CBMaths

CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n° 22
Pourcentages et taux d'évolution. Applications.

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 19 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Transversal

Prérequis

Notion de proportionnalité, suites numériques (suites arithmético-géométriques, limites de suites), logarithmes, probabilités conditionnelles, cercle trigonométrique, résolution d'équations

Références

– A. Abouhazim, *Pourcentages et taux d'évolution*, 1ère ES. URL : `https://www.logamaths.fr/docs/1es/AA1ereES_Ch01_Pourcentages-et-taux-d-evolution.pdf`
– D. Pinel, *Chapitre II : Taux d'évolution - Indices*, Terminale STG. URL : `http://mathemitec.free.fr/index.php`
– Unknown, *Chapitre 1 : Taux et Indices*. Terminale STG. URL : `http://profmath55.free.fr/dotclear/public/TERMSTG/COURS/tauxchap1.pdf`
– J.-P. Goulard, *Taux d'évolution*. URL : `http://blog.ac-versailles.fr/jpgoualard/public/TCFE-cours-tauxevolutions.pdf`
– M. Imbert, *Resumé n° 1 : POURCENTAGES : proportions, évolutions, indices*. Terminale STMG. URL : `https://www.mimaths.net/IMG/pdf/resume1-pourcentages-indices-2.pdf`
– Unknwon, *Chapitre I : Evolution en pourcentage*. URL : `http://maths.maniette.free.fr/cours/1ES/CH1-evolution_pourcentage.pdf`
– Unknown, *Chap I : Taux d'évolution*. Terminale STG, Année 2006-2007, LPO Jean Rostand Mantes-La-Jolie. URL : `http://www.lyc-rostand-mantes.ac-versailles.fr/IMG/pdf/ch1_taux_TSTG2.pdf`
– Unknwon, *Chapitre 1 : Taux d'évolution et indice*. Terminale STG, 2006-2007, Lycée Arthur Varoquaux, 54510 Tomblaine, Meurthe et Moselle, académie Nancy-Metz. URL : `http://akbida.free.fr/ressources/2006_2007/TSTGCGRH/chap_01_taux_evolution.pdf`
– H. Gringoz & al, *Manuel Sesamaths, 2nde*. Magnard 2019.
– D. Vergès, *BAC ES, Asie 2018*, Exercice 3O. URL : `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/ES_Asie_21_juin_2018.pdf`
– M. Sablik, *TD Probabilités conditionnelles*. IUT Aix-en-Provence, DUT Informatique, Année 2014-2015. URL : `https://www.math.univ-toulouse.fr/~msablik/CoursIUT/Proba/2014-2015-Proba-TD3-Conditionnement.pdf`
– C. Monie, *Construire un diagramme circulaire*. URL : `http://collmathage.fr`

Plan de la leçon

1 Pourcentages, proportionnalité

1.1 Définition

Définition 22.1.

La part d'une partie A d'un tout B est :

$$\frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } B}.$$

Dire que A vaut $t\%$ de B signifie que $\frac{A}{B} = \frac{t}{100}$, c'est-à-dire $A = B \times \frac{t}{100}$.

Exemple 22.2.

Dans une classe de 30 élèves, il y a 18 filles. La part des filles dans la classe est :

$$t = \frac{18}{30} = 0,6 = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Il y a donc 60% de filles dans la classe.

Remarque 22.3.

On exprime une part ou une proportion de trois façons :

- en *fraction* : les trois cinquième de la classe sont des filles.
- en *pourcentage* : 60% des élèves sont des filles
- en *écriture décimale* : si la part des filles est la même parmi les 145 élèves de 1ère ES-L, alors il y a $0,6 \times 145 = 87$ filles en 1ère ES-L.

1.2 Prendre un pourcentage d'une quantité

Définition 22.4. *Prendre un pourcentage d'une quantité*

Prendre $t\%$ d'une quantité revient à multiplier celle-ci par $\frac{t}{100}$.

Exemple 22.5.

Le marchand de vêtements est généreux. 4% de ses bénéfices reviennent à une association caritative. Pour un pantalon vendu, il faut $1,5$€ de bénéfices. Ainsi, il reversera $1,5 \times \frac{4}{100} = O,06$ soit 6 centimes à l'association caritative.

1.3 Rapport avec la proportionnalité

Remarque 22.6. *Tableau de proportionnalité*

On peut utiliser un *tableau de proportionnalité* pour calculer des pourcentages. Il faut juste ramener le total à 100.

Exemple 22.7.

On peut illustrer l'exemple 22.2 par un tableau de proportionnalité :

Filles	18	t
Total	30	100

2 Évolutions et pourcentages

2.1 Coefficient multiplicateur d'une évolution

Il est question ici d'augmentation de de diminution d'une grandeur ou d'une quantité pendant une période. Connaissant une valeur initiale, on cherche à déterminer la nouvelle valeur liée à l'augmentation ou la diminution : on a alors à faire avec une *évolution*.

Propriété 22.8.

Appliquer une *augmentation* de $t\%$ à une grandeur, revient à la multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$.

Appliquer une *diminution* de $t\%$ à une grandeur, revient à la multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

Démonstration. ◊ Soient V_i et V_f deux nombres réels strictement positifs. On note V_i la valeur *initiale* (ou de départ) et V_f la valeur finale (ou d'arrivée) d'une certaine grandeur.

– Si on applique une augmentation de $t\%$ à V_i, on obtient :

$$V_f = V_i + t\% \text{ de } V_i = V_i + \frac{V_i}{100}.$$

On remarque que le facteur commun des deux termes de la somme est V_i donc on peut factoriser par V_i, ce qui donne :

$$V_f = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times V_i.$$

On peut faire le même raisonnement pour l'application d'une diminution de $t\%$ à V_i, on obtient :

$$V_f = \left(1 - \frac{t}{100}\right) V_i$$

□

Exemple 22.9.

Une augmentation de 5% revient à multiplier par : $1+\dfrac{5}{100}=1,05$.

Une diminution de 8% revient à multiplier par : $1-\dfrac{8}{100}=0,92$.

Définition 22.10.

Soient V_i et V_f les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Les coefficients :

$$k=\left(1+\frac{t}{100}\right) \text{ ou } k=\left(1-\frac{t}{100}\right)$$

s'appellent les *coefficients multiplications* qui permettent de passer de V_i à V_f.

Ce qui donne dans les deux cas :

$$V_f=k\times V_i.$$

Exemple 22.11.

Un objet vaut 12 €. Son prix a augmenté de 4%. Son prix après augmentation est de :

$$12\times\left(1+\frac{4}{100}\right)=12\times 1,04=12,48\,€.$$

Remarques 22.12.

- Une *augmentation* correspond à un coefficient multiplicateur $k>1$.
- Une *diminution* correspond à un coefficient multiplicateur $0<k<1$.
- « Coefficient multiplicateur » sera abrégé par « CM »

2.2 Taux d'évolution

Définition 22.13.

Soit V_i et V_f les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Alors le *taux d'évolution* T qui permet de passer de V_i à V_f est défini par :

$$T=\frac{V_f-V_i}{V_i}.$$

Le taux d'évolution exprimé en *pourcentage* de V_i à V_f est égal à t% où :

$$t=T\times 100 \text{ ou encore : } t=\frac{V_f-V_i}{V_i}\times 100.$$

Exemple 22.14.
Un smartphone a vu son prix augmenté de 250 € à 280 €. Pour déterminer le pourcentage d'augmentation, on peut résoudre l'équation d'inconnue p suivante :

$$\begin{aligned} 250\left(1+\frac{p}{100}\right)=280 &\Leftrightarrow 1+\frac{p}{100}=\frac{280}{250} \\ &\Leftrightarrow \frac{p}{100}=1,12-1 \Leftrightarrow p=12. \end{aligned}$$

Le prix du smartphone a augmenté de 12%.

Remarque 22.15. *Application de la formule*
En appliquant la formule donnée précédemment, on obtient :

$$t=\frac{280-250}{250}\times 100=\frac{30}{250}\times 100=12.$$

Définition 22.16. *Variations*
On reprend les notations de la définition précédente.
- $V_f - V_i$ s'appelle la *variation absolue* ;
- $\dfrac{V_f - V_i}{V_i}$ s'appelle la *variation relative.*

Remarque 22.17. *Signe du taux d'évolution*
- Une *augmentation* correspond à un taux d'évolution positif : $T > 0$.
- Une *diminution* correspond à un taux d'évolution négatif : $T < 0$.

Propriété 22.18. *CM vs taux d'évolution*
Soient V_i et V_f les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Alors le taux d'évolution T et le CM k sont liés par les formules suivantes :

$$T = k-1 \text{ ou encore } k = 1+T.$$

Démonstration. ◊ On sait que $k=\dfrac{V_f}{V_i}$ donc :

$$T=\frac{V_f-V_i}{V_i}=\frac{V_f}{V_i}-\frac{V_i}{V_i}=k-1.$$

D'où $T=k-1$ et $k=1+T$. □

Exemple 22.19.
Une augmentation de 15% entre deux dates, correspond à un taux d'évolution $T = 15\% = \frac{15}{100} = 0,15$ et un CM : $k = 1 + T = 1 + 0,15$ soit $k = 1,15$.

3 Évolutions successifs et réciproques

3.1 Évolutions successifs

Définition 22.20.
Soit n un nombre entier naturel non nul. Soient V_0, V_1, ..., V_n les valeurs d'une grandeur sur n périodes successives correspondant à des taux d'évolution T_1, T_2, ..., T_n et des coefficients multiplicateurs k_1, k_2, ..., k_n respectivement.

Alors, le *coefficient multiplicateur global* entre V_0 et V_n est égal au produit des coefficients multiplicateurs de cette période :

$$k = k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n.$$

Le *taux d'évolution global* est :

$$T = (1 + T_1) \times (1 + T_2) \times \cdots \times (1 + T_n) - 1.$$

Démonstration. ♢ Par définition d'un coefficient multiplicateur, on sait que $V_1 = k_1 \times V_0$, $V_2 = k_2 \times V_1$ et ainsi de suite jusqu'à $V_n = k_n \times V_{n-1}$.

Donc, par multiplications successives, on obtient :

$$V_n = k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n \times V_0.$$

En remplaçant chaque coefficient multiplicateur par son expression en fonction du taux d'évolution associé, on obtient le deuxième résultat. □

Exemple 22.21.
Un article subit une baisse de 10% puis une baisse de 20%. Le coefficient multiplicateur global est égal à $c = 0,9 \times 0,8 = 0,72$. Ainsi, le taux d'évolution vérifie l'équation suivante :

$$1 + t = 0,72 \Leftrightarrow t = 0,72 - 1 = -0,28$$

soit en pourcentage $p = -0,28 \times 100 = -28\%$. L'article a donc subi une baisse globale de 28%.

Exemple 22.22. *Important pour la suite !*
Un objet coûte 20 €. Il a subit une augmentation de 15% de son prix. Faut-il diminuer son prix de 15% pour retrouver le prix initial avant hausse ?

Pour cela, on calcule le prix de l'objet après l'augmentation de 15%. Le CM correspondant à une augmentation de 15% est de $1+0,15=1,15$. Ainsi,

$$20 \times 1,15 = 23\,e.$$

Maintenant, on va appliquer une baisse de 15% au prix après augmentation. Le CM correspondant à une baisse de 15% est de $1-0,15=0,85$. Ainsi,

$$23 \times 0,85 = 19,55\,e.$$

On constate qu'on ne revient pas au prix initial.

Remarque 22.23.

Attention ! L'opération « inverse » d'augmentation de 15% ne correspond pas à une diminution de 15%.

Augmenter de 15% puis diminuer de 15% revient à une diminution globale de 2,25% (faire le calcul en exercice).

3.2 Évolutions réciproques

Définition 22.24.

Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Les évolutions qui permettent de passer de V_0 à V_1 d'une part et de V_1 à V_0 d'autre part, s'appellent des *évolutions réciproques* l'une de l'autre.

Remarque 22.25.

Une évolution permet de nous ramener à la valeur de départ.

Les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont inverses l'un de l'autre.

Propriété 22.26.

Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. On note T (resp. T') le *taux d'évolution* et k (resp. k') le *coefficient multiplicateur* qui permettent de passer de V_0 à V_1 (resp. de V_1 et V_0). Alors :

$$k' = \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad T' = \frac{1}{1+T} - 1.$$

Démonstration. $\Diamond$ D'une part le coefficient multiplicateur de V_0 à V_0 est égal à 1. Et d'autre part, il est égal au produit des coefficient multiplicateurs k et k'. Donc $kk'=1$. On en déduit :

$$k' = \frac{1}{k} \text{ et par suite } 1+T' = \frac{1}{1+T}.$$

D'où les deux résultats. □

4 Taux moyen

4.1 Moyenne géométrique

Définition 22.27. *Exposant* $1/n$

Soient a et α deux nombres strictement positifs et n un entier naturel non nul.

Le nombre $a^{1/n}$ est la solution positive de l'équation (d'inconnue α) suivante : $\alpha^n = a$.

Remarque 22.28.

On peut aussi noter l'exposant $1/n$ comme étant la racine n-ième du nombre $\sqrt[n]{\ }$.

Exemples 22.29.

- La racine carrée $\sqrt{2}$ est solution positive de l'équation $x^2 = 2$. On peut la noter $2^{1/2}$.
- Le nombre $4^{1/5}$ est solution positive de l'équation $x^5 = 4$. Il vaut environ $1,32$ (arrondi à 10^{-2} près).

Définition 22.30. *Moyenne géométrique*

La moyenne géométrique de n réels strictement positifs a_1, a_2, ..., a_n est le nombre $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$.

Exemples 22.31.

- La moyenne géométrique de 3 et 5 est $(3 \times 5)^{1/2} = \sqrt{15} \approx 3,87$.
- La moyenne géométrique de 2, 5 et 7 est $(2 \times 5 \times 7)^{1/3} \approx 4,12$.

4.2 Taux moyen

Définition 22.32.

Soit n un entier naturel. Soient V_0, V_1, ..., V_n les valeurs d'une grandeur sur n périodes successives corresponds à des taux d'évolutions T_1, T_2, ..., T_n. On note :

$$T_G = (1 + T_1) \times (1 + T_2) \times (1 + T_n)$$

le taux global associé aux n évolutions successives.

On définit le taux moyen correspondant à ces n évolutions successives, le nombre T_M tel que :

$$(1 + T_M)^n = 1 + T_G.$$

Remarque 22.33.

D'après la définition de l'exposant $1/n$, on obtient :

$$T_M = \sqrt[n]{1 + T_G} - 1.$$

Exemple 22.34.

On s'intéresse à une quantité A qui subit, par exemple, 4 évolutions successives de taux 5%, 10%, 7% et 12%. Cette quantité devient après les 4 évolutions la nouvelle quantité B :

$$B = (1 + 0,12) \times (1 + 0,07) \times (1 + 0,1) \times (1 + 0,05) \times A \approx 1,384 \times A,$$

ce qui correspond à une évolution globale de $38,4\%$.

Le taux d'évolution moyen des 4 évolutions successives est la « moyenne géométrique » des 4 taux. Ainsi :

$$(1 + T_G)^4 = 1 + 0,384 \Leftrightarrow 1 + T_G = \sqrt[4]{1,384} \Leftrightarrow 1 + T_G \approx 1,085 \Leftrightarrow T_G = 0,085,$$

soit un taux d'évolution moyen à $9,4\%$.

Exemple 22.35.

Pour une hausse annuelle de 15%, on cherche le taux *mensuel* moyen t_m. C'est le taux appliqué 12 fois de suite, et qui donne un taux global $t_g = -15\%$.

On résout donc l'équation suivante :

$$\begin{aligned}(1 + t_m)^{12} = 1 - 0,15 \Leftrightarrow (1 + t_m)^{12} = 0,85 \Leftrightarrow 1 + t_m = 0,85^{1/12} \\ \Leftrightarrow t_m = \sqrt[12]{0,85} - 1 \approx -0,0135\end{aligned}$$

soit en pourcentage, une baisse mensuelle moyenne de $1,35\%$.

5 Indices

5.1 Définition et propriétés

Définition 22.36.

On appelle *indice* d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_1 le nombre :

$$I = 100 \times \frac{y_2}{y_1}$$

Si t est le taux d'évolution de y_2 par rapport à y_1 alors $100(1 + t) = I$.

Exemple 22.37.
Un indice de 112 correspond à une augmentation de 12%.

Propriété 22.38.
- Un indice est toujours strictement positif.
- Un indice plus grand que 100 correspond à une hausse.
- Un indice plus petit que 100 correspond à une baisse.

Remarque 22.39.
L'intérêt des indices est de tout ramener à 100 afin de mieux « voir » et comparer les évolutions.

5.2 Un exercice d'application pour l'utilisation des indices

Voici la consommation de pétrole de trois pays en millions de tonnes entre 1992 et 2011.

Année	1992	1998	2002	2008	2011
États-Unis	792	854	891	889	834
Chine	123	190	246	380	462
France	94	92	94	91	83

On va calculer les indices (par pays), base 100 en 1992, arrondis à 0,1 près pour comparer l'évolution de la consommation dans ces trois pays.

On calcule, par exemple, l'indice en 1998 par rapport à 1992. On a :

$$I_{98/92} = \frac{854}{792} \times 100 = 107,8.$$

Cela signifie que la consommation de pétrole des États-Unis a augmenté de $7,8\%$ entre 1992 et 1998.

En calculant tous les indices des années présentes par rapport à 1992 de chaque pays, on obtient le tableau suivant :

Année	1992	1998	2002	2008	2011
États-Unis	100	107,8	112,5	112,5	105,3
Chine	100	154,5	200	308,9	375,6
France	100	97,9	100	96,8	88,3

On peut interpréter les résultats du tableau précédent :
- La consommation des États-Unis a continué à augmenter dans le début des années 1990 puis s'est stabilisé et tend à diminuer légèrement en 2011.
- La consommation en France a peu évolué ces dernières années, avec une baisse plus nette en 2011.
- La consommation de la Chine explose et est en continuelle hausse ($+275,6\%$ en 20 ans !!)

5.3 Le point de pourcentage

Un *point de pourcentage* est une unité utilisée pour désigner la différence arithmétique entre deux pourcentages appliquées à la même grandeur.

Exemple 22.40.
Une taxe qui passe de $5,5\%$ à 11% va doubler. Donc elle subit une augmentation de 100% en pourcentage. Par contre, on dira qu'elle a subit une augmentation de $5,5$ points de pourcentage, et non une augmentation de $5,5\%$.

Remarque 22.41.
L'augmentation de pourcentage de $5,5\%$ appliquée au pourcentage $5,5\%$ est :

$$V_f = 5,5 \times \left(1 + \frac{5,5}{100}\right) = 5,8025.$$

6 Applications

6.1 Application de la TVA

Exercice 22.41.
Le prix HT (Hors Taxe) d'un objet est de 500 €. Le taux de TVA (Taxe à la valeur ajoutée) appliquée sur produit est de $19,6\%$. Quel est le prix TTC (toutes taxes comprises) de ce produit ?

Solution. ♢ On applique un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{19,6}{100} = 1,196$ au prix initial de l'objet :

$$500 \times 1,196 = 598.$$

Le prix TTC de l'objet est de 598 €. □

6.2 Croissance du PIB

Exercice 22.41.
Un chef d'état souhaiterait que la croissance du PIB de son pays atteigne 2% sur l'année.

Les études comptables montrent que le PIB a augmenté de $0,5\%$ au premier trimestre, diminué de $0,2\%$ au deuxième trimestre puis augmenté de $1,1\%$ au troisième trimestre.

Quelle doit être l'évolution minimale au cours du dernier trimestre de l'année pour que le chef d'état atteigne ses objectifs ? Arrondir le résultat à $0,1\%$ près.

Solution. Soit t le taux d'évolution du PIB au cours du dernier trimestre par rapport au troisième trimestre. Il faut résoudre l'inéquation :

$$(1+0,005)\,(1-0,002)\,(1+0,011)\left(1+\frac{t}{100}\right) > 1+0,02$$
$$\Leftrightarrow 1,005 \times 0,998 \times 1,0011 \times \left(1+\frac{t}{100}\right) > 1,02$$
$$\Leftrightarrow 1,004093\left(1+\frac{t}{100}\right) > 1,02 \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} > 1,015842 \Leftrightarrow \frac{t}{100} > 0,015842$$

soit $t = 1,58\%$. Il faut au minium que l'évolution du PIB du dernier trimestre par rapport au troisième soit d'environ $1,6\%$. □

6.3 Indices de références des loyers

L'IRL a été fixé à 100 au 2ème trimestre 2004 et est réévalué chaque trimestre par l'INSEE. Il permet de réviser au loyer d'habitation.

Période	Année	Valeur	Date de parution
2ème Trimestre	2004	$100,0$	15/10/04
3ème Trimestre	2004	$100,75$	14/01/05
4ème Trimestre	2004	$101,45$	12/04/05
1er Trimestre	2005	$102,1$	08/07/05
2ème Trimestre	2005	$102,6$	14/10/05
3ème Trimestre	2005	$103,07$	10/01/06
4ème Trimestre	2005	$103,78$	07/04/06
1er Trimestre	2006	$104,61$	11/07/06

Soit un bail de location signé le 1er janvier 2005 pour un loyer mensuel de 480 €, révisable annuellement à la date anniversaire du contrat. Le dernier indice connu à cette date est celui du deuxième trimestre de 2004 publié le 15 octobre 2004. Sa valeur est 100.

Le 1er janvier 2006 intervient la première révision du loyer, le dernier indice connu est celui du 2ème trimestre 2005, il est de $102,6$.

Le nouveau montant du loyer sera donc de $480 \times \dfrac{102,6}{100} = 492,48$ €.

6.4 Étude d'une population de loup (suites arithmético-géométrique)

Exercice 22.41. *BAC ES Asie 2018, Exercice 3*

Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population de loups croit naturellement au rythme de 12% par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite (u_n) le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en 2017+n.

1. a) Avec ce modèle, vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2018 est de 318.
b) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,12u_n - 18$.

2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N<-0
U<-300
Tant que ........... faire
    U <- .........
    N <- .........
Fin Tant que
```

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1,12$. Préciser son terme initial.

b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier. Que peut-on en déduire ?

4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :

$$150 + 1,12^n \times 150 > 600.$$

b) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'énoncé.

5. En 2023, avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissance annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement : afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.

En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ? *Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.*

Solution. ♢

1. a) Le nombre de loups en 2017 était de 300. Elle augmente de 12% chaque année, donc en 2018, la population de loups sera de :

$$300 + 300 \times \frac{12}{100} - 18 = 300 + 36 - 18 = 336 - 18 = 318.$$

b) Le coefficient multiplicateur qui traduit une augmentation de 12% est de $1 + \frac{12}{100} = 1,12$. Ainsi, pour passer de la population u_n d'une année passée à celle de l'année suivante u_{n+1}, il faut multiplier par le facteur $1,12$. De plus, les chasseurs tuent 18 loups par an donc :

$$u_{n+1} = 1,12 \times u_n - 18.$$

2. L'algorithme suivant permet de déterminer au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N<-0
U<-300
Tant que U < 600 faire
    U <- 1.12*U-18
    N <- N+1
Fin Tant que
```

L'algorithme nous donne comme résultat $N = 10$. Conclusion : au bout de 10 ans, la population de loups aura doublé.

3. a) On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 150 \Leftrightarrow v_{n+1} = (1,12u_n - 18) - 150 \Leftrightarrow v_{n+1} = 1,12u_n - 168$$
$$v_{n+1} = 1,12\left(u_n - \frac{168}{1,12}\right) \Leftrightarrow v_{n+1} = 1,12(u_n - 150) = 1,12v_n.$$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $1,12$. De plus, $v_0 = u_0 - 150 = 300 - 150 = 150$.

b) Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $1,12$ et de premier terme $v_0 = 150$, on a :

$$v_n = 150 \times 1,12^n.$$

On peut ainsi déduire l'expression de u_n en fonction de n :

$$v_n = u_n - 150 \Leftrightarrow u_n = v_n + 150 \Leftrightarrow u_n = 150 \times 1,12^n + 150.$$

c) D'après le cours, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,12^n = +\infty$ car $1,12 > 1$. Donc la suite (u_n) a pour limite $+\infty$. La population de loup ne cessera de croître sur le long terme.

4. a) On souhaite résoudre l'inéquation suivante :

$$150 \times 1,12^n + 150 > 600 \Leftrightarrow 150 \times 1,12"n > 450 \Leftrightarrow 1,12^n > \frac{450}{150} \Leftrightarrow 1,12^n > 3$$
$$\Leftrightarrow \ln(1,12^n) > \ln(3) \Leftrightarrow n\ln(1,12) > \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(3)}{\ln(1,12)} \Leftrightarrow n > 9,69.$$

b) Ainsi, au bout de la dixième année (en 2027), la population de loups aura doublé.

5. Soit la suite (w_n) qui modélise la population des loups à partir de 2023 avec un quota de 35 loups tués par an. On a ainsi :

$$\begin{cases} w_0 = 446 \\ w_{n+1} = 1,12w_n - 35. \end{cases}$$

Avec la calculatrice, on peut conjecturer qu'au bout de la septième année (en 2030) la population de loups aura dépassé 600 loups.
Pour démontrer que la conjecture est vraie, il faut avoir l'expression en fonction de n d'une suite auxiliaire (z_n) qui s'exprime en fonction de (w_n) et qui serait géométrique de raison $1,12$. La suite auxiliaire (z_n) est de la forme :

$$z_n = w_n + q.$$

Comme la suite (z_n) est géométrique de raison $1,12$, on a :

$$z_{n+1} = w_{n+1} + q = 1,12w_n - 35 + q$$

Ainsi :

$$z_{n+1} = 1,12z_n \Leftrightarrow 1,12w_n - 35 + q = 1,12(w_n + q) \Leftrightarrow -35 = 0,12q \Leftrightarrow q = \frac{-35}{0,12}$$

Ainsi : $z_n = w_n - \dfrac{35}{0,12}$. On a alors : $z_0 = 446 - \frac{35}{0,12} = \frac{463}{3}$ et on peut exprimer (z_n) en fonction de n :

$$z_n = \frac{463}{3} \times (1,12)^n.$$

On a alors :

$$z_n = w_n - \frac{875}{3} \Leftrightarrow w_n = z_n + \frac{875}{3} \Leftrightarrow w_n = \frac{463}{3} \times (1,12)^n + \frac{875}{3}.$$

Pour trouver le nombre minimal d'années pour que la population de loups soit supérieur à 600, il nous faut résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{463}{3} \times (1,12)^n + \frac{875}{3} > 600 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow n \geq 7.$$

(la résolution de l'inéquation est laissée en exercice).
On retrouve le résultat de la conjecture. Selon ce nouveau modèle, le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux en 2030.

□

6.5 Probabilités conditionnelles

Exercice 22.41.

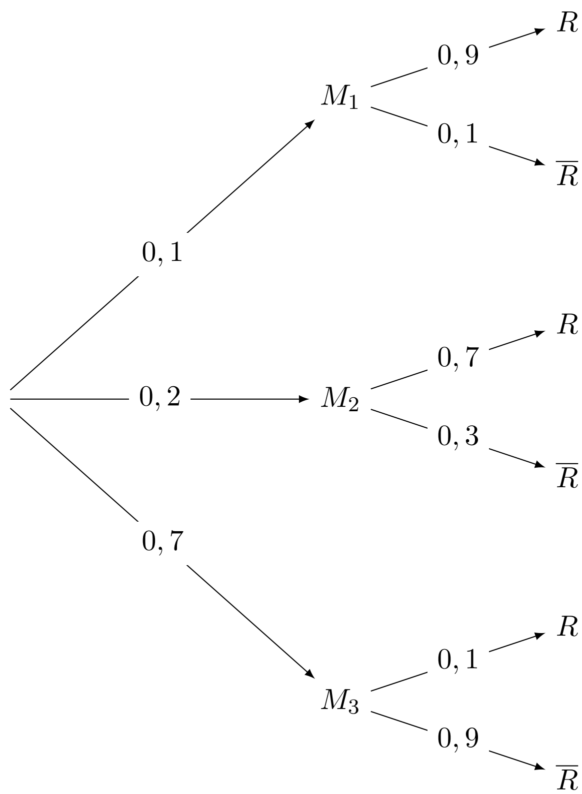
Dans une population Ω, deux maladies M_1 et M_2 sont présentes respectivement chez 10% et 20% des individus. On suppose que le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable. On entreprend un dépistage systématique des maladies M_1 et M_2. Pour cela, on applique un test qui réagit sur 90% des malades de M_1, sur 70% des malades M_2 et sur 10% des individus qui n'ont aucune de ces deux affections.

1. Quand on choisit au hasard un individu ω dans Ω, quelle est la probabilité pour que le test réagisse ?
2. Sachant que pour un individu ω, le test a réagi, donner les probabilités :
   - pour que le test ait réagit à cause de la maladie M_1.
   - pour que le test ait réagit à cause de la maladie M_2.
   - pour que le test ait réagit alors que l'individu n'est infecté par aucune des deux maladies.

Solution. ◊ On note les événements suivants :

- M_1 : « l'individu choisi est atteint de la maladie M_1 »
- M_2 : « l'individu choisi est atteint de la maladie M_2 »
- N : « l'individu choisi n'est atteint par aucune maladie »
- R : « le test réagit »

On peut faire un arbre de probabilité pour résumer les données de l'énoncé :



1. Les événements M_1, M_2 et N forment un système complet dans l'univers Ω, on peut donc utiliser la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(M_1 \cap R) + P(M_2 \cap R) + P(N \cap R) \\ &= P(M_1)P_{M_1}(R) + P(M_2)P_{M_2}(R) + P(N)P_N(R) \\ &= 0,1 \times 0,9 + 0,2 \times 0,7 + 0,7 \times 0,1 = 0,09 + 0,14 + 0,07 = 0,3. \end{aligned}$$

Il y a 30% de chance que l'individu choisi ait un test qui réagit.

2. a) On calcule :

$$P_R(M_1) = \frac{P(M_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,09}{0,3} = 0,3.$$

La probabilité que le test réagit à cause de la maladie M_1 est de $0,3$.

b) On calcule :

$$P_R(M_2) = \frac{P(M_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,14}{0,3} \approx 0,47.$$

La probabilité que le test réagit à cause de la maladie M_2 est d'environ $0,47$.

c) On calcule :

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{0,07}{0,3} \approx 0,23.$$

La probabilité que le test réagit alors que l'individu ne soit pas infecté par aucune des deux maladies est d'environ $0,23$.

□

7 Compléments

7.1 Approximation des petits taux

7.1.1 Deux évolutions successives de même taux

Propriété 22.42.
Lorsque t est petit, le taux d'évolution global de deux évolutions successives de taux t est environ égal à 2%.

Exemple 22.43.
On considère deux évolutions successives de taux 1%. La valeur initiale V_i devient :

$$V_f = (1 + 0,01)^2 \times V_i = 1,0201 \times V_i$$

que l'on peut arrondir à $1,02 \times V_i$.

Ceux deux évolutions correspondent donc à une évolution globale de taux environ $2 \times 1\%$.

7.1.2 Évolution réciproque

Propriété 22.44.
Lorsque t est petit, le taux d'évolution réciproque d'une évolution de taux t est environ égal à $-t$.

Exemple 22.45.
On considère une évolution entre V_i et V_f de taux 2%. On a : $V_f = (1 + 0,02)V_i$ et donc :

$$V_i = \frac{1}{1 + 0,02} V_f \approx 0,98 \times V_f = (1 - 0,02) \times V_f.$$

Le taux d'évolution réciproque de V_i par rapport à V_f est donc environ -2%.

7.2 Addition de deux pourcentages

Pour introduire le paragraphe « Évolutions successives », on peut faire la remarque suivante :

Remarque 22.46.
Les pourcentages d'augmentations et de diminutions ne s'ajoutent pas.

Reprenons l'exemple 22.21.

Exemple 22.47.
Un article subit une baisse de 10% puis une baisse de 20%. Cela ne correspond pas à une baisse de 30%. Supposons que l'article coûte $p_0 = 10$ € avant les réductions successives. Si on lui applique une baisse de 10%, on a un nouveau prix $p_1 = 0,9 \times p_0 = 0,9 \times 10 = 9$ €. Ensuite, on lui applique une baisse de 20%, le nouveau prix $p_2 = 0,8 \times p_1 = 0,8 \times 9 = 7,2$ €.

Si les deux baisses successives de 10% puis de 20% correspondait à une baisse globale de 30% du prix, on aurait :

$$p_2 = 0,7 \times p_0 = 0,7 \times 10 = 7 \neq 7,2.$$

Ainsi, les pourcentages d'augmentations et de diminutions ne s'ajoutent pas.

7.3 Diagramme circulaire

Le diagramme circulaire lie la notion de cercle et de pourcentages.

Définition 22.48.
Un diagramme circulaire sert à représenter graphiquement des répartitions, des parts.

Propriété 22.49.
Dans un diagramme circulaire, l'angle de chaque secteur est proportionnel à l'effectif qu'il représente.

Par exemple, à 100% correspond à un angle de 360°, 50% correspond à 180%.

Exemple 22.50.
Dans un club réunissant 120 licenciés, la répartition est la suivante :
- basket : 15 licenciés ;
- football : 35 licenciés ;
- handball : 20 licenciés ;
- rugby : 30 licenciés ;
- volley-ball : 20 licenciés.

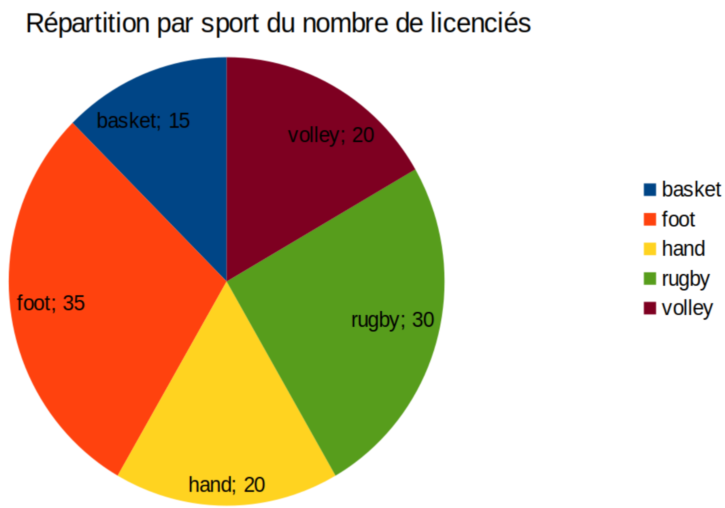
On veut représenter cette répartition à l'aide d'un diagramme circulaire. Pour cela, on construit un tableau de proportionnalité avec le nombre de licenciés par sport et l'angle du secteur qu'il représentera dans le diagramme circulaire.

Sport	basket	foot	hand	rugby	volley	Total
Nombre de licenciés	15	35	20	30	20	120
Angle	45°	105°	60°	90°	60°	360°

La troisième ligne peut se remplir progressivement si on calcule le coefficient de proportionnalité (passage de la deuxième ligne à la troisième ligne) :

$$\frac{360}{120} = 3.$$

On peut ainsi tracer le diagramme circulaire à l'aide du compas, de la règle et du rapporteur.


Répartition par sport du nombre de licenciés
basket; 15
volley; 20
foot; 35
rugby; 30
hand; 20
basket
foot
hand
rugby
volley