CBMaths

CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n^{o} 20
Problèmes d'alignement, de parallélisme, d'intersection.

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 19 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Tous niveaux

Prérequis

Notions de base de géométrie

Références

– P. Debart, *Montrer un alignement*. URL : http://debart.pagesperso-orange.fr/seconde/montrer_alignement.html.
– Educastream, *Applicaitons du barycentre, alignement de points*. URL : http://www.educastream.com/1ere-applications-du-barycentre-alignement-de-points-video.
– D. Vergès, *Annales BAC, Brevet, BTS*. APMEP. URL : https://www.apmep.fr/~Annales-Bac-Brevet-BT
– Unknown, *Chapitre n^o 6 : « Perpendiculaires et parallèles »*. Collège Lurcat de Sarcelles. URL : http://www.clg-lurcat-sarcelles.ac-versailles.fr/IMG/pdf/6_3_cours_perpendiculaires_paralleles-4.pdf.
– R. Brault & al., *Phare 6^e cycle 3*. Hachette Education, ed 2016.
– G. Julia, *Épreuve sur dossier au CAPES de Mathématiques*. URL : http://gjmaths.pagesperso-orange.fr/epdos.html.
– Y. Thomas, *Problèmes de construction*. Primaths. URL : http://primaths.fr/
– Collectif de professeurs Sesamaths, *Sesamaths, 2nde*. Magnard, 2013.

Plan de la leçon

1 Problèmes d'alignement

1.1 Méthodes pour prouver l'alignement de trois points

Définition 20.1.

On dit que trois points A, B et C sont alignés si le point C appartient à la droite (AB).

On peut démontrer que trois points A, B et C sont alignés par plusieurs manières :

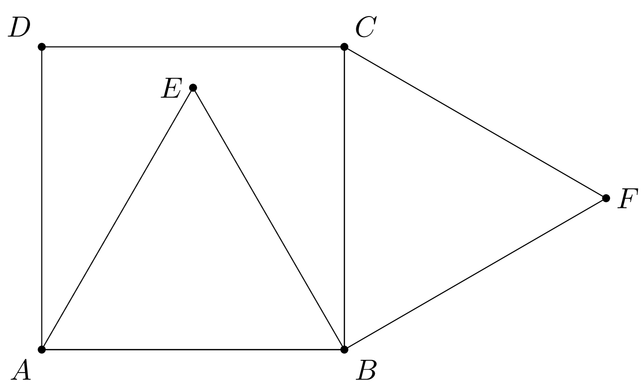
1. Trois points A, B et C sont alignés si les droites (AB) et (AC) sont parallèles.
2. Trois points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
3. Trois points A, B et C sont alignés si l'angle $\widehat{ABC}$ est nul ou plat.
4. Trois points A, B et C sont alignés si si les angles des droites (AB) et (AC) avec une troisième droite (AD) sont les mêmes. Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux, on retrouve le parallélisme des droites (AB) et (AC).
5. Si cet angle est droit, on a le cas suivant. Trois points A, B et C sont alignés si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires à une même troisième.
6. Trois points A, B et C sont alignés s'ils sont les images de trois points alignés par une transformation (isométrie, homothétie, similitude).
7. Si on a $AB + BC = AC$ ((in)égalité triangulaire), le point B appartient au segment $[AC]$.
8. Trois points A, B et C sont alignés si les coordonnées du point C vérifient l'équation de la droite (AB).
9. On peut utiliser le barycentre et les complexes.

1.2 Un problème vu sous plusieurs angles

Exercice 20.1. *Dossier CAPES 2014*

On considère le carré $ABCD$. On place le point E dans le carré $ABCD$ tel que ABE est un triangle équilatéral. On place le point F à l'extérieur du carré $ABCD$ tel que BCF est un triangle équilatéral

Montrer que les points D, E et F sont alignés.



◊

Avec les angles. **1.** On peut remarquer que :

$$\widehat{DEF} = \widehat{DEA} + \widehat{AEB} + \widehat{BEF}.$$

On sait que : DAE est isocèle, son angle $\widehat{DAE} = 30°$ et donc les deux autres, ici $\widehat{DEA}$ valent $75°$.
Les angles du triangle équilatéral AEB valent $60°$ (ici $\widehat{AEB}$).
Le triangle EBF est un triangle rectangle isocèle en B et $\widehat{BEF} = 45°$. Ainsi :

$$\widehat{DEF} = 75° + 60° + 45° = 180°.$$

Ainsi, l'angle $\widehat{DEF}$ est plat et les points D, E et F sont alignés.

2. On peut calculer les mesures des angles $\widehat{CDF}$ t $\widehat{CDE}$. Le triangle isocèle CDF a un angle au sommet de $90° + 60° = 150°$. Les deux autres angles égaux sont de :

$$\frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

D'où $\widehat{CDF} = 15°$.
Le triangle isocèle ADE a un angle au somme $\widehat{DAE}$ de $30°$. Les deux autres angles égaux sont de $75°$. Dans l'angle droit $\widehat{ADC}$, $\widehat{CDF}$ est le complémentaire de $\widehat{ADE}$ d'où : $\widehat{CDE} = 90° - 75° = 15°$.
Les angles $\widehat{CDF}$ et $\widehat{CDE}$ sont égaux, les points D, E et F sont alignés.

□

Géométrie analytique. On se place dans le repère $(A, \widehat{AB}, \widehat{AD})$ les coordonnées des points sont $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

1. On calcule les coordonnées des points E et F. Pour cela, on peut utiliser le théorème de Pythagore en plaçant H le pied de la hauteur du triangle ABE issue de E, H est aussi le milieu du segment $[AB]$ (H appartient à la médiatrice du segment $[AB]$).

$$AE^2 = AH^2 + EH^2 \Leftrightarrow EH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

D'où $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit les coordonnées de $E(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
On peut faire de même pour les coordonnées de F, on trouve $F(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}$.

2. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$:

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} x_F - x_D \\ y_F - y_D \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. On montre que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires :

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} + 1\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

4. Conclusion : les vecteurs sont colinéaires, les points D, E et F sont alignés.

□

1.3 Barycentres

Définition 20.2. *Barycentres de n points*

Si a_1, a_2, …, a_n sont n réels tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \neq 0$ alors le point G tel que :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \tag{1}$$

est appelé *barycentre* des points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2), …, (A_n, a_n).

Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, on dit alors que G est l'*isobarycentre* des points A_1, A_2, …, A_n.

Propriété 20.3.
Si M est un point quelconque et G est le barycentre des points pondérés (A_1, a_i) alors :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}(a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots a_n\overrightarrow{MA_n})$$

L'égalité précédente est appelée *forme réduite du barycentre*.

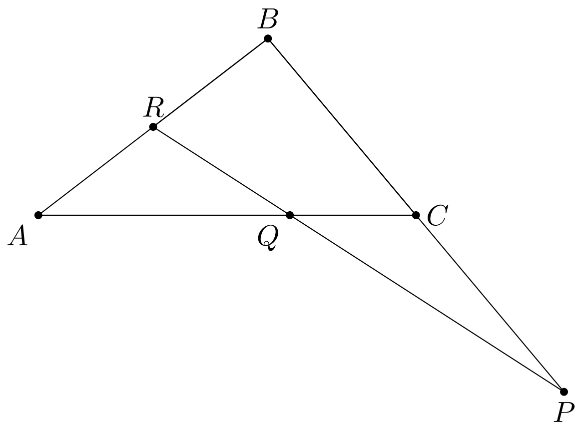
Theoreme 20.4.
Si G est le barycentre de n points pondérés, on peut remplacer p de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients de ces points.

Theoreme 20.5. *Coordonnées du barycentre*
Soit A_1, A_2, …, A_n n points dans l'espace. On note, pour tout $1 \leq i \leq n$, (x_i, y_i, z_i) les coordonnées de A_i. Le barycentre G du système pondéré (A_1, a_1), (A_2, a_2), …, (A_n, a_n) a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_ix_i}{\sum_{i=1}^n a_i},\ y_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_iy_i}{\sum_{i=1}^n a_i},\ z_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_iz_i}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Propriété 20.6.
Si A et B sont deux points distincts, tout barycentre G de (A, a) et de (B, b) avec $a + b \neq 0$ à la droite (AB) est aligné avec A et B. Deux points et leur barycentre sont alignés.

Exemple 20.7.
Soient ABC un triangle, P le symétrique de B par rapport à C, Q est le point défini par $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et R le milieu de $[AB]$. Montrer que les points P, Q et R sont alignés.



Démonstration. $\Diamond$ On peut montrer que Q est le barycentre de P et de R avec des coefficients à déterminer.

P est le symétrique de B par rapport à C donc on a : $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PC}$, ce qui peut s'écrire $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$. Le point P est donc le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, -2)$. On en déduit, d'après la propriété de réduction du barycentre :

$$(1-2)\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} - 2\overrightarrow{QC}$$

c'est-à-dire :

$$-\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} - 2\overrightarrow{QC}$$

ou encore

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}.$$

Par ailleurs, R est le milieu du segment $[AB]$ donc :

$$\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{0}$$

et, d'après la propriété de réduction du barycentre :

$$2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}$$

On a donc en additionnant membre à membre les deux égalités :

$$\overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{QR} = (-\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}) + (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC}.$$

Or $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ ce qui équivaut à $3\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA}$ d'où $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{CQ} - 3\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{0}$ (Q est donc le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 2)$). On en déduit :

$$\overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0}.$$

$\square$

1.4 Nombres complexes et alignement

Propriété 20.8.
Pour démontrer que A, B et C sont alignés, on peut démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0 \mod \pi$$

Exemple 20.9.

Extrait du BAC Nouvelle-Calédoinie 2017 On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
2. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

Démonstration. $\diamondsuit$

1. On a :
$$\frac{z_{n+4}}{z_n} = \frac{\frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^{n+4}}}{\frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}} = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^{n+4}} \times \frac{(1-\mathrm{i})^n}{1+i} = \frac{1}{(1-\mathrm{i})^4}$$
et :
$$(1-\mathrm{i})^4 = 1+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2+4\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4 = 1+4\mathrm{i}-6-4\mathrm{i}+1 = 1-6+1 = -4.$$
D'où :
$$\frac{z_{n+4}}{z_n} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}.$$
2. On doit montrer que $\arg(\frac{z_{\overrightarrow{OA_{n+4}}}}{z_{\overrightarrow{OA_n}}}) = 0 \mod \pi$. Or :
$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OA_{n+4}}}}{z_{\overrightarrow{OA_n}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right) = \arg\left(-\frac{1}{4}\right)$$
et $\arg(x) = 0 \mod \pi$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc :
$$\arg\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right) = \arg\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \mod \pi$$
d'où les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

$\square$

1.5 Dossiers de CAPES

Exercice 20.9. *CAPES 2013*

On souhaite planter des orangers dans un jardin qui dispose de deu fontaines. Pour simplifier l'irrigation, les orangers à planter doivent être alignés avec les deux fontaines. Pour modéliser la situation, on se place dans un repère orthonormé dans lequel les points $A(10;10)$ et $B(87;31)$ désignent les deux fontaines.

1. Un premier jardinier propose de planter un oranger au point $G(30;16)$. Cette proposition convient-elle ? Justifier votre réponse.
2. Un second jardinier propose de planter autant d'orangers que possible en respectant les deux conditions suivantes :
   - chaque oranger est planté sur le segment situé entre les deux fontaines,
   - chaque oranger est planté sur un point dont les deux coordonnées sont entières.

Déterminer le nombre maximal d'orangers qu'il est possible de planter en respectant ces deux conditions et préciser leurs coordonnées dans le repère.

Solution. $\Diamond$

1. On peut déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{31-10}{87-10} = \frac{21}{77} = \frac{3}{11}$$

puis :

$$10 = \frac{3}{11} \times 10 + b \Leftrightarrow b = 10 - \frac{30}{11} = \frac{110-30}{11} = \frac{80}{11}.$$

La droite (AB) a pour équation cartésienne : $y = \frac{3}{11}x + \frac{80}{11}$. On vérifie que $G(30;16)$ appartient ou non à la droite (AB) :

$$\frac{3}{11} \times 30 + \frac{80}{11} = \frac{90+80}{11} = \frac{170}{11} \approx 15,45.$$

Donc : le premier jardinier ne pourra pas planter l'oranger au point $G(30;16)$.

2. On se propose de déterminer tous les points $(x;y)$ tels que x entier et $y = \frac{3}{11}x + \frac{80}{11}$ soit entier ou encore :

$$11y = 3x + 80 \Leftrightarrow 11y - 3x = 80.$$

On a : $\text{PGCD}(3,11) = 1$ donc l'équation diophantienne a une infinité de solutions. On donne la solution particulière de l'équation $11y - 3x = 80$ est :

$$1 = 22 - 21 = 11 \times 2 - 3 \times 7$$

On a alors comme solution particulière de l'équation $11y - 3x = 80$: $x = 7 \times 80 = 560$ et $y = 2 \times 80 = 160$. Ainsi les solutions générales de l'équation diophantienne est :

$$(x,y) = (560 + 11k, 160 + 3k)$$

On cherche les solutions (x,y) tels que $10 < x < 87$ et $10 < y < 31$.

$$\begin{aligned}
560 + 11k > 10 \Leftrightarrow 11k > 10 - 560 \Leftrightarrow 11k > -550 \Leftrightarrow k > -50 \\
560 + 11k < 87 \Leftrightarrow 11k < 87 - 560 \Leftrightarrow 11k < -473 \Leftrightarrow k < -43 \\
160 + 3k > 10 \Leftrightarrow 3k > 10 - 160 \Leftrightarrow 3k > -150 \Leftrightarrow k > -50 \\
160 + 3k < 31 \Leftrightarrow 3k < 31 - 160 \Leftrightarrow 3k < -129 \Leftrightarrow k < -43
\end{aligned}$$

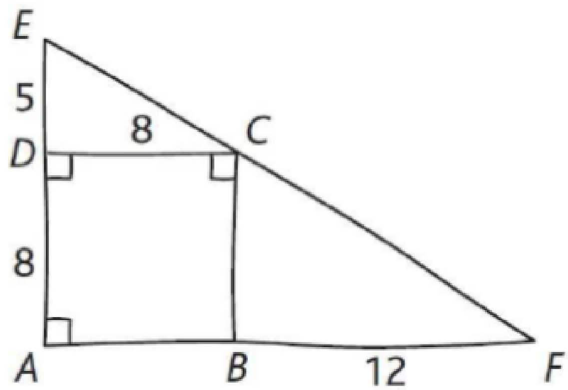
D'où : $-50 < k < -43$ et on obtient les six coordonnées de plantation d'orangers :

k	x	y
-49	21	13
-48	32	16
-47	43	19
-46	54	22
-45	65	25
-44	76	28

On pourra planter des orangers en $(21;13)$, $(32;16)$, $(43;19)$, $(54;22)$, $(65;25)$ et $(76;28)$.

$\square$

Exercice 20.9. *CAPES 2015*
La figure ci-contre est dessinée à main levée. Les points A, D, E et A, B, F sont alignés. Les dimensions sont exprimées en cm.



Les points E, C et F sont-ils alignés ?

Solution. ◊ Dans le triangle rectangle DEC, avec le théorème de Pythagore, on a :

$$EC^2 = DC^2 + DE^2 = 8^2 + 5^2 = 89$$

d'où $EC = \sqrt{89}$.

Dans le triangle rectangle CFB, on a :

$$CF^2 = BF^2 + BC^2 = 12^2 + 8^2 = 208$$

d'où $CF = \sqrt{208}$.

Dans le triangle rectangle FAE, on a :

$$EF^2 = AF^2 + AE^2 = 20^2 + 13^2 = 569$$

d'où $EF = \sqrt{569}$.

Pour montrer que les points E, C et F sont alignés, il faut montrer que le point C vérifie l'inégalité triangulaire sur $[EF]$, c'est-à-dire $EC + CF = EF$. Or :

$$EF = \sqrt{569} \approx 23,854$$
$$EC + CF = \sqrt{89} + \sqrt{208} \approx 23,856$$

D'où $EF \neq EC + CF$, les points E, C et F ne sont pas alignés. □

2 Problèmes de parallélisme

2.1 Droites parallèles en 6ème

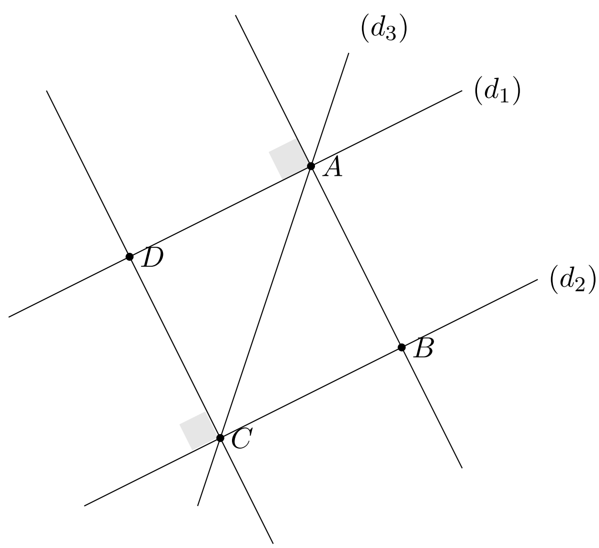
Propriété 20.10.
Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

Propriété 20.11.
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

Propriété 20.12.
Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Exercice 20.12. *Phare 6e, 61 p 151*

1. a) Tracer deux droites (d_1) et (d_2) parallèles. Une droite (d_3) non perpendiculaire à la droite (d_1) coupe cette droite (d_1) au point A et la droite (d_2) au point C.
   b) Tracer la perpendiculaire à la droite (d_1) passant par le point A. Elle coupe la droite (d_2) au point B.
2. Que peut-on dire des droites (d_2) et (AB) ? Justifier la réponse.
3. a) Tracer la perpendiculaire à la droite (d_2) passant par le point C. Elle coupe la droite (d_1) au point D.
   b) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Démonstration. 1. a) Figure
   b) Figure
2. On sait que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et que (AB) est perpendiculaire à (d_1) passant par A.
   Or : Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
   Donc : (d_2) est perpendiculaire à (AB).
3. a) Figure
   b) On sait que : (CD) est perpendiculaire à (d_2) (donc (CD) est perpendiculaire à (d_1) car (d_1) et (d_2) sont parallèles) et (AB) est perpendiculaire (d_2).

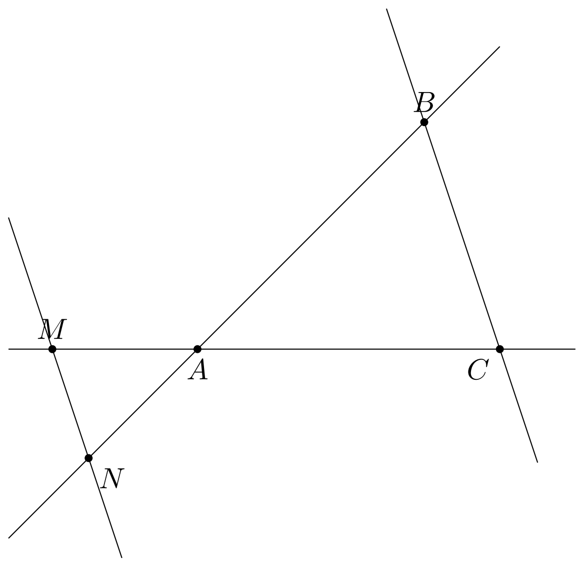
Or : Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.
Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

□

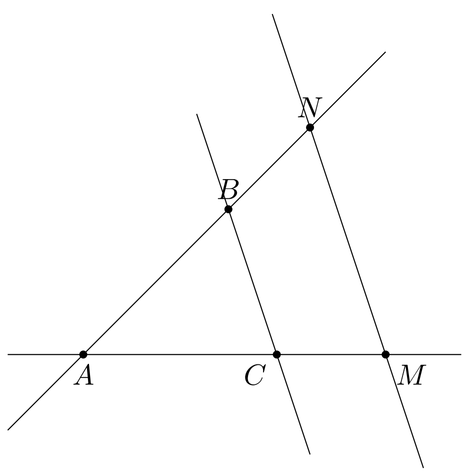
2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Theoreme 20.13.
Étant donné deux droites sécantes coupées toutes deux par deux droites d et d' (de telle façon que l'on ait deux triangles). Si le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit alors d et d' sont parallèles.

1.



2.



Pour vérifier que AMN est un agrandissement de ABC, il faut montrer qu'il existe un nombre k tel que :

- $AM = kAB$;
- $AN = kAC$;
- $MN = kBC$.

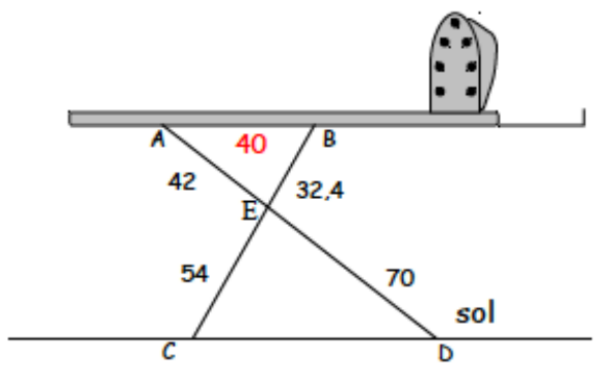
Remarque 20.14.
On peut montrer que dans la configuration où nous sommes, il suffit de montrer qu'il existe un nombre k tel que $AM = kAB$, $AN = kAC$ pour conclure que AMN est un agrandissement de ABC.

Rédaction type brevet. ♢
- Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
- Si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre

alors on peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès et conclure que $(MN)//(BC)$. □

Exercice 20.14. *Un exercice de type brevet*

Cette table à repasser est-elle parallèle au sol ?



Solution. ♢ On montre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Pour cela, on sait que ECD et AEB sont deux triangles, A, E et D sont alignés dans cet ordre, B, E et C sont alignés dans cet ordre. De plus : $AB = 40$, $AE = 42$, $BE = 32,4$, $CE = 54$ et $ED = 70$.

On calcule les rapports de longueur :

$$\frac{BE}{EC} = \frac{32,4}{54} = \frac{6}{10} \quad \text{et} \quad \frac{AE}{ED} = \frac{42}{70} = \frac{6}{10}.$$

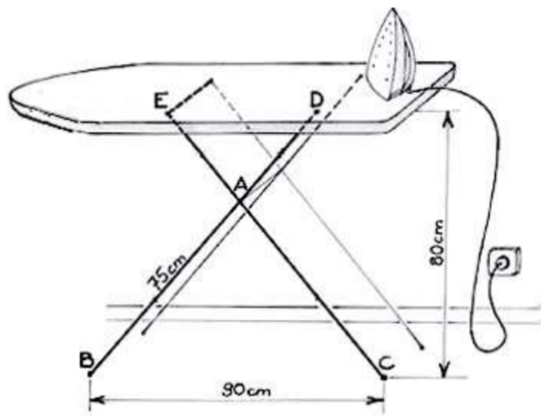
On a égalité entre les rapports de longueur : $\frac{BE}{EC} = \frac{AE}{ED}$, d'où (AB) parallèle à (CD). On peut, de plus, calculer l'écartement CD :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{ED} \Leftrightarrow CD = \frac{AB \times ED}{AE} = \frac{40 \times 70}{42} \approx 66,6$$

□

Exercice 20.14. *Le même exercice à l'oral du CAPES 2017*

Par un mercredi pluvieux, le petit Nicolas a décidé de repasser pour faire une surprise. Il utilise la table à repasser représentée ci-dessous.



Les tiges $[EC]$ et $[BD]$ de même longueur constante sont articulées en A. La longueur est égale à 75 cm. Sous la table, le point D est fixe et le point E peut être déplacé pour ajuster la hauteur. On sait que lorsque BC est égale à 90 cm, la table a une hauteur de 80 cm et est parallèle au sol pour cet écartement.

1. Nicolas voudrait comprendre pourquoi la planche à repasser reste parallèle au sol quelle que soit sa hauteur. Comment pourrais-tu lui expliquer ?
2. Comme Nicolas est plus petit que ses parents, il règle la table pour que la hauteur soit de 60 cm. Calculer alors l'écartement BC.

Solution. Voir la vidéo sur la chaîne YouTube CBMaths : https://www.youtube.com/watch?v=8qup3RLuPJw. □

2.3 Colinéarité de vecteurs

Propriété 20.15.
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles.

Exercice 20.15. *Sesmaths 2nde*

Dans un plan muni d'un repère, on place les points $A(1; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(-17; 15)$ et $D(-5; 6)$.
Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

Solution. $\diamondsuit$ On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.

On peut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires. On calcule d'abord les coordonnées des deux vecteurs.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1\\1-(-2)\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-17-(-5)\\15-6\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-12\\9\end{pmatrix}$$

On a ainsi :

$$xy' - yx' = -4\times 9 - 3\times(-12) = -36 - -36 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

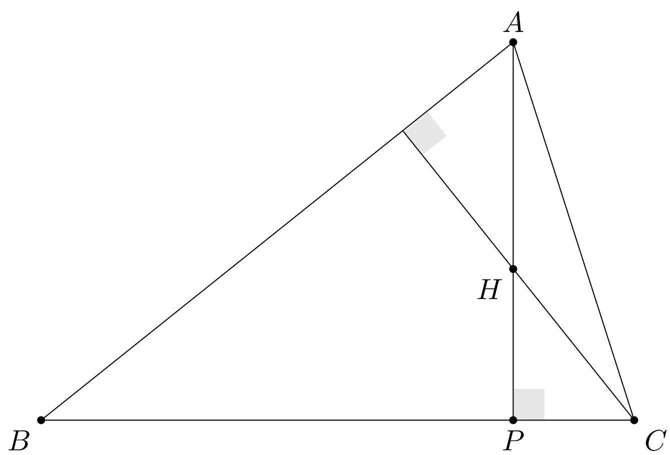
D'où $ABCD$ est un trapèze. □

3 Problèmes d'intersection

3.1 Pour s'entraîner pour le CRPE

Exercice 20.15.

Construire à la règle graduée et au compas un triangle ABC tel que, si on appelle H l'orthocentre et P le pied de la hauteur issue de A, on ait : $AB = 8$ cm, $AP = 5$ cm, H est situé sur $[AP]$ et $AH = 3$ cm.



Solution. Comme (AP) est la hauteur issue de A, alors ABP est rectangle en P. On a, de plus : $AP = 5$ cm t $AB = 8$ cm donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BP^2 = BA^2 - AP^2 = 8^2 - 5^2 = \sqrt{39}.$$

Pour construire le point B, on peut tracer $AP = 5$ cm ($H \in [AB]$ tel que $AH = 3$ cm) puis une droite perpendiculaire à (AP) passant par P. Avec un écartement de 8 cm, on point en A et on fait une marque à l'intersection de la droite perpendiculaire. On a donc construit le point B.

Pour construire le point C, on peut tracer la perpendiculaire à (AB) passant par H et l'intersection avec la droite (BC) nous donne le lieu du point C.

On a donc construire le triangle ABC tel que, si on appelle H l'orthocentre et P le pied de la hauteur issue de A, on ait : $AB = 8$ cm, $AP = 5$ cm, H est situé sur $[AP]$ et $AH = 3$ cm. □

3.2 Un problème non géométrique

Exercice 20.15.
Au bar de la poste, 5 amis profitent de la terrasse au soleil. Ils ont commandé 2 cafés et 3 thés. Le serveur leur demande $10,10$ €.

Ils sont rejoints par 4 amis qui commandent 3 cafés et 1 thé. Cette fois-ci, le serveur leur demande $7,10$ €.

Afin que les amis puissent payer chacun leur part, déterminer le prix d'un thé et le prix d'un café.

Solution. ◊ Soit x le prix d'un café et y le prix d'un thé. On a alors deux équations :

$$2x + 3y = 10,10 \qquad \text{et} \qquad 3x + y = 7,10$$

qu'il faut résoudre simultanément. Il faut donc résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10,10 \\ 3x + y = 7,10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10,10-2x}{3} \\ y = 7,10 - 3x \end{cases} .$$

Résoudre ce système d'équation revient à calculer les coordonées du point d'intersection des deux droites $(d_1) : y = \frac{10,10-2x}{3}$ et $(d_2) : y = 7,10 - 3x$.

$$7,10 - 3x = \frac{10,10 - 2x}{3} \Leftrightarrow 21,30 - 9x = 10,10 - 2x \Leftrightarrow 11,2 = 7x \Leftrightarrow x = \frac{11,2}{7} = 1,6.$$

$$y = 7,10 - 3 \times 1,6 = 2,3.$$

Ainsi, un thé coûte $2,30$ € et un café coûte $1,60$ € □

3.3 Problèmes venant du dossier CAPES

Exercice 20.15. *Dossier CAPES session 2014*
Dans un repère orthonormé, placer les points $A(2;6)$, $B(2;0)$, $C(-2;2)$, $D(7;1)$, $E(2;2)$, $F(0;4)$ et $G(5;3)$.

1. Démontrer que les points A, C et F sont alignés, ainsi que les points A, E, B et A, G, D.
2. a) Déterminer une équation de la droite (EF) et une équation de la droite (BC). En déduire les coordonées du point I, intersection des droites (EF) et (BC).
   b) On appelle J le point d'intersection de (EG) et (BD), et H le point d'intersection de (FG) et (CD). On admet que $J(-13;-3)$ et $H(25;-1)$. Démontrer que les points I, J et H sont alignés.

Solution. **1.** On montre que les vecteurs $\overrightarrow{AC}(-4;-4)$ et $\overrightarrow{AF}(-2;-2)$ sont colinéaires :

$$-4 \times -2 - -4 \times -2 = 8 - 8 = 0.$$

Ainsi, les point A, C et F sont alignés.
On peut montrer de même que les vecteurs $\overrightarrow{AE}(0;-4)$ et $\overrightarrow{AB}(0;-6)$ sont colinéaires donc les points A, E et B sont alignés.
On peut montrer de même que les vecteurs $\overrightarrow{AG}(3;-3)$ et $\overrightarrow{AD}(5;-5)$ sont colinéaires donc les points A, G et D sont alignés.

2. On peut déterminer une équation cartésienne de la droite (EF) :

$$a = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{0-2}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$2 = -1 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 2 + 2 = 4.$$

D'où une équation cartésienne de la droite (EF) est : $y = -x + 4$.
On peut déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) :

$$a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-0}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$0 = 2 \times -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = 1$$

D'où une équation cartésienne de la droite (BC) est : $y = -(1/2)x + 1$.
Ainsi, I (intersection des droites (EF) et (BC)) a pour coordonnées :

$$-\frac{1}{2}x + 1 = -x + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6$$

et

$$y = -6 + 4 = -2.$$

3. J a pour coordonnées $(-13;-3)$ et K a pour coordonnées $(25;-1)$. On montre que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-13-6\\-3+2\end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-19\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}25-6\\-1+2\end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}-19\\1\end{pmatrix}$$

De plus :

$$xy' - yx' = -19 \times 1 - (-19) \times 1 = -19 + 19 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires donc les points I, J et K sont alignés.

□

Exercice 20.15. *CAPES 2014*

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(5;3)$, $B(5;-1)$ et $C(3;1)$.

1. On appelle G le point d'intersection des médianes issues de A et B dans le triangle ABC. Déterminer les coordonnées de G.
2. On considère les points $F(3;-3)$ et $H(9;-1)$. Montrer que la droite (BG) est une hauteur

du triangle FBH.

Solution. $\diamondsuit$

1. Il faut déterminer les coordonnées des points resp. I, resp. J et resp. K (resp. milieu du segment $[AB]$, resp. segment $[AC]$, resp. segment $[BC]$)

$$I\left(\frac{5+5}{2};\frac{3+(-1)}{2}\right)\ ;\ I(5;1)$$
$$J\left(\frac{5+3}{2};\frac{3+1}{2}\right)\ ;\ J(4;2)$$
$$K\left(\frac{5+3}{2};\frac{-1+1}{2}\right)\ ;\ K(4;0)$$

G est l'intersection des droites (IC) et (JB). Une équation cartésienne de (IC) est $y = 1$ et une équation cartésienne de (JB) est $y = 14 - 3x$. D'où les coordonnées de G sont :

$$14 - 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}.$$

$$y = 1.$$

2. On démontre que les droites (BG) et (FH) sont perpendiculaires. Pour cela, on peut montrer que $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$. Or :

$$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FH} = -\frac{2}{3} \times 6 + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0$. Le produit scalaire $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FH}$ est nul donc les droites (BG) et (FH) sont perpendiculaires et ainsi, (BG) est une hauteur du triangle FBH.

$\square$

Exercice 20.15. *CAPES 2016*

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dans ce repère, on définit les quatres points $A(1;2;3)$, $B(2;-1,0)$, $C(0;-3;1)$ et $D(-1;0;2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

Solution. Voir la vidéo sur la chaîne YouTube CBMaths : `https://www.youtube.com/watch?v=lZHpA1UTIyg` $\square$