CBMaths

CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n$^{\text{o}}$ 15

Solides de l'espace. Représentations et calculs de volume.

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 19 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Transversal

Prérequis

Intégrales, géométrie dans l'espace.

Références

- M. Cuaz, *Géométrie dans l'espace, solides de l'espace*. URL : `http://hexomaths.fr/fichiers/GeometrieespaceCOURS.pdf`.
- Contributeurs de Wikipédia, *Solide géométrique*. Wikipédia.
- T. Eveilleau, *Les solides de Platon*. `http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/platon.htm`.
- S. Delaunay, *M302 : Cours de Géométrie I*, 2009-2010.
- C. Boulonne, *Notes de cours, M103 : Fondements de l'analyse 2*. 2006-2007.

Plan de la leçon

1 Défintions

1.1 Définition de la vie courante

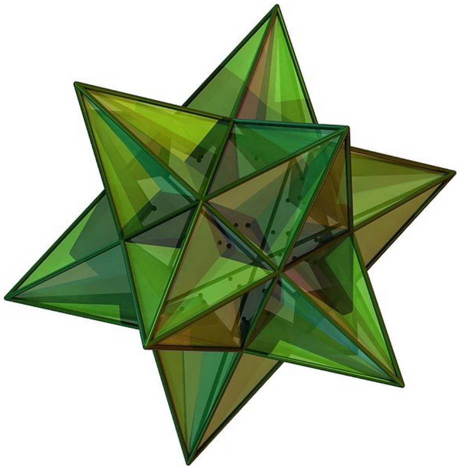
Définition 15.1. *Solide*

Un solide dans l'espace est un ensemble de points situés à l'intérieur d'une partie fermée de l'espace.

Définition 15.2. *Polyèdre*

Lorsque ces solides sont déterminés par des surfaces planes polygonales, on les appelle « *polyèdres* ».

Ces surfaces sont alors appelées *faces*, dont les côtés sont des arêtes ayant pour extrémités des sommets du polyèdre.



Définition 15.3. *Volume*

On appelle *volume* la portion de l'espace occupée par un solide.

Définition 15.4. *Patron*

Un *patron* d'un solide est un modèle plan permettant de construire par pliage, le solide.

1.2 Définition selon de grands mathématiciens

Définition 15.5. *Selon Platon*

Est solide ce qui possède longueur, largueur et profondeur, et la limite d'un solide est une surface.

Définition 15.6. *Selon Leibniz*

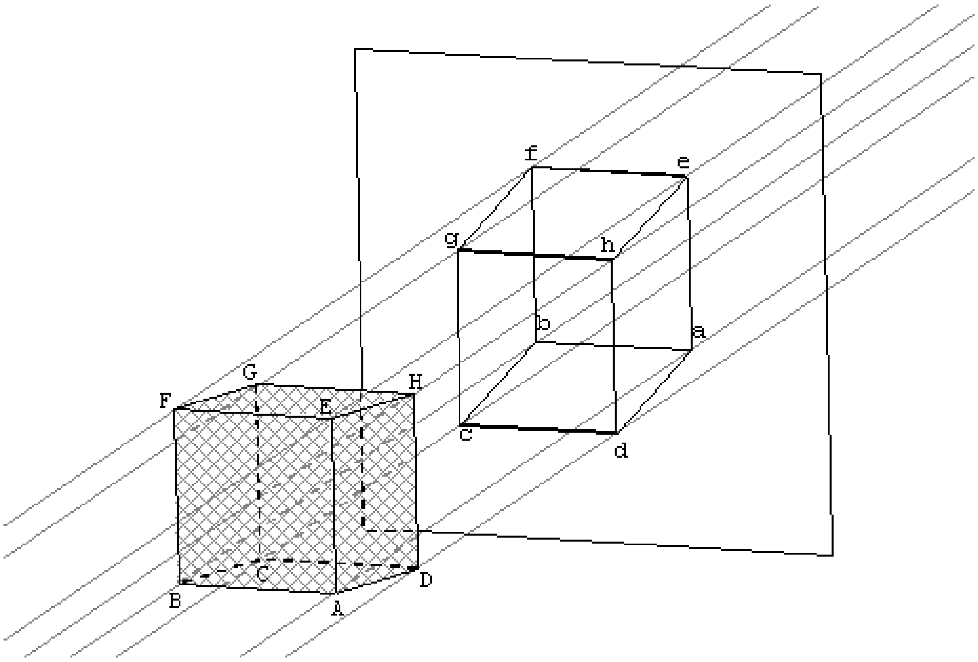
> Le chemin suivi par un point se déplaçant vers un autre est une ligne (...) Le déplacement de cette ligne dont les points ne se remplacent pas sans cesse donne une surface. Le déplacement d'une surface dont les points ne se remplacent pas sans cesse donne un solide.

2 Règles de la perspective cavalière

2.1 Notion de perspective

Définition 15.7.

> La perspective est une technique de représentation des solides sur une surface plane.



Remarque 15.8.

> La perspective cavalière donne une meilleure idée de la forme réelle du cube dans l'espace.

2.2 Règles de construction

Theoreme 15.9. *Règles de construction d'un solide en perspective cavalière*

– Les éléments cachés sont tracés en pointillés, les éléments visibles sont en trait plein.

– Les éléments situés dans un plan vu de face (frontal) sont représentés en vraie grandeur.

– Les droites perpendiculaires au plan frontal sont représentées par des droites parallèles formant un angle (de fuite) avec l'horizontale.

- Les longueurs représentées dans la direction des lignes fuyantes ne sont pas les longueurs réelles (on les réduite par un coefficient de réduction en général $0,5$ ou $0,7$.

2.3 Propriétés de la perspective cavalière

Propriétés 15.10.

- Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.
- Deux droites sécantes sont représentées par deux droites sécantes.
- Des points alignés sont représentées par des points alignés.
- Les milieux de segments sont conservés.

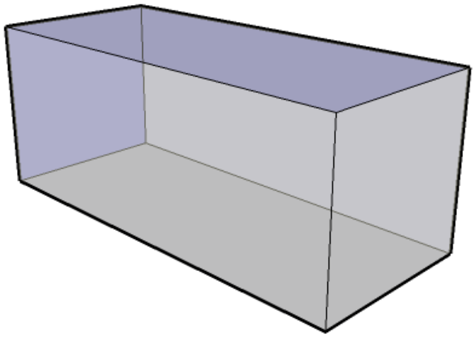
3 Solides usuelles

3.1 Parallélépipèdes rectangles (ou pavés droits)

Définition 15.11.

Un parallélépipède rectangle est un polyèdre dont toutes les faces sont rectangulaires.

Il y a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes.



Remarque 15.12.

Si toutes les faces du parallélépipède rectangle sont des carrés, on appelle ce solide, un cube.

Propriété 15.13.

Si on note L, l et h les dimensions du pavé droit, alors :

- le volume est : $L \times l \times h$;
- l'aire est $2 \times (Ll + lh + Lh)$;
- la grande diagonale mesure $\sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$.

Propriété 15.14.
La section d'un pavé droit avec un plan parallèle à une face est un rectangle de même mesure que cette face.

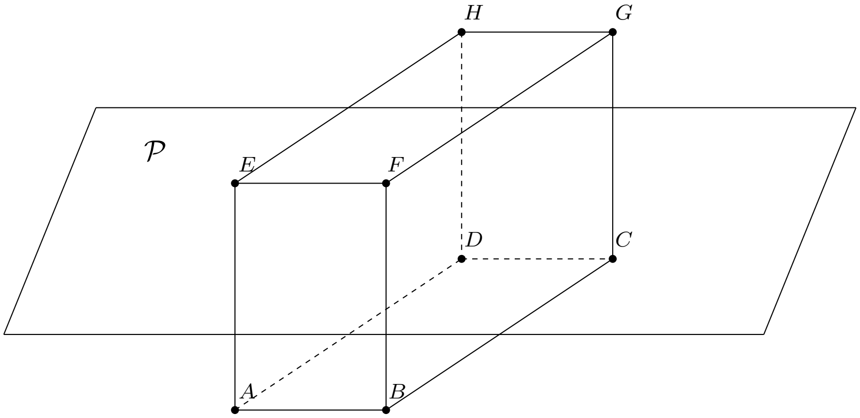
La section d'un pavé droit avec un plan parallèle à une arrête est un rectangle dont les mesures dépendent du plan.

◊

Pour la démonstration de la propriété 15.14, on aura besoin du résultat suivant :

Theoreme 15.15. *« Théorème du toit »*
Si deux plans distincts (non parallèles) contiennent deux droites parallèles, alors l'intersection de ces deux plans est une droite parallèle aux deux autres, c'est-à-dire, si $(d_1) \subset \mathcal{P}_1$, $(d_2) \subset \mathcal{P}_2$ et si $(d_3) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ alors $(d_3)//(d_1)$ et $(d_2)//(d_3)$.

Démonstration de la propriété 15.14.



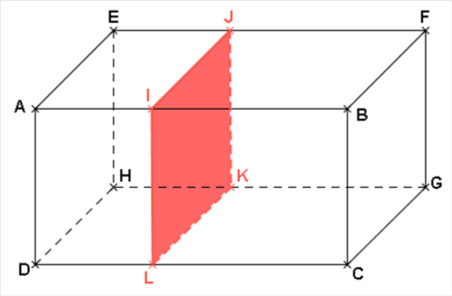
Soit $\mathcal{P}$ un plan d'intersection parallèle avec (FB). On montre que l'intersection est un rectangle.

Puisque $\mathcal{P}//(FB)$, $\mathcal{P} \cap (BGC)$ est parallèle à (BF). On montre de même que $\mathcal{P} \cap (EAD)$ est parallèle à (EA).

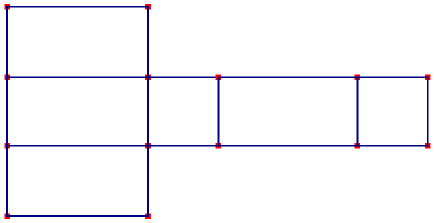
Donc les côtés opposés $\mathcal{P} \cap (BGC)$ et $\mathcal{P} \cap (EAD)$ sont parallèles. Ainsi, en utilisant le théorème de Thalès dans l'espace, on montre qu'ils sont de même longueur.

De plus, puisque $\mathcal{P} \cap (BCG)$ est parallèle à (BF), elle est orthogonale à (ABC), et en particulier à la droite $\mathcal{P} \cap (ABC)$.

On a donc un parallélogramme avec un angle droit, c'est un rectangle. □



On donne ci-dessous le patron du parallélépipède rectangle.



3.2 Prismes et cylindres

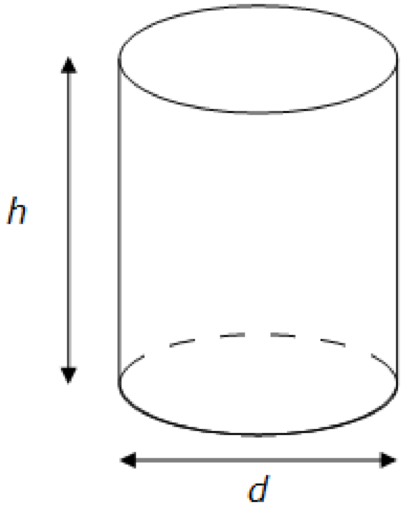
Définition 15.16.

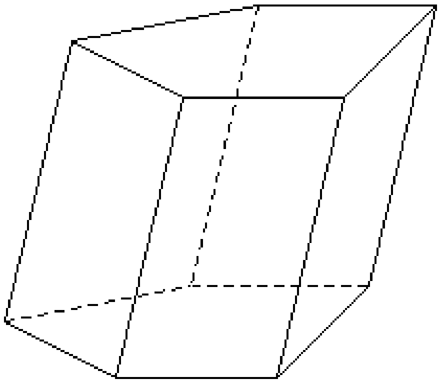
Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles et M un point de $\mathcal{P}_1$.

Soit un polygone $\mathcal{P}$ et un cercle $\mathcal{C}$ inclus dans $\mathcal{P}_1$. On considère la droite (d) passant par M et non parallèle à $\mathcal{P}_1$.

On appelle *prisme* (resp. *cylindre*) le solide délimité par la surface latérale que décrit (d) quand M décrit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{C}$).

On appelle (d) *génératrice* du prisme (resp. cylindre) et la distance entre $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est appelé *hauteur*.





Remarques 15.17.

1. Lorsque (d) est orthogonal à $\mathcal{P}_1$, on dit que le prisme (resp. cylindre) est droit (resp. de révolution).

2. Les pavés sont des prismes droits.

Propriété 15.18.

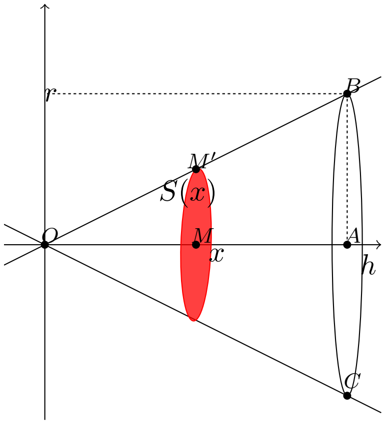
- Le volume du prisme et du cylindre est égal à :

$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

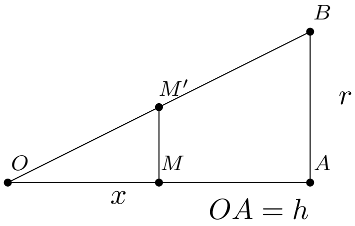
- L'aire du prisme et du cylindre est égal à :

$$\mathcal{A} = \text{périmètre de la base} \times \text{hauteur} + 2 \times \text{aire de la base}.$$

Démonstration. ◊



On coupe le cône par un plan passant par la droite (OA) et on obtient le triangle OAB suivant :



D'après le théorème de Thalès :

$$MM' = \frac{rx}{h}$$

donc

$$S(x) = \pi \left(\frac{rx}{h}\right)^2.$$

$$\mathcal{V} = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Soit :

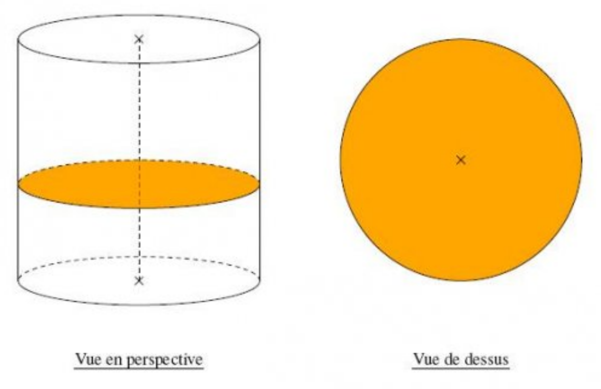
$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

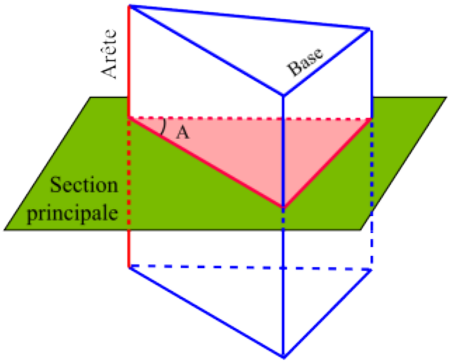
On peut faire de même pour démontrer le volume de la pyramide. □

Propriété 15.19.
La section d’un cylindre de révolution ou d’un prisme droit avec un plan parallèle à la base est une figure identique à la base.

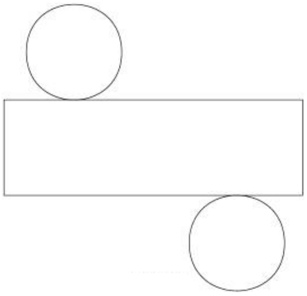
La section d’un prise droit (resp. d’un cylindre de révolution) avec un plan parallèle à une arête (resp. avec la hateur) est un rectangle.

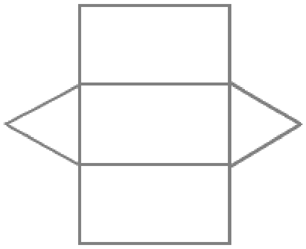
Démonstration. ◊ On peut utiliser le théorème de Thalès dans l’espace. ☐





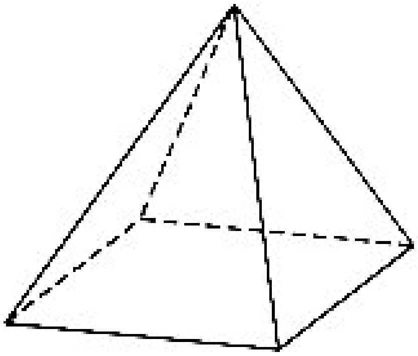
On donne ci-dessous les patrons du cylindre droit et du prisme.





3.3 Pyramide

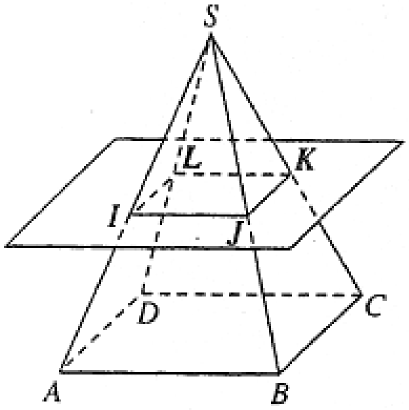
Définition 15.20.
Une *pyramide* est un solide à base qui peut être quelconque (rectangulaire, carré, ou triangulaire) et les faces latérales sont des triangles.



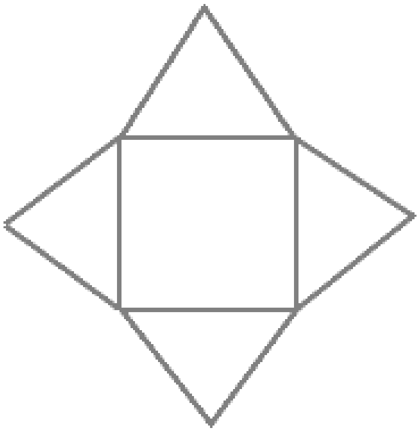
Propriété 15.21.
Si on note c le côté de la base et h la hauteur de la pyramide alors :

$$\mathcal{V} = \frac{B \times h}{3} = \frac{c^2 \times h}{3}$$

Propriété 15.22.
La section d'une pyramide avec un plan parallèle à la base est une réduction de la base de rapport $\frac{IJ}{AB}$.

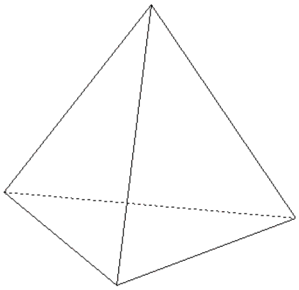


On donne ci-dessous le patron d'une pyramide :



Définition 15.23. *Tétraèdre*

Un *tétraèdre* est une pyramide à base triangulaire.



Propriété 15.24.
Si on note h la hauteur du tétraèdre et B l'aire de sa base alors :

$$\mathcal{V} = \frac{B \times h}{3}.$$

Propriété 15.25. *Section du tétraèdre*
Si $\mathcal{P}$ est parallèle à l'une des faces, la section est un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.

4 Solides de révolution

4.1 Définition

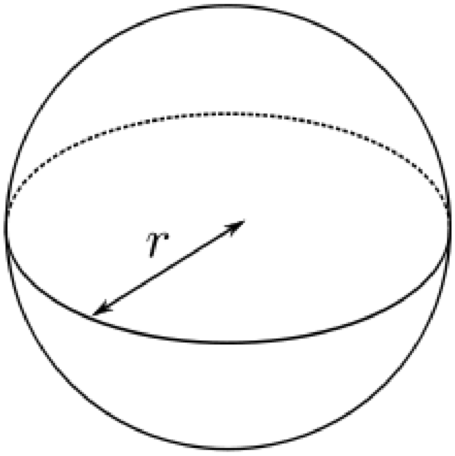
Définition 15.26.

Un *solide de révolution* est engendré par une surface plane fermée tournant autour d'un axe.

4.2 Boule et sphère

Définition 15.27. *Boule et sphère*

Une *boule* est un solide de révolution (on a fait tourner un cercle sur un axe). La *sphère* de centre$O$ et de rayon r est le bord de la boule de même centre et de même rayon. C'est l'ensemble des points qui sont à distance r du point O.



Propriété 15.28.

En muniisant l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $M(x, y, z)$ appartient à la sphère de centre $A(x_A, y_A, z_A)$ et de rayon R si et seulement si :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2.$$

Propriété 15.29.

Le volume d'une sphère de rayon R est :

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

L'aire d'une sphère de rayon R est :

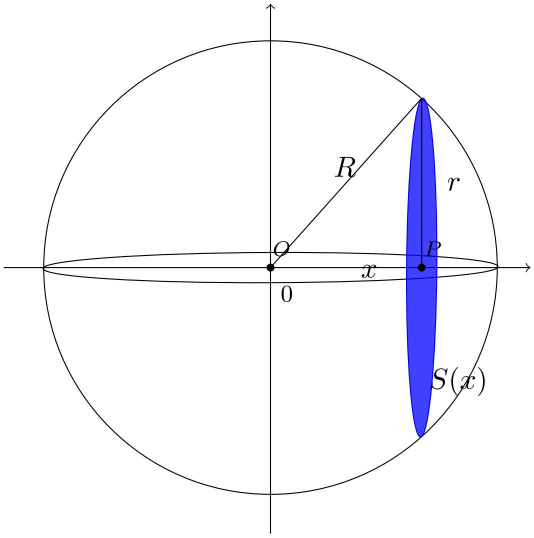
$$\mathcal{A} = 4\pi R^2.$$

Remarque 15.30.

La formule du volume peut se démontrer de multiples façons selon le niveau : au collège en admettant le principe de Cavalieri, au lycée par une intégrale simple en supposant que le volume puisse s'obtenir en intégrant une surface le long d'un segment, et en BTS à l'aide d'intégrale triple.

Pour l'aire on peut tenter de justifier le fait qu'il suffise de dériver le volume (en supposant l'aire comme la limite d'un volume lorsque la hauteur tend vers 0). Une démonstration plus rigoureuse est possible en BTS grâce aux coordonnées sphériques et à une intégrale double.

◊ *Une démonstration proposée en TS.*



Avec le théorème de Pythagore, on peut affirmer que le rayon du disque d'intersection est : $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. D'où :

$$\mathcal{V} = \int_{-R}^{R} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left(\pi R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

□

◊ *Une démonstration proposée en BTS.* On rappelle les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Or : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = R^2 \times |\sin\varphi|\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ (R^2 est le déterminant de la matrice jacobienne). Si on note $\mathcal{S}$ la sphère :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^3}{3}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2R^3}{3}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

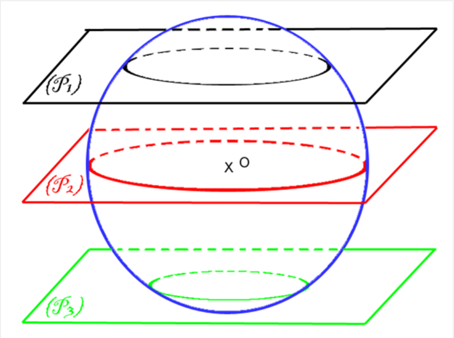
et pour l'aire, R ne varie pas :

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 2R^2\,\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2.$$

□

Propriété 15.31.
L'intersection d'une sphère et d'un plan est soit :

- vide ;
- un point (on dit alors que le plan est tangent à la sphère) ;
- un cercle.



Démonstration. ◊

On peut toujours se ramener à un repère où l'équation du plan est $z = 0$. L'équation de la sphère dans ce repère est alors :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 4^2.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 - z_0^2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors trois cas :

- $|R| < |z_0|$: pas de solution, l'intersection est vide.
- $|R| > |z_0|$: c'est exactement l'équation d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $\sqrt{R^2 - z_0^2}$ dans le plan $z = 0$.
- $|R| = |z_0|$: $S = \{(x_0, y_0, 0)\}$, l'intersection est un point.

☐

Exercice 15.31.
Déterminer l'intersection de $\mathcal{P} : x + y - 2z = 9 = 0$ avec la sphère de centre $(6, 5, 4)$ et de rayon 6.

◊ *Solutions.* On calcule la distance de Ω, centre de la sphère au plan $\mathcal{P}$:

$$d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|6+5-2\times 4-9|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 6.$$

L'intersection est un cercle, de centre $M(x_M, y_M, z_M)$. Soit $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-2\end{smallmatrix}\right)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$. On a :

$$\overrightarrow{\Omega M} // \vec{n} \Leftrightarrow C \begin{cases} x_M = 6+\lambda \\ y_M = 5+\lambda \\ z_M = 4-2\lambda \end{cases}$$

et

$$\Omega M^2 = 6 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2 = 6 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

donc $\lambda = \pm 1$. On a alors $M(7,6,2)$ ou $M(5,4,6)$. Puisque $M \in \mathcal{P}$, on doit avoir $x_M + y_M - 2z_M = 9$ donc :

$$M(7,6,2) \quad \text{convient.}$$

Pour avoir le rayon du disque, on utilise Pythagore :

$$r'^2 = 36 - 6 = 30 \Rightarrow r' = \sqrt{30}.$$

On en conclut que :

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_{\Omega,6} = \mathcal{C}_{(7,6,2),\sqrt{30}}.$$

□

5 Solides de Platon

Définition 15.32. *Solide de Platon*

Un *solide de Platon* est un polyèdre régulier, c'est-à-dire inscriptible dans une sphère et toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques.

Propriété 15.33.
Chaque solide de Platon vérifie la formule d'Euler :

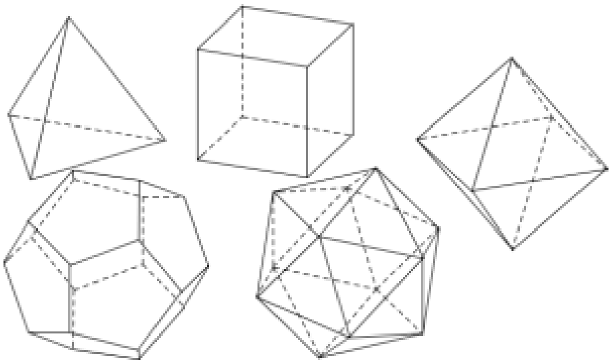
$$F + S = A + 2$$

avec F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets.

Theoreme 15.34.
Il y a 5 solides de Platon :

1. l'icosaèdre qui est composé de 20 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 12 sommets et 30 arêtes ;
2. le dodécaèdre qui est composé de 12 faces (qui sont des pentagones réguliers), 20 sommets et 30 arêtes ;
3. l'octaèdre qui est composé de 8 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 6 sommets et 12 arêtes ;
4. le cube qui est composé de 6 faces (qui sont des carrés), 8 sommets et 12 arêtes ;

5. le tétraèdre qui est composé de 4 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 4 sommets et 6 arêtes.



Démonstration. ◊ On montre qu'il y a cinq et seulement cinq solides de Platon. On considère un polyèdre régulier et on note s le nombre de sommets, f le nombre de faces et a le nombre d'arêtes du polyèdre. On note aussi q le nombre de côtés du polygone régulier qui constitue la face du polyèdre et p le nombre de faces qui aboutissent chacun de ses sommets. On a alors : $fq = 2a$ et $sp = 2a$. Il s'agit donc de résoudre :

$$\begin{cases} s - a + f = 2 \\ fq = 2a \\ sp = 2a \end{cases}$$

d'où

$$s = \frac{4q}{2p + 2q - pq}, \quad a = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}, \quad f = \frac{4p}{2p + 2q - pq}.$$

On recherche alors tous les couples d'entiers (p, q) vérifiant $p \geq 3$, $q \geq 3$ et $2p + 2q - pq > 0$ et on en obtient exactement 5 :

$$(3,3),\ (4,3),\ (3,4),\ (5,3),\ (3,5),$$

desquels on déduit les triples (s, a, f) correspondants :

$$(4,6,4),\ (6,12,8),\ (8,12,6),\ (12,30,20),\ (20,30,12).$$

□