CBMaths

CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n$^{\text{o}}$ 17
Produit scalaire dans le plan. Applications.

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 19 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Première/Terminale S

Prérequis

Géométrie vectorielle

Références

– P. Brachet, *Produit scalaire : Resumé de cours et méthodes*. URL : http://www.xm1math.net/premiere_s/prem_s_chap5_cours.pdf.
– A. Liétard, *Produit scalaire*. http://maths1s.chez.com/1S/produitscalaire.pdf.
– M. Cuaz, *Produit scalaire*. URL : http://mathematiques.lfsl.free.fr/IMG/pdf/ProduitscalaireRESUM pdf.
– C. Rossignol, *Produit sclaaire dans l'Espace*. Année scolaire 2014/2015. http://www.ac-grenoble.fr/lycee/vincent.indy/IMG/pdf/produit_scalaire.pdf.

Plan de la leçon

1 Définition dans le plan

Définition 17.1. *Produit scalaire*

On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.\right]$$

Remarque 17.2.

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Theoreme 17.3.

Si $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormée (c'est-à-dire $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormale) et si $\vec{u}=(x,y)$ et $\vec{v}=(x',y')$ alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'.$$

◊ *Démonstration du théorème 17.3.* On a : $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',y+y')$ et donc :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2.$$

D'où :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[(x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right] = xx'+yy'.$$

□

Exemple 17.4.

Soit $\vec{u}=(3,-1)$ et $\vec{v}=(2,6)$ alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 2+(-1)\times 6 = 6-6 = 0.$$

On dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 Propriétés

Propriétés 17.5.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{0}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{0}=0$
3. Pour tout réel k, $k\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$
4. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
6. $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ (carré de la longueur du vecteur $\vec{u}$)
7. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ (cela signifie que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$)
8. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
9. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

◊ *Démonstration des propriétés 17.5-1, 17.5-3 et 17.5-4.* 1. D'après la définition du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] = \left[\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right] = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

3. On se donne un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et trois vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3)$. On utilise la formule du théorème 17.3 :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3 = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$

4. De même,

$$\begin{aligned}(k\vec{u}) \cdot \vec{v} &= kx_1x_2 + ky_1y_2 = kx_2x_1 + ky_2y_1 = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) \\ &= kx_1x_2 + ky_1y_2 = k(x_1x_2 + y_1y_2) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}).\end{aligned}$$

□

Propriété 17.6.
Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque 17.7.
Si on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

3 Autres expressions du produit scalaire

Theoreme 17.8.
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Propriété 17.9.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls *colinéaires* :

1. S'ils ont même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
2. S'ils ont sens contraire alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exemple 17.10.
Si $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$ et $\|\vec{u}\| = 2$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 = 6$.

FIGURE 1 – Projection orthogonale du vecteur v sur une droite horizontale

Propriété 17.11.
Etant donné deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Si on note $p(\overrightarrow{v})$, la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur une droite portant $\overrightarrow{u}$ alors on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot p(\overrightarrow{v}).$$

Exemple 17.12.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$ car le projeté orthogonale de $\overrightarrow{AO}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.
- Les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sur (AD), on obtient à chaque fois $\overrightarrow{AD}$. Donc tous ces produits scalaires sont égaux à $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 3 = 9$.

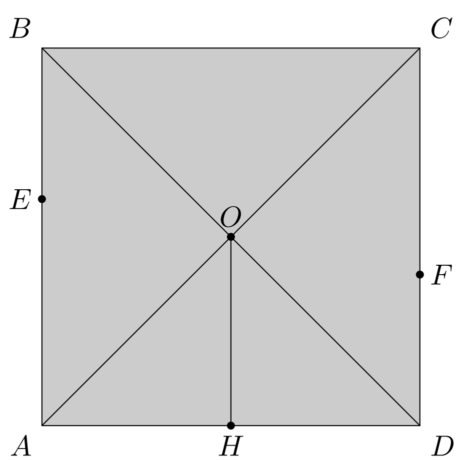


FIGURE 2 – Figure de l'exemple 17.12

Démonstration. $\diamondsuit$ On part du principe que l'on ait démontré :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\| - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

1. Supposons que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$. On pose $\vec{\imath} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Soit $\vec{\jmath}$ le vecteur tel que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$. Ainsi, nous avons ainsi construit une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormale directe. Dans cette base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a, en notant $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$:

$$\vec{u}(\|\vec{u}\|, 0)\ ;\ \vec{v}(\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|, \sin\theta)\ ;\ \vec{v'}(\|\vec{v}\|\cos\theta, 0)$$

   où l'on note $\vec{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v'} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

   D'où les formules des propriétés précédemment citées.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\theta = (\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\cos\theta = 1$.

□

4 Produit scalaire dans l'Espace

4.1 Extension de la définition à l'Espace

Définition 17.13.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'Espace. Il existe trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe toujours un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.

On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'Espace le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarques 17.14.

1. On a alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right].$$

   Cette égalité est bien *indépendante* du plan $\mathcal{P}$ choisi.
2. Quitte à se placer dans le plan $\mathcal{P}$, les différentes expressions du produit scalaire (sauf l'expression dans un repère du plan) des sections précédentes restent valables.
3. Les règles de calcul sur le produit scalaire (bilinéarité, carré scalaire, identités remarquables) restent les mêmes que dans le plan.

4.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété 17.15.

On se place dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé de l'Espace. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Démonstration. $\diamondsuit$

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2-(x^2+y^2+z^2)-(x'^2+y'^2+z'^2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2+2x'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2+z^2+2zz'+z'^2-x^2-y^2-z^2-x'^2-y'^2-z'^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2xx'+2yy'+2zz'\right] = xx'+yy'+zz'.
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 17.16.

On retrouve en particulier les deux résultats suivants, valables dans un repère orthonormé de l'Espace :

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$.
- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors :

$$AB = \|AB\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

5 Applications

5.1 Vecteur normal à une droite

Définition 17.17.

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite $\mathcal{D}$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{D}$.

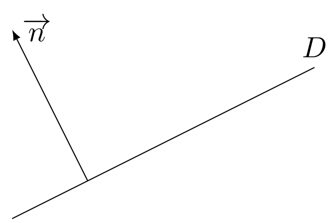


Figure 3 – Le vecteur n est normal à la droite D

Theoreme 17.18.
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = \vec{0}.$$

Theoreme 17.19.
Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ux+vy+w=0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le vecteur $\vec{n}(u,v)$ est normal à $\mathcal{D}$.

5.2 Relations dans un triangle

Theoreme 17.20. *Formule d'Al-Kashi*
Dans un triangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}.$$

◊ *Démonstration du théorème 17.20.* Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}) = c^2 + b^2 + 2b\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$$

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos\widehat{A}$ □

Theoreme 17.21. *Formule des 3 sinus*
Soit ABC un triangle (on note $a = BC$, $b = AC$, $c = BA$), S l'aire de ce triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

◊ *Démonstration du théorème 17.21.* On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

- Dans le cas où $\widehat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin(\pi - \widehat{B}) = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.
- Dans le cas où $\widehat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin\widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$. D'où

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}.$$

□

5.3 Relations et équations trigonométriques

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tels que $(\vec{\imath}, \vec{u}) = b$ et $(\vec{\imath}, \vec{v}) = a$. On a

$$\vec{u} = \cos b \cdot \vec{\imath} + \sin b \cdot \vec{\jmath} = \cos a \cdot \vec{\imath} + \sin a \cdot \vec{\jmath}.$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. De plus, $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{\imath}, \vec{v}) - (\vec{\imath}, \vec{u}) = a - b$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a - b).$$

D'où :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, on obtient :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

À partir de ces formules, on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\
\sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\cos X = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = -\alpha + 2k\pi \end{cases}, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin X = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

5.4 Recherche de lieux géométriques

1. On cherche tout d'abord l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

Propriété 17.22.
Soit I le milieu du segment $[AB]$ (avec $A \neq B$). Pour tout point M, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} \quad \text{(Théorème de la médiane).}$$

Etant donné un réel k, on en déduit que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est un cercle, ou un point ou l'ensemble vide.

Exemple 17.23.
Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$. On utilise le théorème de la médiane :

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 = 20 &\Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{4}{2} = 20 \\
&\Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3
\end{aligned}$$

(car $IM > 0$). L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

2. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par I le milieu de $[AB]$.

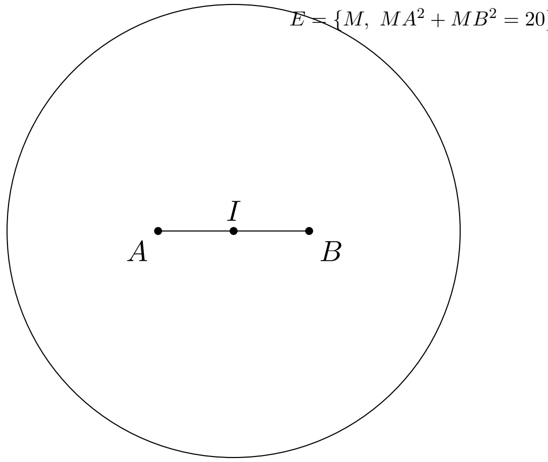


FIGURE 4 – Construction de l'ensemble E de l'excemple 17.23

Exemple 17.24.
Soit A et B deux points tels que $AB = 4$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 12.$$

Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. On a donc :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 12 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 12 \Leftrightarrow MI^2 - 2^2 = 12.$$

On en déduit que $M \in E \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$. E est donc le cercle de centre I et de rayon 4

3. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$. Pour cela, on cherche un point particulier H appartenant à l'ensemble. On a alors $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = k$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \vec{u}.$$

L'ensemble est alors la droite passant par H de vecteur normal $\vec{u}$.

Exemple 17.25.
Soit A et B deux points tels que $AB = 3$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraires et tel que $AH \times AB = 6 \Leftrightarrow AH = \frac{6}{3} = 2$. Ainsi, on a bien $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Dès lors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

L'ensemble E est alors la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

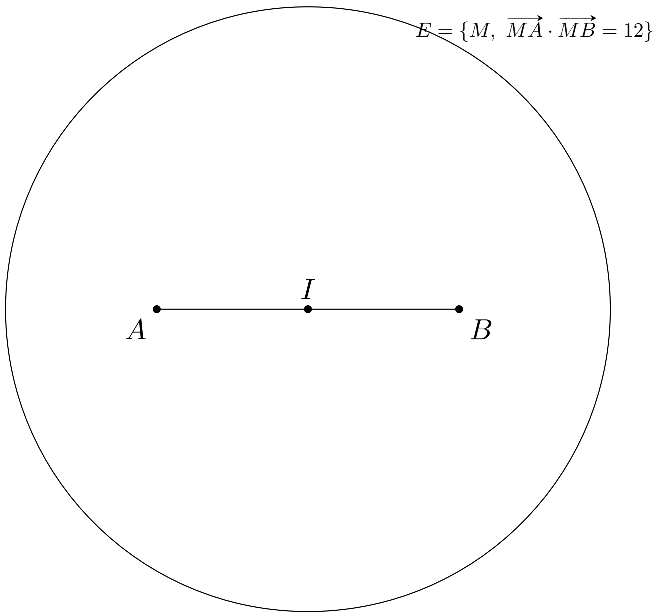


FIGURE 5 – Construction de E de l'exemple 17.24

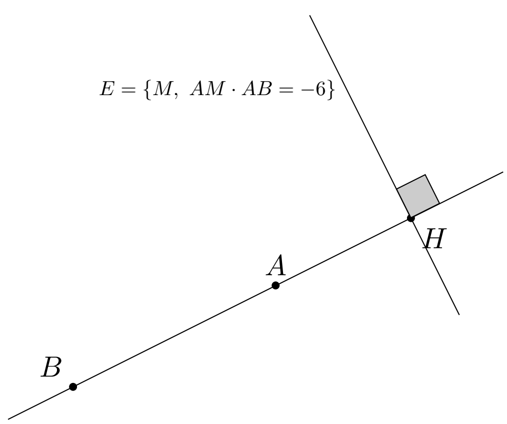


FIGURE 6 – Construction de E de l'exemple 17.25

5.5 Intersection d'une droite et d'un plan

Exercice 17.25.
Déterminer l'intersection éventuelle du plan $\mathcal{P}$ d'équations $2x - y + 3z - 2 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\Diamond$ *Solution.* Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 3 \times 2 = 7 \neq 0$$

donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont bien sécants en un point. Ce point vérifie :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc :

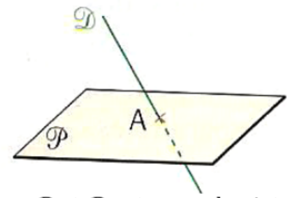
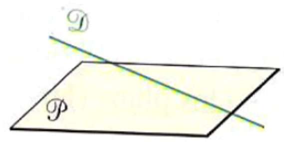
$$\begin{aligned} & 2(-2 + t) - (1 + t) + 3 \times 2t - 2 = 0 \\ & -4 + 2t - 1 - t + 6t - 2 = 0 \\ & 7t = 7 \\ & t = 1 \end{aligned}$$

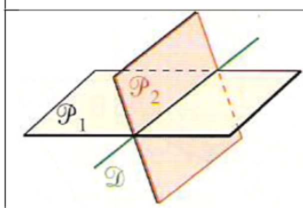
et, par suite :

$$\begin{cases} x = -2 + 1 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 2 \times 1 = 2 \end{cases} \quad .$$

Le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ est $A(-1; 2; 2)$. $\square$

6 Intersection de deux plans

Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$		
sécants	**parallèles**	
 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun	 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun	 $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$		
sécants	**parallèles**	
	confondus	**strictement parallèles** ou **disjoints**
 leur intersection est la droite $\mathcal{D}$	 leur intersection est un plan	 leur intersection est vide

Remarque 17.26.

$\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{P}'$ un plan de vecteur normal $\vec{n'}$;
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires et si A est un *point quelconque* de $\mathcal{P}$:
  - Si $A \in \mathcal{P}'$, les plans $\mathcal{P}$ sont confondus ;
  - Si $A \notin \mathcal{P}'$, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.

Exercice 17.26.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'éqaution $2x - y - 2z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}'$ le plan d'équatin $-x + 4y + z - 3 = 0$. Étudier l'intersection éventuelle de plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

◊ *Solution.* Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}'$ est $\vec{n'}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$. Pour déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, on va considérer une des inconnues (ici z) comme le paramètre :

$$\begin{cases}2x - y - 2z - 1 = 0\\ -x + 4y + z - 3 = 0\\ z = t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x - y = 2t + 1\\ -x + 4y = -t + 3\\ z = t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 2x - 2t - 1\\ -x + 4(2x - 2t - 1) = -t + 3\\ z = t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}7x = 7t + 7\\ y = 2x - 2t - 1\\ z = t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = t + 1\\ y = 2(t+1) - 2t - 1\\ z = t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = t + 1\\ y = 1\\ z = t\end{cases}.$$

□