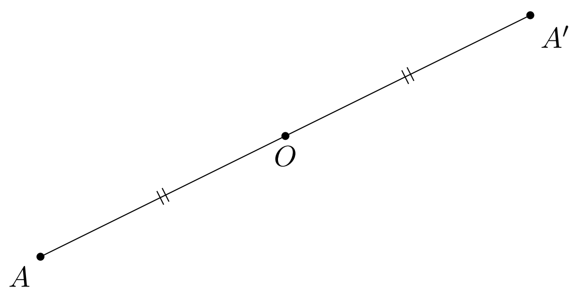
2.2 Symétrie centrale

Définition 13.17.

Soit O un point. On dit que A' est le symétrique d'un point A distinct de O si O est le milieu du segment $[AA']$.

Remarque 13.18.

Le symétrique du point O est lui-même.

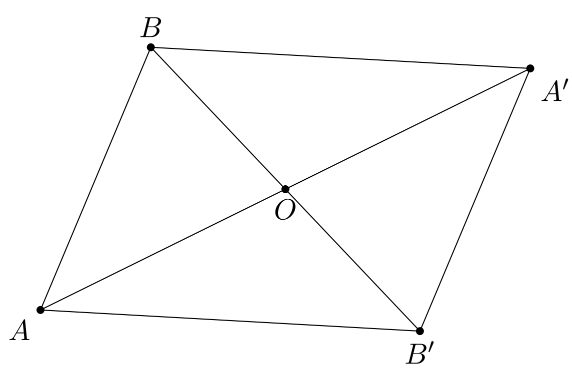


On a alors : $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$.

Propriétés 13.19.

Si on note s_O la symétrie de centre O.

- Le point O (centre de symétrie) est l'unique point invariant.
- si $s_O(M) = M'$ alors $s_O(M') = M$.
- si $s_O(A) = A'$ et $s_O(B) = B'$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire que $ABA'B'$ est un parallélogramme de centre O. Ainsi, $A'B' = AB$ et $(A'B') \parallel (AB)$; ce qui signifie que la symétrie centrale conserve les distances.
- L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d) ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
- L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.



Propriétés 13.20. *Propriétés communes de conservation*

Alignement L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre. L'image d'une droite est une droite.

Distances L'image d'un segment est un segment de même longueur. L'image d'un cercle C est un cercle C' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle C, alors son image (d') est tangente à C'.

Parallélisme Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Orthogonalité Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

Centre de gravité L'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

Aires L'image d'un triangle est un triangle de même aire.

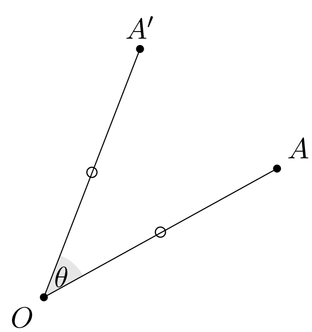
Angles L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

3 Rotations

Définition 13.21.

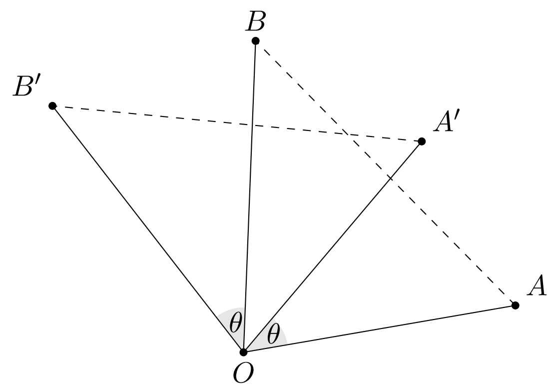
On considère un point O et un nombre réel θ. La rotation de centre O et d'angle θ est la transformation du plan qui à tout point M associe M' tel que $AM' = AM$ et $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \theta \pmod{2\pi}$.

On note $r_{O;\theta}$ la rotation de centre O et d'angle θ.



Propriétés 13.22.

1. Le point O, centre de la rotation, est l'unique point invariant.
2. Si $r_{O;\theta}(A) = A'$ et $r_{O;\theta}(B) = B'$ alors $AB = A'B'$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \theta$; ce qui signifie que la rotation conserve les distances.
3. L'image d'une droite (d) est d'une droite (d') telle que l'angle formée entre les deux droites égale θ ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
4. L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
5. $r_{O;\pi} = s_O$.



Propriétés 13.23. *Propriétés communes de conservation*

Alignement L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre. L'image d'une droite est une droite.

Distances L'image d'un segment est un segment de même longueur. L'image d'un cercle C est un cercle C' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle C, alors son image (d') est tangente à C'.

Parallélisme Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Orthogonalité Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

Centre de gravité L'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

Aires L'image d'un triangle est un triangle de même aire.

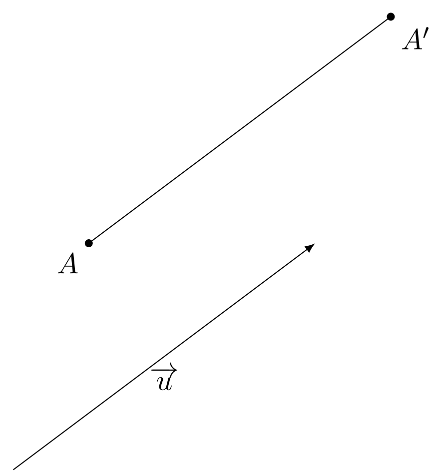
Angles L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

4 Translations-homothéties

4.1 Translations

Définition 13.24.

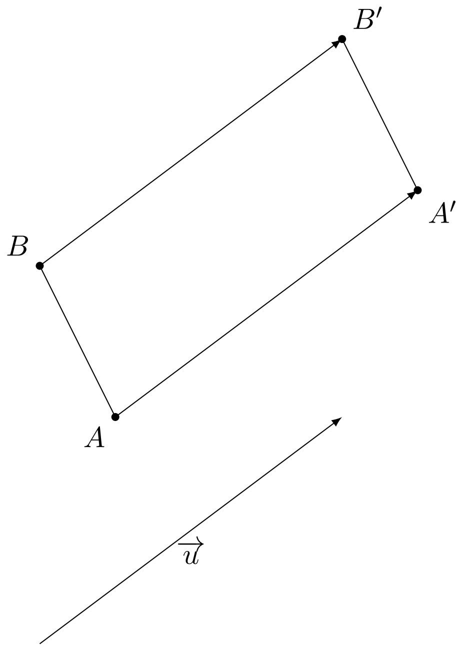
On considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.



Propriétés 13.25.

Si on note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$:

- si le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas nul, il y a aucun point invariant par $t_{\overrightarrow{u}}$. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, tous les points sont invariants par $t_{\overrightarrow{u}}$.
- $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ équivaut à $\overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{u}$; c'est-à-dire que M est l'image de M' par la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.
- Si $t_{\overrightarrow{u}}(A) = A'$ et $t_{\overrightarrow{u}}(B) = B'$, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire que $ABB'A'$ est un parallélogramme. Ainsi $A'B' = AB$ et $(A'B') \parallel (AB)$; ce qui signifie que la translation conserve les distances.
- L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d) ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
- L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui siginifie que la translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.



Propriétés 13.26. *Propriétés communes de conservation*

Alignement L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre. L'image d'une droite est une droite.

Distances L'image d'un segment est un segment de même longueur. L'image d'un cercle C est un cercle C' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle C, alors son image (d') est tangente à C'.

Parallélisme Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Orthogonalité Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

Centre de gravité L'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

Aires L'image d'un triangle est un triangle de même aire.

Angles L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

4.2 Symétrie glissée

Définition 13.27.

Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur directeur d'une droite Δ dans le plan. La symétrie glisée d'axe Δ et de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la composée d'une réflexion d'axe Δ et d'une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

4.3 Homothéties

4.3.1 Définition

Définition 13.28.

Soit O un point, k un réel non nul. On appelle *homothétie* de centre O et de rapport k, la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

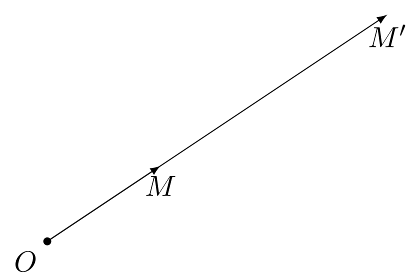
Remarque 13.29.

Si on note h l'homothétie de centr O et de rapport k, les énoncés suivants sont équivalents :

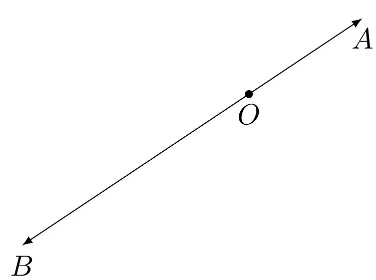
- M' est l'image de M par h ;
- $M' = h(M)$;
- $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Exemples 13.30.

- Le point M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3, en effet $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$.



- Le point C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport -2, en effet $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.



Le point B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$, en effet $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Conséquences 13.31.

- Les points O, M et M' sont alignés (les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires) et $OM' = |k|\, OM$.
- Le point O est sa propre image, on dit qu'il est invariant.
- Si A, B et C sont trois points alignés, A étant distinct de B et C, alors il existe une unique homothétie de centre A qui transforme B en C.
- Une symétrie centrale de centre O est une homothétie de centre O et de rapport -1.
- Une homothétie de rapport 1 laisse les points invariants.

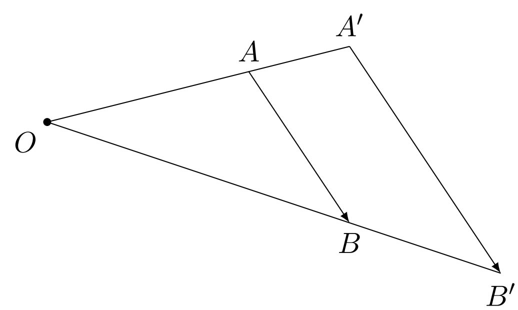
4.3.2 Propriétés

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Propriété 13.32.
Soient A et B deux points quelconques. Si $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. ♢ Comme $A' = h(A)$, on a $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et comme $B' = h(B)$, on a : $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. Alors :

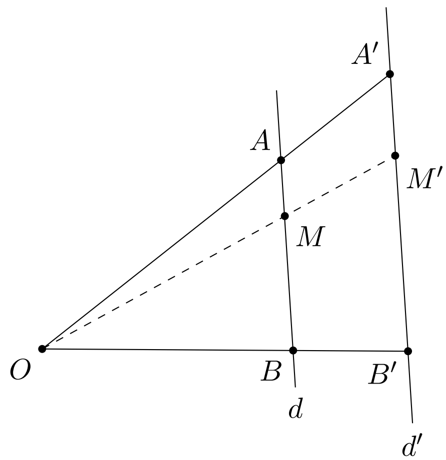
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{AB}.$$



□

Propriété 13.33. *Image d'une droite*
Une homothétie transforme une droite d en une droite d' parallèle à d. Si la droite d passe par le centre de l'homothétie, alors $d' = d$.

Démonstration. ♢ Soient A et B deux points de d et A' et B' leurs images par l'homothétie de centre O et de rapport k.



Comme $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, la droite d' passant par A' et B' est parallèle à d.

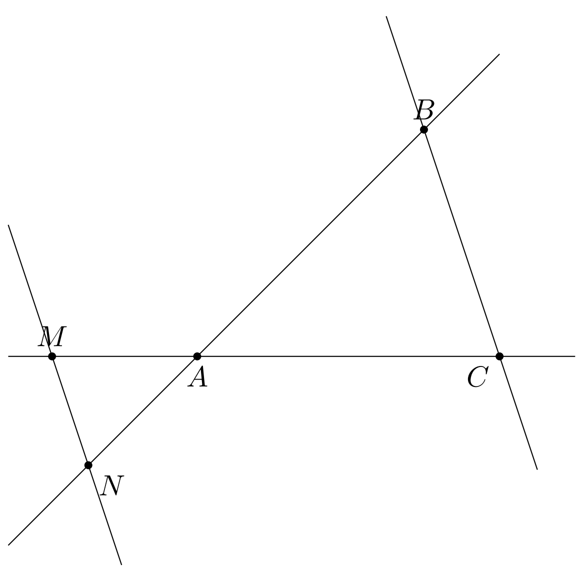
Soit M un point de d. Montrons que $M' = h(M)$ est sur d'. Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$. D'autre part, $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$. Donc :

$$A'M' = kx\overrightarrow{AB} = xk\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{A'B'}.$$

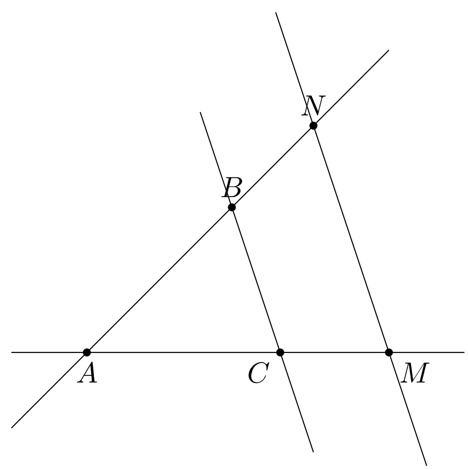
Cela montre que A', B' et M' sont alignés donc M' est sur d'. En prenant x dans $[0\,,1]$, cela montre aussi que le segment $[A'B']$ est l'image du segment $[AB]$. $\square$

Propriété 13.34. *Triangles semblables*
Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC). Si (MN) est parallèle à (BC), alors l'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N.

1.



2.



Démonstration. ◊ Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en M. Le point C se trouve à l'intersection des droites (AC) et (BC). Son image par h sera donc à l'intersection des images de (AC) et (BC).

L'image de (AC) est (AC) (droite passant par le centre de l'homothétie). L'image de (BC) est une droite parallèle à (BC) passant par M image de B, c'est donc la droite (MN).

L'image de C par h est donc l'intersection des droites (AC) et (MN), c'est le point N. □

Propriété 13.35. *Image d'un cercle*
Une homothétie h de rapport k transforme un cercle de centre I et de rayon R en son cercle de centre I' et de rayon R' avec $I' = h(I)$ et $R' = |k|\,R$.

4.3.3 Effets de l'homothétie

Propriété 13.36. *Distances, aires et volumes*
Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Propriété 13.37. *Conservation de l'alignement*
Si A, B et C sont trois points alignés, leurs images A', B' et C' par une homothétie sont aussi trois points alignés.

Propriété 13.38. *Conservation du parallélisme*
Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, leurs images d_1' et d_2' par une homothétie sont aussi des droites parallèles.

Propriété 13.39. *Conservation du barycentre*
Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β), et si G', A' et B' sont les images respectives de G, A et B par une homothétie, alors G' est le barycentre de (A', α) et (B', β).

En particulier, les homothéties conservent les milieux.

Propriété 13.40. *Conservation des angles orientés*
Dans le plan orienté, si A, B et C sont trois points distincts deux à deux, et si A', B' et C' sont leurs images respectives par une homothétie alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

4.4 Groupe des homothéties et des translations (niveau Licence)

$\diamondsuit$

On se place dans un plan affine $\mathcal{E}$ dirigé par un espace vectoriel E.

Définition 13.41.

Une application affine h de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est appelée *homothétie*, s'il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que pour tout vecteur $v \in E$, on ait :

$$h(A+v) = A + \lambda v.$$

C'est l'application qui à un point M associe N tel que $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AM}$. L'application linéaire associée à h est l'homothétie vectorielle $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_E$, l'homothétie h admet un unique point fixe A apelé *centre*, le scalaire λ est appelé *rapport* de h.

Si A, B, C sont trois points alignés de $\mathcal{E}$ alors il existe une unique homothétie h telle que :

$$h(A) = A \quad \text{et} \quad h(B) = C.$$

Proposition 13.42.
Soient $A \neq A'$, $B \neq B'$ des points de $\mathcal{E}$ tels que les droites $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}' = (A'B')$ soient distincts et parallèles, alors

1. si $(AA') \parallel (BB')$, on a $B' = t_{\overrightarrow{AA'}}(B)$,
2. si $(AA') \cap (BB') = \{O\}$, on a $B' = h_{(O,\lambda)}(B)$ où $h_{(O,\lambda)}$ est l'homothétie de centre O et de rapport λ tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$.

Démonstration.

1. On a $(AB) \parallel (A'B')$ et $(AA') \parallel (BB')$, d'où l'existence de deux scalaires α et β tels que $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BB'} = \beta\overrightarrow{AA'}$, c'est-à-dire :

$$B' = A' + \alpha B - \alpha A = \beta A' + B - \beta A,$$

d'où $\alpha = \beta$ donc $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$.

2. Notons λ le scalaire tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$. Il existe k tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, d'où $B' = A' + kB - kA$ donc :

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = (\lambda - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB},$$

ce qui prouve que $k = \lambda$ (car O, B et B' sont alignés).

$\square$

Proposition 13.43.
Les bijections de $\mathcal{E}$ qui transforment toute droite en une droite parallèle forment un groupe dont les éléments sont exactement les homothéties et les translations. Ce groupe est appelé *groupe des homothéties-translations*, noté $HT(\mathcal{E})$.

Démonstration. Il est clair que l'ensemble de ces bijections est un groupe qui contient les homothéties et les translations. On montre la réciproque : soit f un telle bijection, nous allons examiner trois cas :

1. f n'a pas de point fixe : soit M un point de $\mathcal{E}$, on considère $N \notin (Mf(M))$, si $(Mf(M)) \cap (Nf(N)) = \{O\}$ alors O est un point fixe de f, en effet, par hypothèse,
$$(f(O)f(M)) \parallel (OM) = (Of(M)) \text{ donc } f(O) \in (Of(M)),$$
mais on a aussi
$$(f(O)f(N)) \parallel (ON) = (Of(N)) \text{ donc } f(O) \in (Of(N))$$
ce qui prouve que
$$\{f(O)\} = (Mf(M)) \cap (Nf(N)) = \{O\}\,.$$
L'application f étant supposée sans point fixe, les droites $(Mf(M))$ et $(Nf(N))$ sont donc parallèles, on est donc dans la situation 1 de la proposition précédente, f est une translation.
2. f admet un unique point fixe O : soient M et N tels que O, M et N ne soient pas alignés. On a :
$$(Of(M)) = (f(O)f(M)) \parallel (OM) \Rightarrow f(M) \in (OM)$$
et de même
$$(Of(N)) = (f(O)f(N)) \parallel (ON) \Rightarrow f(N) \in (ON).$$
De plus, par hypothèse, $(MN) \parallel (f(M)f(N))$, on est ainsi dans la situation 2 de la proposition précédente et f est une homothétie.
3. f admet au moins deux points fixes O et O', soit $M \notin (OO')$ alors la droite $(f(O)f(M))$ est une droite parallèle à (OM) qui contient O. C'est donc la droite (OM). De même, $(O'f(M')) = (O'M)$, ainsi $f(M) \in (OM) \cap (O'M)$ donc $f(M) = M$, les points de $\mathcal{E}$ qui ne sont pas sur (OO') sont fixes. Si $N \in (OO')$ alors le point $N \notin (OM)$ avec O et M fixes, on a donc pour les mêmes raisons $f(N) = N$, ainsi f est l'identité.

□

Proposition 13.44.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, soit $\varphi : GA(\mathcal{E} \to GL(E)$ qui à une application affine f associe son application linéaire $\vec{f}$. Le sous groupe $\varphi^{-1}(\mathcal{K}\,\mathrm{id}_E)$ est égal au groupe des homothéties-translations et il est distingué dans $GA(\mathcal{E})$. On a :
$$f \in HT(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\; f(M+v) = f(M) + \lambda v,\; \forall M \in \mathcal{E},\; \forall v \in E.$$

1. Si $\lambda = 1$, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.
2. Si $\lambda \not{1}$, f est une homothétie de rapport λ et de centre (pour tout $A \in \mathcal{E}$)
$$C = \frac{-\lambda}{1-\lambda}A + \frac{1}{1-\lambda}f(A).$$

On laisse la démonstration en exercice.

5 Similitudes

Voir la leçon 37 de C. Boulonne, *Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES*. Session 2011. URL : https://cboumaths.files.wordpress.com/2012/01/leconcapes2011.pdf .

Définition 13.45. *Similitude du plan*

On appelle *similitude du plan*, toute transformation f du plan conservant les rapports de distances, c'est-à-dire une transformation du plan pour laquelle pour tous points M, N, P et Q ($M \neq N$ et $P \neq Q$) dont les images par f sont notées M', N', P' et Q', on a :

$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}.$$

Propriété 13.46.

Soit f une transformation du plan. f est une similitude si et seulement si il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k, c'est-à-dire : pour tous points M et N dont les images par f sont notées M' et N', on a :

$$M'N' = kMN.$$

Propriété 13.47.

Si f est une similitude de rapport k, alors sa réciproque est une similitude de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$.

Si f est une similitude de rapport k et f' une similitude de rapport k' alors les composées $f \circ f'$ et $f' \circ f$ sont des similitudes de rapport kk' (en général, on a $f \circ f' \neq f' \circ f$).

Définition 13.48.

Une similitude de rapport 1 est une transformation du plan qui conserve les distances, donc c'est une isométrie.

Définition 13.49. *Similitude directe*

On appelle *similitude directe* toute similitude conservant les angles orientés.

Remarque 13.50.

Si une similitude transforme les angles orientés en leur opposé, alors c'est une similitude *indirecte*.

Propriété 13.51.
Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation. Soit Ω l'unique point invariant de f, k le rapport de f et θ l'angle de f. f est la composée de l'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k et la rotation $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle θ. Ces deux applications commutent, on peut écrire :

$$f = h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k}.$$

Cette décomposition est appelée *forme réduite* de la similitude directe f.

Définition 13.52.
Une similitude directe f qui n'est pas une translation est déterminée par la donnée de son centre Ω, son rapport k et son angle θ. On dit que f est la *similitude directe* de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. On notera $f = S_{\Omega,k,\theta}$ (k est un réel strictement positif et θ est un réel).

Définition 13.53. *Déplacement, antidéplacement*
Une *similitude directe* (resp. indirecte) de rapport 1 est appelé un *déplacement* (resp. *antidéplacement*).

Propriétés 13.54. *Propriétés géométriques des similitudes planes*

Soit f une similitude plane. A, B, C et D sont quatre points et on note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$.

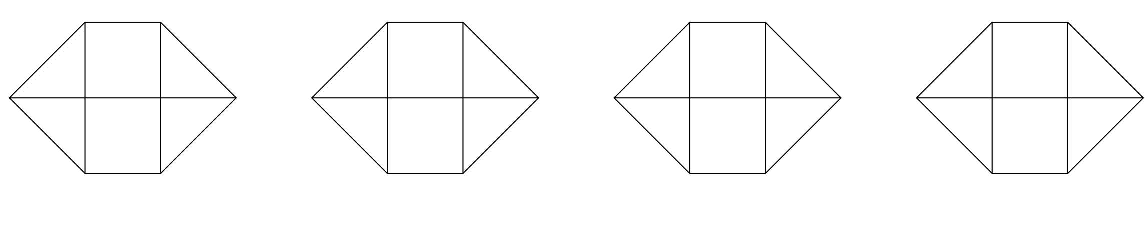
1. f conserve les rapports de distances : c'est-à-dire que si $A \neq B$, $C \neq D$, on a :
$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$
2. f conserve les angles géométriques : si A, B et C sont deux à deux distincts, on a : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.
3. f conserve l'alignement : si A, B et C sont alignés alors A, B' et C' sont alignés.
4. f transforme une droite en une droite : si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et la droite $(A'B')$ est l'image par f de la droite (AB).
5. f transforme un segment en un segment : si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et le segment $[A'B']$ est l'image par f du segment $[AB]$.
6. f conserve le parallélisme et l'orthogonalité :
   a) si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles alors $(A'B')$ et $(C'D')$ sont deux droites parallèles ;
   b) si (AB) et (CD) sont deux droites perpendiculaires alors $(A'B')$ et $(C'D')$ sont deux droites perpendiculaires.
7. f conserve les barycentres : si G est le barycentre de (M_1, α_1), (M_2, α_2), …, (M_n, a_n) (avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$) alors son image G' est le barycentre des images affectées des mêmes coefficients : (M_1', α_1), (M_2', α_2), …, (M_n', α_n).
8. f conserve le milieu : si C est le milieu de $[AB]$ alors C' est le milieu de $[A'B']$.
9. f transforme un triangle en un triangle semblable : si A, B et C sont deux à deux distincts, alors A', B' et C' sont deux à deux distincts et les triangles $A'B'C'$ et ABC sont semblables (si f est une similitude directe, on dira que les triangles sont directement semblables, si f est une similitude indirecte, on dira que les triangles sont indirectement semblables).
10. f transforme un cercle en un cercle : l'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon kR (où k est le rapport de la similitude f).

6 Frises et pavages

6.1 Frises

Définition 13.55.

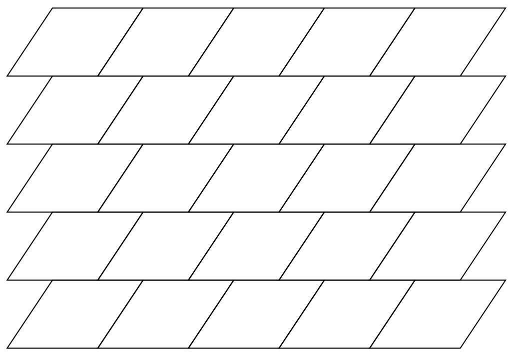
Une *frise* est constituée d'un motif qui est reproduit dans une seule direction par translation.



6.2 Pavages

Définition 13.56.

Un pavage est constitué d'un motif qui est reproduit dans deux directions par des translations et qui recouvre le plan sans trou, ni superposition.



Theoreme 13.57.
Les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont :
- les triangles équilatéraux
- les carrés
- les hexagones réguliers.

Démonstration. Soit un polygone régulier à n côtés et θ la valeur de l'angle entre deux côtés consécutifs. Divisons-le en n triangles isocèles identiques de sorte à ce que chacun est comme base l'un des côtés du polygone.

On note, dans ces triangles isocèles, β l'angle unique et α tel que $2\alpha = \theta$. Nous avons alors :

$$\beta = \frac{2\pi}{n}.$$

De plus, comme les triangles sont isocèles :

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta = \pi &\Leftrightarrow 2\alpha + \frac{2\pi}{n} = \pi \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi(n-2)}{2n}. \end{aligned}$$

Comme $\theta = 2\alpha$, il vient :

$$\theta = \frac{\pi(n-2)}{n}.$$

Pour que le polygone pave le plan, il doit donc existe un entier naturel j tel que :

$$\begin{aligned} 2\pi = k\theta \Leftrightarrow 2\pi = \frac{k\pi(n-2)}{n} &\Leftrightarrow 2 = \frac{k(n-2)}{n} \\ &\Leftrightarrow k(n-2) = 2n \Leftrightarrow k(n-2) = 2(n-2) + 4 \Leftrightarrow (n-2)(k-2) = 4. \end{aligned}$$

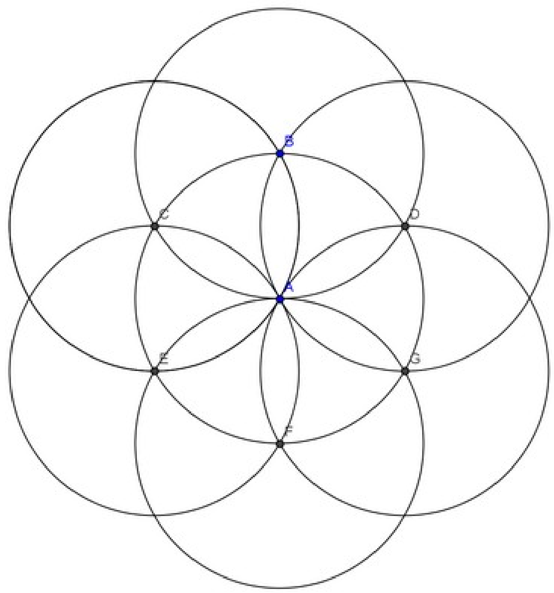
Autrement dit, $(n-2)$ doit être diviseur de 4. Comme les seuls diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4, n peut donc valoir 3, 4 ou 6.

Par conséquent, aucun autre polygone convexe régulier ne peut paver le plan. $\square$

6.3 Rosaces

Définition 13.58.

Une rosace est constituée d'un motif qui est reproduit plusieurs fois par rotation.



6.4 Frises et pavages au Brevet

Exercice 13.58. *Brevet Pondichéry 2018, Exercice 2*

Le pavage représenté sur la figure 1 est réalisé à partir d'un motif appelé pied-de-coq qui est présent sur de nombreux tissus utilisés pour la fabrication de vêtements.

Le motif pied-de-coq représenté par le polygone ci-dessous à droite (figure 2) qui peut être réalisé à l'aide d'un quadrillage régulier.

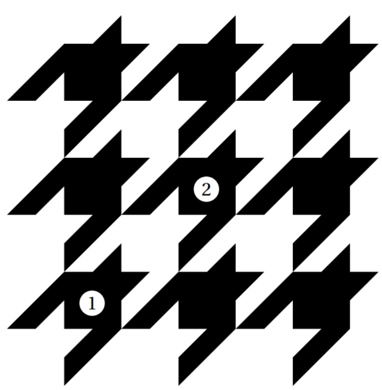


Figure 1

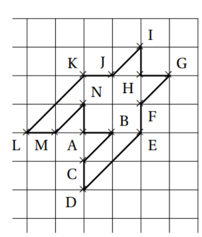


Figure 2

1. Sur la figure 1, quel type de transformation géométrique permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 ?

2. Dans cette question, on considère que $AB = 1$ cm (figure 2). Déterminer l'aire du motif pied-de-coq.
3. Marie affirme : « si je divise par 2 les longueurs d'un motif, son aire sera aussi divisée par 2 ». A-t-elle raison ? Expliquer pourquoi.

♢ *Solutions.* **1.** On peut obtenir le motif 2 à partir du motif 1 grâce à une translation oblique.

2. Sur la figure 2, on constate que l'aire du motif pied-de-coq s'obtient par la somme des aires suivantes :

- **Aire du carré $AEHK$:**

$$\mathcal{A}_{AEHK} = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2.$$

- **Aire du trapèze $BEDC$ et trapèze $LKNM$:**

$$\mathcal{A}_{BEDC} = \mathcal{A}_{LKMN} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ cm}^2.$$

- **Aire du triangle IJH et GHF :**

$$\mathcal{A}_{IJH} = \mathcal{A}_{GHF} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ cm}^2.$$

Ainsi, l'aire du motif pied-de-coq est égale à :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{motif}} &= \mathcal{A}_{AEHK} + \mathcal{A}_{BEDC} + \mathcal{A}_{IJH} + \mathcal{A}_{GHF} + \mathcal{A}_{LKMN} \\ &= 4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 4 + 3 + 1 = 8 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

3. Marie a tort car quand on divise par 2 les longueurs du motif alors on divise par $2^2 = 4$ son aire.

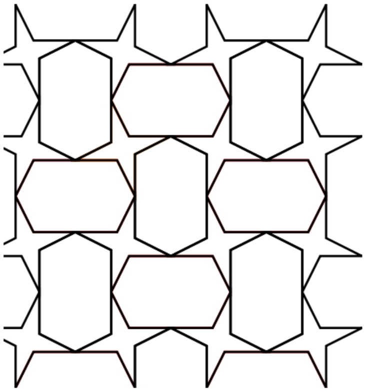
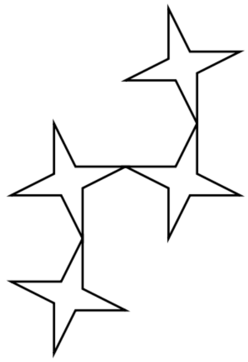
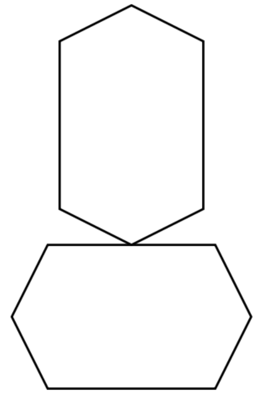
□

6.5 Frises et pavages au BAC STD2A

Exercice 13.58. *BAC STD2A Métropole 2018, Exercice 3*

Pour sa dernière création textile, un styliste s'inspire d'un pavage que l'on peut voir sur les murs du palais de l'Alhambra. Pour imprimer ce pavage sur un tissu, on utilise un tampon qu'une machine déplace en translations au-dessus du tissu et applique à un motif.

Deux impressions différentes sont réalisées, l'une avec un motif constitué de quatre étoiles (*motif A*) et l'autre avec un motif constitué de deux hexagones (*motif B*). Dans le (*motif A*), les quatres étoiles sont superposables. Dans le (*motif B*), les deux hexagones sont superposables. Dans la figure ci-dessous, on a représenté une partie du pavage, le (*motif A*) et le (*motif B*).

		
Partie du pavage	*(motif A)*	*motif B*

Dans la **Partie A** de cet exercice, on étudie l'impression réalisée avec le (*motif* A).

Dans la **Partie B** de cet exercice, on étudie l'impression réalisée avec le (*motif* B).

Partie A : Étude de l'impression réalisée avec le (*motif A*)

1. Le (*motif* A) représenté sur la figure 1 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie** a été construit à partir de l'étoile numérotée 1.
   a) Donner une transformation qui permet d'obtenir l'étoile numérotée 2 à partir de l'étoile numérotée 1.
   On fera apparaître sur la figure 1 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie** les éléments caractéristiques de cette transformation.
   b) Quelle transformation a permis d'obtenir le (*motif* A) à partir des étoiles numérotées 1 et 2 ?
   On fera apparaître sur la figure 1 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie** les éléments caractéristiques de cette transformation.
2. Le (*motif* A) permet de paver le plan à l'aide des transformations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés par $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{EK}$ sur la figure 3 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.
   a) Les points J, F et L sont les images respectives du point G par les translations de vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $2\vec{u} + \vec{v}$. Placer les points J, F et L sur la figure 3 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.
   b) Donner deux nombres entiers a et b tels que l'image du point D par la translation de vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$ soit le point H. Représenter le vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$ sur la figure 3 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.

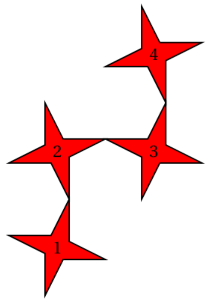
Partie B : Étude de l'impression réalisée avec le (*motif B*)

Le (*motif* B) représenté sur la figure 2 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie** a été construit à partir de l'hexagone numéroté 1.

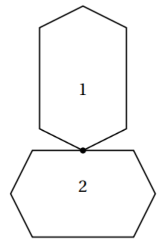
1. Dans le (*motif* B), par quelles transformations géométriques passe-t-on de l'hexagone numéroté 1 à l'hexagone numéroté 2 ?
   Représenter les éléments caractéristiques de ces transformations sur la figure 2 de **annexe 2 à rendre avec la copie**.
2. Comment obtient-on le pavage à partir du (*motif* B) ?
   Représenter les éléments caractéristiques des transformations géométriques nécessaires sur la figure 3 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.

Annexe 2 à rendre avec la copie

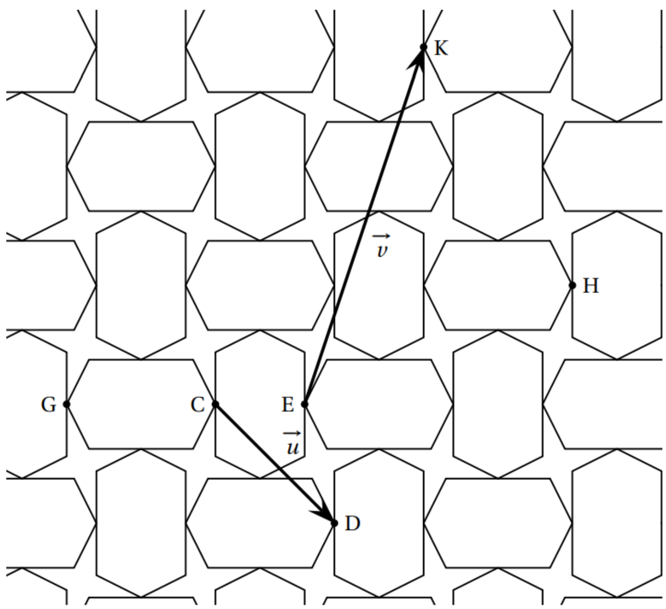
EXERCICE 3 - Figure 1



EXERCICE 3 - Figure 2



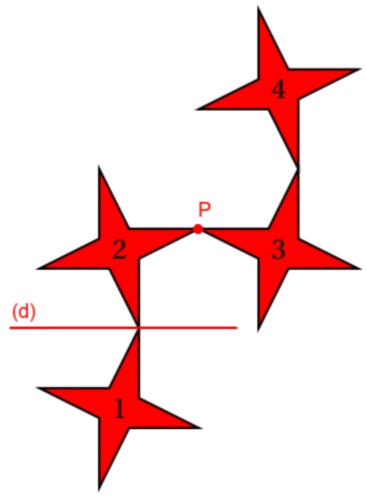
EXERCICE 3 - Figure 3



◊ *Solutions.* **Partie A**

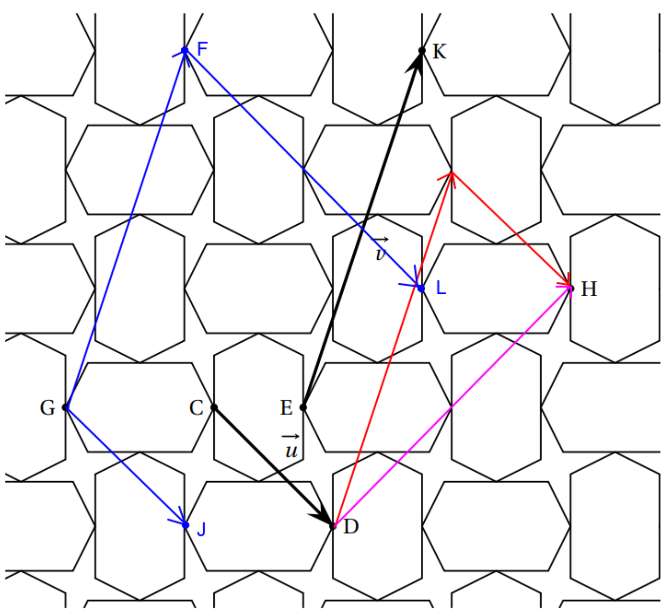
1. a) Pour obtenir l'étoile numérotée 2 à partir de l'étoile numérotée 1 sur le *(motif A)*, il faut appliquer une symétrie d'axe horizontal qui passe par la pointe « Nord » de l'étoile numérotée 1. L'axe de symétrie est marquée (d) sur la figure ci-dessous.

b) Pour obtenir le *(motif A)* à partir des étoiles numérotées 1 et 2, il faut appliquer une symétrie centrale par rapport à la pointe « Est » de l'étoile numérotée 2. Le centre de symétrie est marquée P sur la figure ci-dessous.



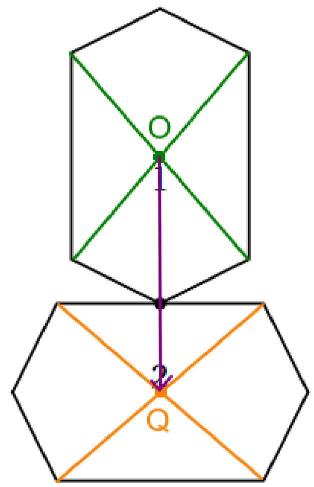
2. a) Voir la figure ci-dessous.
b) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ donc $a = 1$ et $b = 1$.

EXERCICE 3 - Figure 3



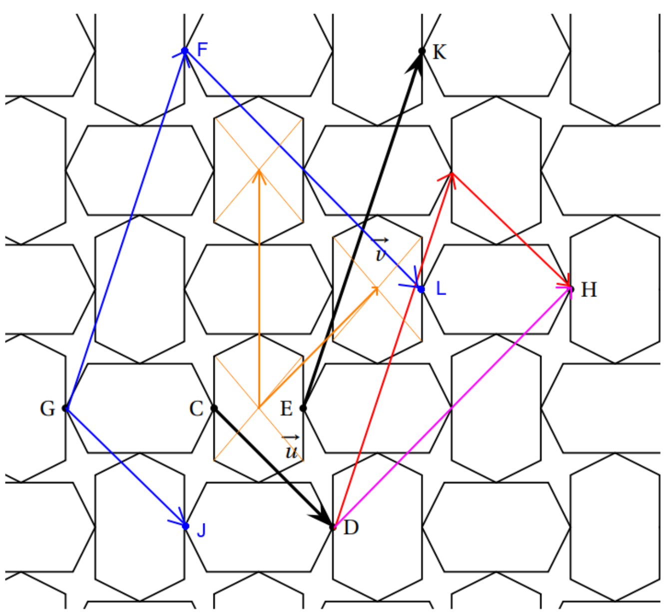
Parite B

1. L'hexagone numérotée 2 est obtenu à partir de l'hexagone numéroté 2 par la composition d'une translation verticale et d'une rotation de 90° de centre O le centre de l'hexagone numérotée 1. Les éléments caractéristiques de ces transformations sont indiqués sur la figure ci-dessous.



2. Le pavage est obtenu à partir du *(motif B)* grâce à une translation verticale et une translation oblique. Les éléments caractéristiques de ces deux translations sont indiqués en orange sur la figure ci-dessous.

EXERCICE 3 - Figure 3



□

6.6 Frises et pavages au CAPES

On parle de pavages et de frises dans l'épreuve écrite n° 1 (option mathématiques) du CAPES de Mathématiques session 2017 :

http://www4.ac-nancy-metz.fr/capesmath/data/uploads/EP1_Math_2017.pdf