CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

# LEÇON n$^{\text{o}}$ 19
## Problème de constructions géométriques.

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 19 août 2020

# Préambule

## Niveau de la leçon

Tous niveaux

## Prérequis

Homothétie, théorème de Thalès, construction à la règle et au compas

## Références


– P. Debart, *Constructions géométriques au collège*. URL : http://debart.pagesperso-orange.fr.
– Cojerem, *Des situations pour enseigner la géométrie 1re/4e - Guide méthodologie*. De Boeck, 2000.
– Y. Thomas, *Problèmes de construction*. Primaths. URL : http://primaths.fr/.
– Contributeurs de Wikipédia, *Construction à la règle et au compas*. Wikipedia, l'encyclopédie libre.
– *Épreuve écrite n° 2, Exercice 2. Partie A*. CAPES Externe 2018. http://www4.ac-nancy-metz.fr/capesmath/data/uploads/EP2_2018.pdf .
– Contributeurs de Wikipédia, *Bissectrice*. Wikipedia, l'encyclopédie libre.


# Plan de la leçon

# 1 Programme de construction

**Définition 19.1.** *Programme de construction*

Un *programme de construction* est un texte qui permet d'établir une figure géométrique. On retrouve ce programme de construction au début d'un exercice de géométrie de collège ou de lycée.

Dans cette, leçon, on présente quelques programmes de construction pouvant être vus au collège ou au lycée. On donnera, en plus de la démonstration, une construction détaillée sur le logiciel GeoGebra. Tout ce qui est dans un cadre bleu est à taper sur la barre de saisie.

# 2 Construction à la règle et au compas (RC)

## 2.1 Introduction

La construction à la règle et au compas consiste à tracer des figures uniquement avec les deux outils de traçage géométrique, la règle et le compas.

- La règle est un outil de traçage qui permet de tracer un trait (généralement pour relier deux points).
- Le compas est un outil de traçage qui permet de tracer des cercles à partir de son centre (pointe) et de son rayon (distance pointe-crayon).

Cette méthode de construction est orignaire des écrits d'Euclide : les Éléments. Euler assure (avec un système d'axiomes)

- qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés
- qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné.

Dans toute cette partie, l'abréviation $RC$ désigne ≪ à la règle et au compas ≫.

## 2.2 Quelques constructions RC suggérées par le sujet de l'épreuve 2 Partie A du CAPES Externe 2018

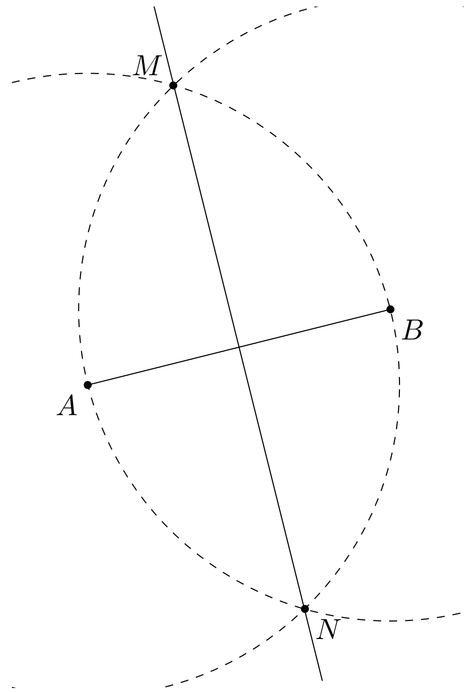
Le sujet de l'épreuve 2 du CAPES Externe 2018 consacre une partie A de l'exercice 2 sur les ≪ constructions à la règle et au compas ≫. On y trouve quelques constructions intéressante.

**Proposition 19.2.**
Soit $A$ et $B$ deux points distincts constructibles $RC$. La médiatrice du segment $[AB]$ est constructible $RC$.

♢ *Démonstration.* Soit $A$ et $B$ deux points distincts constructible $RC$. On pointe le compas en $A$ et on met le crayon en $B$ pour tracer le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre $A$ et de rayon $AB$. Tous les points $P$ de ce cercle sont tels que $AP = AB$.

On pointe le compas en $B$ et on met le crayon en $A$ pour tracer le cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre $B$ et de rayon $AB$. Tous les points $R$ de ce cercle sont tels que $BR = AB$.

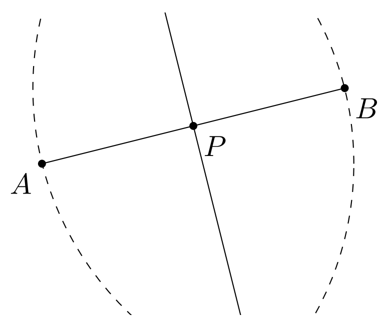
Ainsi les deux points ($M$ et $N$) intersections des cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont tels que $AM = AB = MB$ et $AN = AB = NB$. Ils appartiennent bien à la médiatrice du segment $[AB]$. Ainsi, on utilise la règle pour tracer la droite $(MN)$ qui est donc la médiatrice du segment $[AB]$.




□

**Conséquence 19.3.**
Soit $A$ et $B$ deux points distincts constructibles $RC$. Le milieu du segment $[AB]$ est constructible $RC$.

♢ *Démonstration.* Dans la démonstration précédente, l'intersection de la droite $(MN)$ avec le segment $[AB]$ est le milieu $P$ du segment $[AB]$ car $P \in [AB]$ et $P$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ donc $AP = PB$.



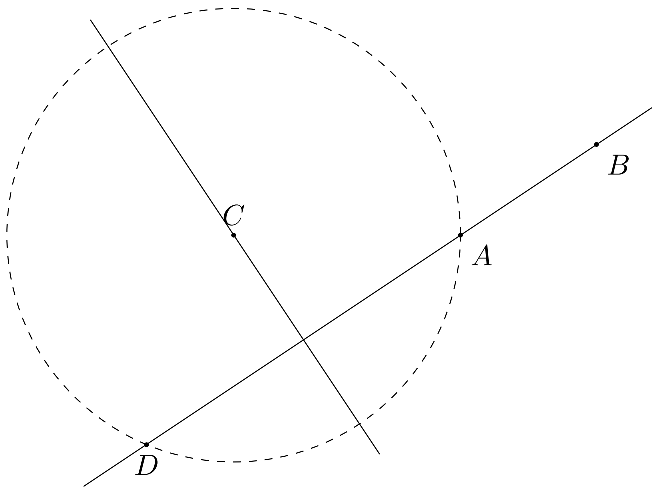

□

**Proposition 19.4.**
Soit $A$, $B$ et $C$ trois points distincts constructibles $RC$ avec $A \neq B$. La droite perpendiculaire à $(AB)$ passant par $C$ est constructible $RC$.

◊ *Démonstration.* Soit $A$, $B$ et $C$ trois points distincts constructibles $RC$ avec $A \neq B$. On trace à la règle la droite $(d) = (AB)$ puis on trace le cercle de centre $C$ et de rayon[1] $AC$.

Ce cercle intersecte la droite $(d)$ en un point $D$. Il suffit ensuite de tracer la médiatrice du segment $[AD]$. Cette médiatrice passe par le point $C$ car $D$ appartient au cercle de centre $A$ et de rayon $AC$, ainsi $CD = CA$.

Comme la médiatrice est une droite perpendiculaire au segment $[DA]$, elle est aussi perpendiculaire à la droite $(AB)$.




□

**Proposition 19.5.**
La droite parallèle à $(AB)$ passant par $C$ est constructible $RC$.

◊ *Démonstration.* Soit $A$, $B$ et $C$ trois points distincts constructibles $RC$ avec $A \neq B$.

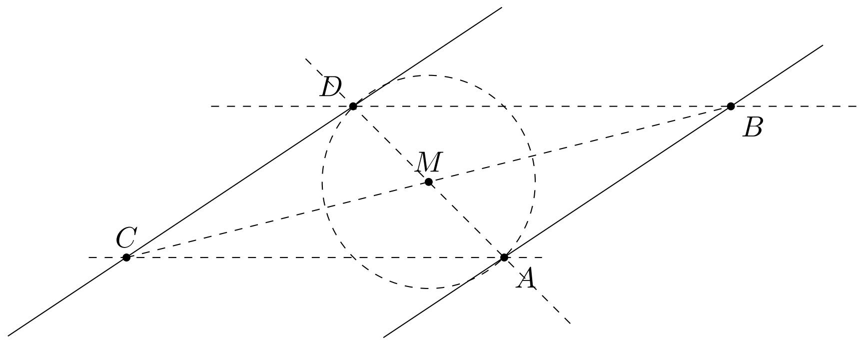
Si $D$ appartient à la droite parallèle à $(AB)$ passant par $C$ alors $ABDC$ est un parallélogramme. En effet, si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme et ainsi $(AB)$ parallèle à $(CD)$.

On peut utiliser la propriété des diagonales du parallélogramme : « *si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme* ». On place ainsi le point $O$ milieu du segment $[BC]$ (avec les méthodes préconisées plus en haut).

On trace ensuite la droite $(AM)$ puis le cercle de centre $M$ et de rayon $AM$. Il intersecte la droite $(AM)$ en un point $D$. On a ainsi, $M$ milieu du segment $[AD]$ et $ABDC$ est un parallélogramme.

Les droites $(CD)$ et $(AB)$ sont parallèles et ainsi la droite $(CD)$ est la droite recherchée.

1. On peut aussi tracer le cercle de centre $C$ et de rayon $BC$. Si c'est ainsi, il faudra remplacer le point $A$ par le point $B$ dans le texte qui suit.




$\square$

**Proposition 19.6.**
Soit $A$, $B$ et $C$ trois points distincts constructibles $RC$ avec $A \neq B$. Les bissectrices de ces deux droites sont constructibles $RC$.

Pour justifier la construction $RC$ de la bissectrice, on aura besoin du théorème de la bissectrice.

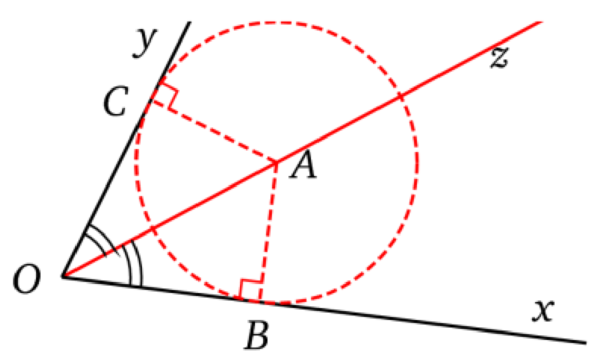
**Lemme 19.7.** *Théorème de la bissectrice*
Soit $(d)$ et $(d')$ deux droites s'intersectant en $O$. On note $\widehat{xOy}$ l'angle formé par les deux demi-droites d'origine $O$ et de direction la droite $(d)$ (resp. la droite $(d')$). $M$ appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$ si et seulement si $M$ est à égale distance des côtés de cet angle.

◊ *Démonstration du lemme 19.7.* $(\Rightarrow)$ On note $[Oz)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$. $A$ est un point de $[Oz)$. Soient $B$ et $C$ les projetés orthogonaux de $A$ respectivement sur $[Ox)$ et sur $[Oy)$.

- On sait que la distance de $A$ à $[Ox)$ est $AB$ ; de même la distance de $A$ à $[Oy)$ est $AC$.
- Par hypothèse, $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \alpha$.
- Les relations trigonométriques dans les triangles rectangles $OAC$ et $OAB$ donennt :

$$AB = OA \times \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad AC = OA \times \sin(\alpha)$$

donc $AB = AC$.



($\Leftarrow$) On considère $A$ sur la droite équidistante des deux côtés de l'angle $\widehat{xOy}$, $B$ et $C$ les projetés orthogonaux du point $A$ respectivement sur $[Ox)$ et sur $[Oy)$. Si $A$ est à la même distance des côtés de l'angle $\widehat{xOy}$ alors $AB = AC$.
Dans le triangle $ABO$ rectangle en $B$, on a la relation trigonométrique : $AB = OA\sin(\widehat{xOz})$. Dans le triangle $ACO$ rectangle en $C$, on a aussi le même type de relation trigonométrique : $AC = OA\sin(\widehat{yOz})$. Comme $AB = AC$, on a alors :

$$OA\sin(\widehat{xOz}) = OA\sin(\widehat{yOz}) \Leftrightarrow \sin(\widehat{xOz}) = \sin(\widehat{yOz}).$$

Or les angles $\widehat{xOz}$ et $\widehat{yOZ}$ sont des angles aigus donc :

$$\sin(\widehat{xOz}) = \sin(\widehat{yOz}) \Leftrightarrow \widehat{xOz} = \widehat{yOz}.$$

Ainsi, la demi-droite $[Oz)$ est une bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

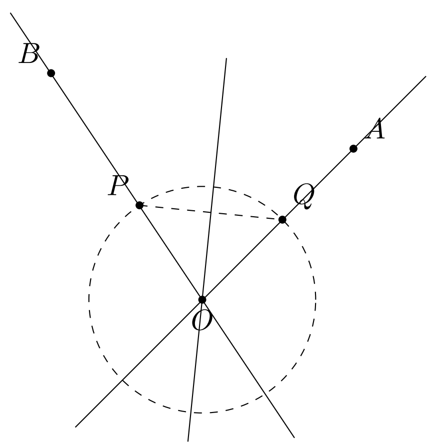
□

Avec ce lemme, on peut justifier la construction $RC$ de la bissectrice :

◊ *Démonstration de la propositoin 19.6.* On considère $O$, $A$ et $B$ trois points non alignés. On veut tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Pour cela, on pointe le compas en $O$ et on prend un écartement quelconque. On trace un arc de cercle de centre $O$ parcourant les deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$.

Soit $P$ (resp. $Q$) le point d'intersection de cet arc de cercle avec la demi-droite $[Ox)$ (resp. $[Oy)$). On trace ensuite la médiatrice du segment $[PQ]$ qui constitue la bissectice de l'angle $\widehat{AOB}$ (la justification du fait que la médiatrice du segment $[PQ]$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ se trouve dans la démonstration du lemme 19.7).




□

## 2.3 Construction d'un dodécagone *RC*

**Exercice 19.7.**

Le but de cet exercice de tracer un dodécagone avec une règle et un compas.

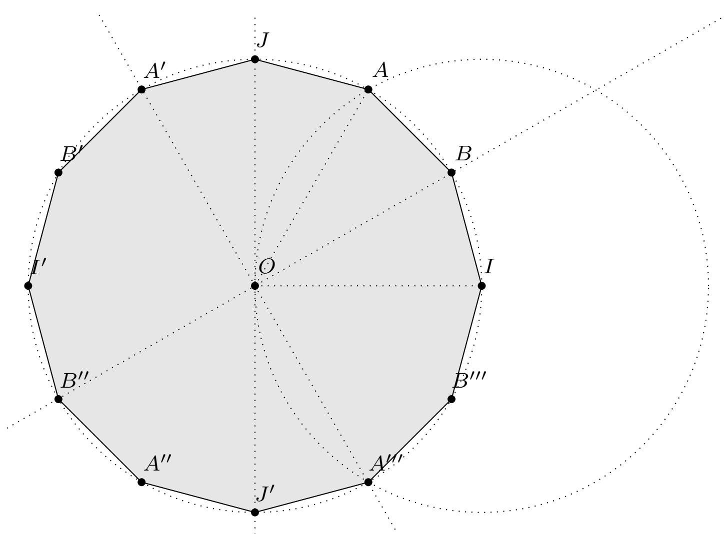
1. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon $OI = 3$.
2. Tracer le triangle équilatéral $OIA$.
3. Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{AOI}$, elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point $B$.

À ce stade, on peut tracer le dodécagone en reportant la longueur $AB$ tout au long du cercle et ainsi trouver les sommets de proche en proche.

◊ *Construction de GeoGebra.*

```
O = (0,0)
I = (3,0)
Cercle[O,I]
Cercle[I,O]
A = Intersection[c,d,1]
Segment[O,A]
Segment[O,I]
Bissectrice[a,b]
SoitVisibleDansVue[f,1,false]
B = Intersection[c,e,2]
Perpendiculaire[O,b]
J = Intersection[c,g,2]
SoitVisibleDansVue[f,1,false]
A' = Symétrie[A,g]
B' = Symétrie[B,g]
I' = Symétrie[I,g]
A'' = Symétrie[A,O]
B'' = Symétrie[B,O]
J' = Symétrie[J,O]
A''' = Symétrie[A,b]
B''' = Symétrie[B,b]
```

□




L'aire du dodécagone permet d'approximer $\pi$.

◊ *Approximation de $\pi$ avec l'aire du dodécagone.* On remarque que le triangle $OBB''$ est un triangle équilatéral car $OB = OB'''$ et $\widehat{BOB'''} = 60°$. Ainsi, $BB''' = 1$. La hauteur $BK$ du triangle

$OAB$ est égale à $\frac{1}{3}$ et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{4}$. Le dodécagone a donc une aire égale à 3. Elle est inférieure à l'aire du cercle $\mathcal{C}$ d'où $3 < \pi$. On admettra que :

$$OHH = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

En choisissant $OP = \frac{1}{\cos\pi/12} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, on construit un dodécagone tangent extérieurement au cercle $\mathcal{C}$ d'aire 3, d'où $OI^2 \simeq 3,22$.

Ainsi, $3 < \pi < 3,22$. □

## 3 Un œuf

Cette activité peut être réalisée en classe de troisième.

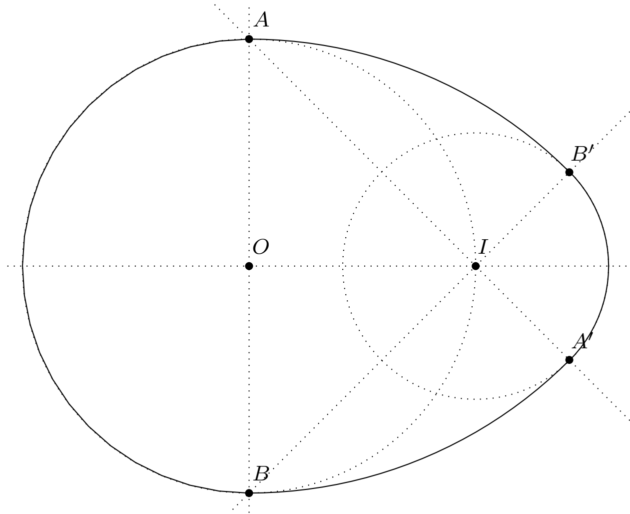
**Exercice 19.7.**

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon 3.
2. Soit $I$ un point du cercle $\mathcal{C}$, tracer un $\mathcal{C}'$ de centre $I$ et de rayon $6-3\sqrt{2}$.
3. Placer $A$ et $B$ tels que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ perpendiculaire à $(OI)$.
4. Tracer les droites $(AI)$ et $(BI)$.
5. Soit $A'$ l'intersection de $(BI)$ et du cercle $\mathcal{C}'$ tel que $A'$ n'appartient pas au segment $[BI]$.
6. Soit $B'$ l'intersection de $(AI)$ au cercle $\mathcal{C}'$ tel que $B'$ n'appartient pas au segment $[AI]$.
7. Tracer les arcs de cercle suivants :
   a) l'arc de cercle de centre $A$ passant par $B$ et $B'$ ;
   b) l'arc de cercle de centre$B$ passant par $A$ et $A'$ ;
   c) l'arc de cercle de centre $I$ passant par $A'$ et $B'$ ;
   d) l'arc de cercle de centre $O$ passant par $A$ et $B$.

◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
O=(0,0)
Cercle[O,3]
I = Point(c)
Cercle[I,6-3*sqrt(2)]
Droite[O,I]
Perpendiculaire[O,a]
A = Intersection[c,b,2]
B = Intersection[c,b,1]
Droite[A,I]
Droite[B,I]
A’ = Intersection[d,e,2]
B’ = Intersection[d,f,2]
ArcCercle[B,B’,A]
ArcCercle[I,B’,A’]
ArcCercle[A,B,A’]
ArcCercle[O,B,A]
```

□




## 4 Triangle d'or et pentagone

La construction du pentagone suivante est due à Euclide. L'élément de base de la construction est un triangle d'or, c'est-à-dire un triangle isocèle dont les angles avec la base sont double de l'angle au sommet.

### 4.1 Construction du triangle d'or

Soient $A$ et $C$ deux points du plan.

**1.** Placer $I$ le milieu de $[AC]$.

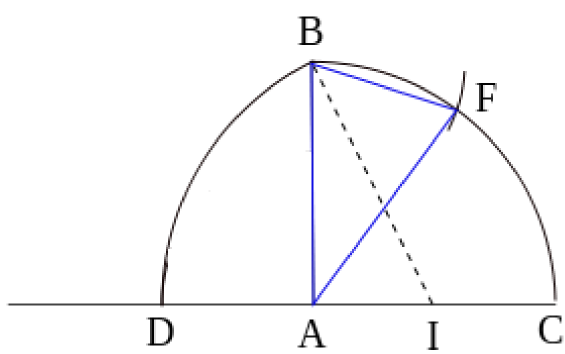
**2.** Tracer la droite $(\Delta)$ perpendiculaire à $(AC)$ passant par $A$. Construire le point $B$ sur $(\Delta)$ tel que $AC = AB$.

**3.** Placer le point $D$ sur $(AC)$ tel que $IB = ID$.

**4.** Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{CB}$ de centre $A$.

**5.** Placer le point $F$ sur l'arc $\overset{\frown}{CB}$ tel que $BF = AD$.

Le triangle $ABF$ est un triangle d'or.

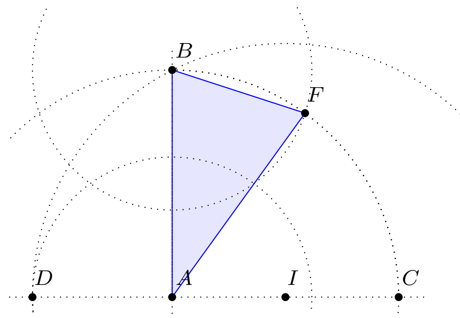



◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
A = (0,0)
C = (3,0)
I = MilieuCentre[A,C]
f = Droite[A,C]
g = Perpendiculaire[A,f]
c = Cercle[A,C]
B = Intersection[c,g,2]
d = Cercle[I,B]
D = Intersection[d,f,1]
h = Segment[A,D]
```

```
e = Cercle[B,h]
F = Intersection[e,c,1]
Polygone[A,B,F]
```

□




◊ *Justification de la construction.* D'après le théorème de Pythagore :

$$IB = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

$$AD = BF = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$$

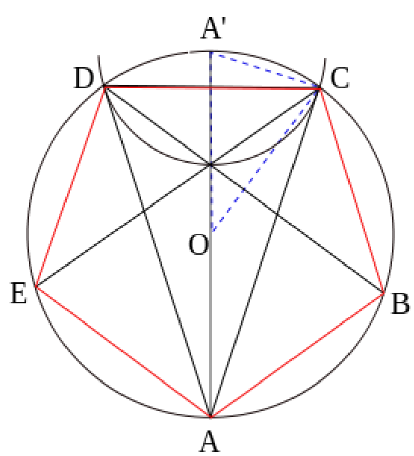
où $\varphi$ est le nombre d'or.

Les dimensions du triangle $ABF$ sont donc 1 - 1 - $\frac{1}{\varphi}$. C'est bien un triangle d'or. □

## 4.2 Construction du pentagone

**1.** À partir du triangle $OA'C$, construire le triangle d'or $CDA$ grâce à l'arc de cercle de centre $A'$ et de rayon $A'C$.

**2.** Nous avons donc l'un des cotés du pentagone $CD$. Il suffit maintenant de reporter la longueur $CD$ en $C$ (resp. en $D$) pour obtenir les points $B$ (resp. $E$).



## 5 Carré dont les côtés passent par quatre points

Le problème est le suivant : « Soient quatre points $A, B, C, D$ (qu'on suppose deux à deux distincts). Tracer quatre droites passant par chacun des points de telle sorte qu'elles déterminent un carré ».

Pour cela,

1. Construire le point $D_1$ tel que $(DD_1)$ soit perpendiculaire à $(BC)$ et tel que $BC = DD_1$.
2. Tracer la droite $(AD_1)$.
3. Tracer la droite perpendiculaire à $(AD_1)$ passant par $B$. On note $M$ l'intersection de $(AD_1)$ et de la perpendiculaire tracée.
4. Tracer la droite perpendiculaire à $(BM)$ passant par $D$. On note $Q$ l'intersection de $(BM)$ et de la perpendiculaire tracée.
5. Tracer la droite perpendiculaire à $(DQ)$ passant par $C$. On note $P$ l'intersection de $(DQ)$ et de la pependiculaire tracée et $N$ l'intersection de $(AM)$ et de la perpendiculaire tracée.

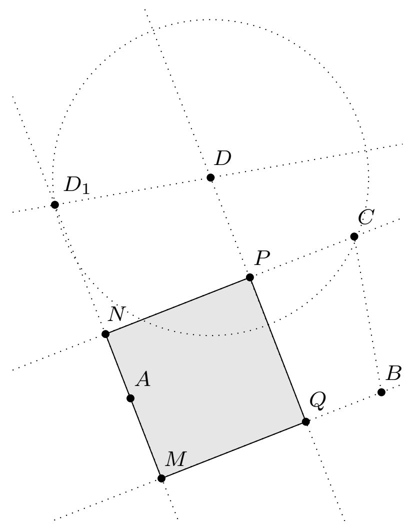
◊ *Construction avec GeoGebra.* On place tout d'abord quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ distincts deux à deux avec l'outil « Nouveau point ».

```
Segment[B,C]
Perpendiculaire[D,a]
Cercle[D,a]
Intersection[b,c]
```

On obtient donc deux nouveaux points. On choisit un de ces deux points (qu'on nommera $D_1$) et on n'affiche pas l'autre point.

```
Droite[A,D_1]
Perpendiculaire[B,d]
M = Intersection{d,e]
Perpendiculaire[D,e]
Q = Intersection{e,f]
Perpendiculaire[C,f]
P = Intersection[f,g]
N = Intersection[g,d]
Polygone[M,N,P,Q]
```

□




◊ *Justification de la construction.* Par construction, $MNPQ$ est un rectangle (trois angles droits). On montre que le rectangle $MNPQ$ a deux côtés consécutifs de même longueur. On note $B'$ le projeté orthogonal de $B$ sur $(NP)$ et $D'$ le projeté orthogonal de $D$ sur $(MN)$.

Les triangles $B'BC$ et $D'DD_1$ ont leurs côtés deux à deux perpendiculaires. L'hypoténuse $[BC]$ est perpendiculaire à $[DD_1]$ avec $BC = DD_1$. Les triangles sont semblables et $BB' = DD'$. Ce qui prouve que deux côtés consécutifs ont même longueur : $MNPQ$ est un carré. □

# 6 Quelques quadratures du carré

**Définition 19.8.**

Soit $\mathcal{F}$ une figure rectiligne donné. On appelle quadrature du carré relatif à $\mathcal{F}$, un carré dont l'aire est égale à l'aire de $\mathcal{F}$.

## 6.1 Une construction dite de Sulbastra

Soit $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer le carré $ADFE$.
2. Tracer la médiatrice de $[CF]$. Elle coupe $[CF]$ en $H$ et $[EB]$ en $G$.
3. Tracer le rectangle $DFIJ$ tel que $DF = HG$ et $FI = HC$.
4. Tracer le carré $AGKJ$.
5. Tracer le cercle de centre $J$ passant par $A$ et coupe $[DH]$ en $L$.

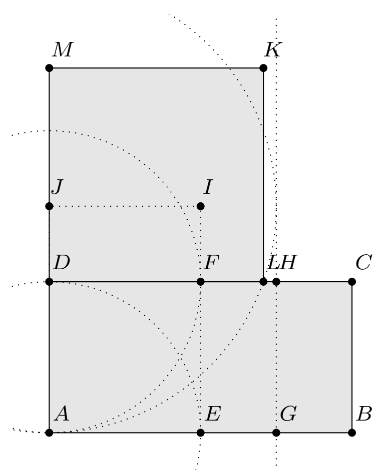
$[DL]$ est le côté du carré qui a même aire que le rectangle $ABCD$.

◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Polygone[A,B,C,D]
Cercle[A,D]
```

```
Intersection[e,a]
Cercle[D,A]
Intersection[f,c]
Segment[E,F]
Médiatrice[C,F]
G = Intersection[a,h]
H = Intersection[c,h]
J = (0,3)
I = (2,3)
Segment[I,J]
Segment[J,D]
Segment[F,I]
Cercle[J,A]
L = Intersection[p,c]
Polygone[D,L,4]
```

□




## 6.2 La construction d'Euclide

On donne une interprétation moderne de la construction d'Euclide pour la quadrature d'un carré. On se donne $ABCD$ un rectangle.

**1.** Tracer la droite $(AB)$.

**2.** Tracer un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $B$ et de rayon $[BC]$. Il intersecte la droite $(AB)$ en $E$ tel que $E$ n'appartient pas au segment $[AB]$.

**3.** Tracer un cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[AE]$.

**4.** Tracer la droite $(BC)$. Elle intersecte le cercle $\mathcal{C}_2$ en $T$.

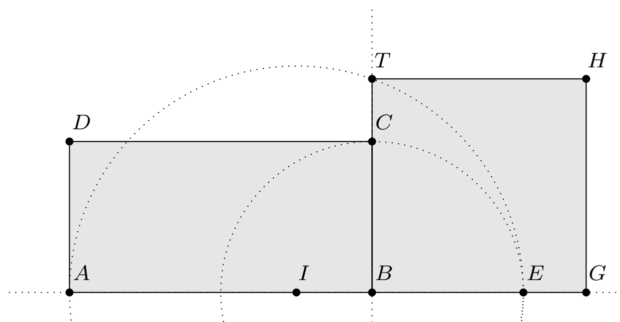
Ainsi $BT$ est le côté du carré qui a même aire que le rectangle $ABCD$.

◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Polygone[A,B,C,D]
```

```
Droite[A,B]
Cercle[B,C]
E = Intersection[f,e,2]
I = MilieuCentre[A,E]
Cercle[I,A]
Droite[B,C]
T = Intersection[g,h,2]
Polygone[T,B,4]
```

□




## 6.3 Quadrature du carré de Wallis

Soit $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $A$ et de rayon $[AD]$. Il intersecte $[AB]$ en $D'$.
2. Tracer la médiatrice de $[D'B]$. Soit $O$ un point de cette médiatrice.
3. Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $O$ qui passe par $D'$. $B$ appartient aussi au cercle tracé car $OD' = OB$ ($O$ est sur la médiatrice de $[D'B]$).
4. Tracer la tangente au cercle $\mathcal{C}_2$ passant par $A$.

*Démonstration.* ◊ La puissance du point $A$ par rapport au cercle est :

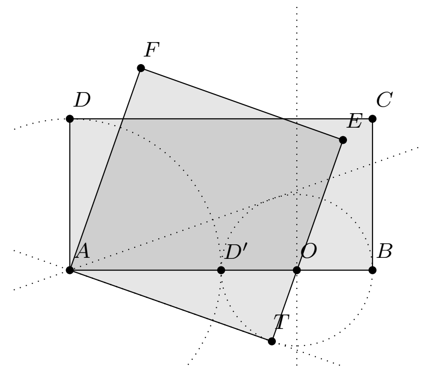
$$AT^2 = AD' \times AB = AD \times AB$$

D'où le carré $ATUV$ a même aire que le rectangle $ABCD$. □

◊ *Construction sur GeoGebra.*

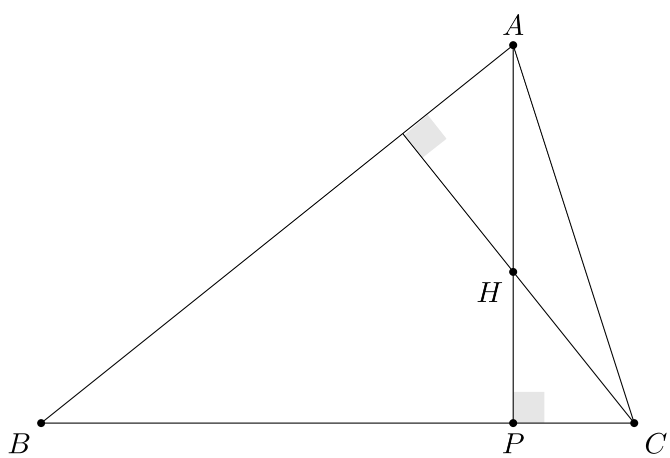
```
A = (0,0)
B= (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Cercle[A,D]
D' = Intersection[e,a]
Médiatrice[D',B]
O = Point[f]
Cercle[O,D']
Tangente[A,g]
T = Intersection[g,h]
Polygone[A,T,4]
```

□




## 7 Construction d'un triangle selon certaines conditions

**Exercice 19.8.**
Construire à la règle graduée et au compas un triangle $ABC$ tel que, si on appelle $H$ l'orthocentre et $P$ le pied de la hauteur issue de $A$, on ait : $AB = 8$ cm, $AP = 5$ cm, $H$ est situé sur $[AP]$ et $AH = 3$ cm.




*Solution.* Comme $(AP)$ est la hauteur issue de $A$, alors $ABP$ est rectangle en $P$. On a, de plus : $AP = 5$ cm t $AB = 8$ cm donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BP^2 = BA^2 - AP^2 = 8^2 - 5^2 = \sqrt{39}.$$

Pour construire le point $B$, on peut tracer $AP = 5$ cm ($H \in [AB]$ tel que $AH = 3$ cm) puis une droite perpendiculaire à $(AP)$ passant par $P$. Avec un écartement de 8 cm, on point en $A$ et on fait une marque à l'intersection de la droite perpendiculaire. On a donc construit le point $B$.

Pour construire le point $C$, on peut tracer la perpendiculaire à $(AB)$ passant par $H$ et l'intersection avec la droite $(BC)$ nous donne le lieu du point $C$.

On a donc construire le triangle $ABC$ tel que, si on appelle $H$ l'orthocentre et $P$ le pied de la hauteur issue de $A$, on ait : $AB = 8$ cm, $AP = 5$ cm, $H$ est situé sur $[AP]$ et $AH = 3$ cm. □

# 8 Autres problèmes de construction

## 8.1 Problème 1

Soit $\zeta$ un cercle de centre $O$ ; $I$ est un point du disque ouvert de frontière $\zeta$. Construire les points $P$ et $Q$ de $\zeta$ tels que $I$ soit le milieu du segment $[PQ]$.

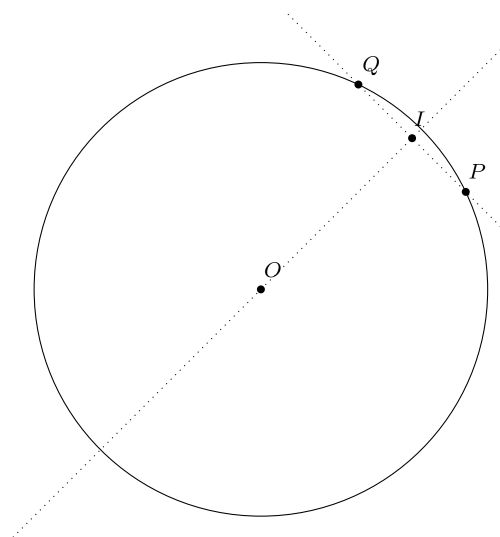
♢ *Observation.* On suppose l'existence de points $P$ et $Q$ de $\zeta$ tels que $I$ soit le milieu du segment $[PQ]$.

$P$ et $Q$ ne sont pas confondus car $I$ n'est pas un point de $\zeta$. $O$ est équidistant de $P$ et $Q$, donc $O$ appartient à la médiatrice $[PQ]$. $I$ étant le milieu de $[PQ]$, la droite $(OI)$ est la médiatrice de $(PQ)$. □

♢ *Construction sur GeoGebra.*

```
O = (0,0)
Cercle[O,3]
I = (2,2)
Droite[O,I]
Perpendiculaire[I,a]
P = Intersection[b,c,1]
Q = Intersection[b,c,2]
```

□



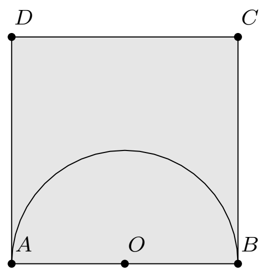

## 8.2 Problème 2

Soient $A$ et $B$ deux points du plan et soit $O$ le milieu du segment $[AB]$. $\Gamma$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$. Construire les points $P$, $Q$, $R$ et $S$ tels que :

– $P$ et $Q$ appartiennent à $(AB)$
– $R$ et $S$ appartiennent à $\Gamma$
– $PQRS$ est un carré.

*Démonstration.* ♢ La difficulté provient du fait que les trois conditions doivent être simultanément satisfaites. L'idée est d'en oublier une dans un premier temps.

On construit aisément un carré ayant deux sommets sur $[AB]$, les deux autres n'appartenant pas nécessairement à $\Gamma$ ; on construit, par exemple, celui de côté $[AB]$ et inclus dans le demi-plan de frontière $(AB)$ contenant $\Gamma$. On note que $\Gamma$ est nécessairement « à l'intérieur » de $ABCD$.




Comment transformer $ABCD$ en un carré vérifiant toutes les conditions imposées ?

Soient $R$ le point d'intersection de la droite $(OC)$ et de $\Gamma$, $S$ le point d'intersection de la droite $(OD)$ et de $\Gamma$. $Q$ et $P$ les projetés orthogonaux respectifs de $R$ et de $S$ sur la droite $(AB)$. Les points $O$, $R$ et $C$ sont alignés, dans cet ordre ; il existe donc une homothétie $h$ de centre $O$ et de rapport $k > 0$ transformant $C$ en $R$.

On a donc : $\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OC}$ ; c'est-à-dire $R = h(C)$.

De plus, on sait :

- $OR = OS$ (car $[OR]$ et $[OS]$ sont des rayons d'un même cercle),
- $OC = OD$ (car les triangles rectangles $BOC$ et $AOD$ sont isométriques et ont respectivement pour hypoténuses $[OC]$ et $[OD]$),
- $O$, $S$, $D$ sont alignés dans le même ordre,

donc $\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OD}$ ; c'est-à-dire $S = h(D)$.

D'autre part, les droites $(PS)$ et $(AD)$ sont parallèles, car toutes deux perpendiculaires à $(AB)$ ; d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA}, \qquad \text{c'est-à-dire } P = h(A)$$

De même on montre :

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OB}, \qquad \text{c'est-à-dire } Q = h(B)$$

On a prouvé que $P$, $Q$, $R$, $S$ sont les images respectives de $A$, $B$, $C$, $D$ par $h$. Comme l'homothétique d'un carré est un carré, $PQRS$ est un carré.

Finalement, on a bien :

- $P$ et $Q$ sont des points de $(AB)$ ;
- $R$ et $S$ sont des points de $\Gamma$ ;
- $PQRS$ est un carré.

$\square$

◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
A = (0,0)
B = (3,0)
C = (3,3)
D = (0,3)
O = MilieuCentre[A,B]
Demi-Cercle[A,B]
Segment[O,C]
```

```
Segment[O,D]
R = Intersection[e,f]
S = Intersection[e,g]
Segment[R,S]
Perpendiculaire[R,h]
Perpendiculaire[S,h]
P = Intersection[j,a]
Q = Intersection[i,a]
Polygone[P,Q,R,S]
```

□