CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n° 29
Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré. Applications.

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 22 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Lycée

Prérequis

Notion de fonctions, polynômes, résolution d'équations

Références

- Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Équations du second degré*. Wikipédia.
- C. BOULONNE, *Notes de cours, M101 : Fondements de l'algèbre*. L1 Mathématiques, 2006-2007.
- *Équations du second degré à une inconnue*. URL : `http://ww2.ac-poitiers.fr/math_sp`.
- G. BONTEMPS & al., *Fractale, Maths 1re S*. Bordas, Programme 2001.

Plan de la leçon

1 Fonction trinômes du second degré

Définition 29.1. *Fonction trinômes du second degré*

On appelle *fonction trinôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres et $a \neq 0$.

Remarque 29.2.

Une fonction trinôme est une fonction polynôme. On dit indifféremment fonction trinôme du second degré ou trinôme.

Exemples 29.3.

1. $f : x \mapsto (x+1)(x+2)$ et $g : x \mapsto (x-1)(x+1)$ sont des fonctions trinômes du second degré, car elles peuvent s'écrire $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = x^2 - 1$.
2. $h : x \mapsto (x-1)^2 - (x+2)^2$ n'est pas une fonction trinôme du second degré, car, en développant, on obtient $h(x) = 6x - 3$.

Propriété 29.4.
Pour tout trinôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, il existe deux nombres tels que :

$$f(x) = a[(x-\alpha)^2 - \beta].$$

Cette écriture est appelée *forme canonique* du trinôme

Démonstration de la propriété 29.4. ♢ Comme $a \neq 0$, on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. En effet,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

d'où

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a[(x-\alpha)^2 - \beta] \end{aligned}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. □

Exemple 29.5.
On a :
$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left(x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right).$$
$x^2 - 3x$ est le début du développement de $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$. Donc :
$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}\right].$$
D'où $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{11}{4}$.

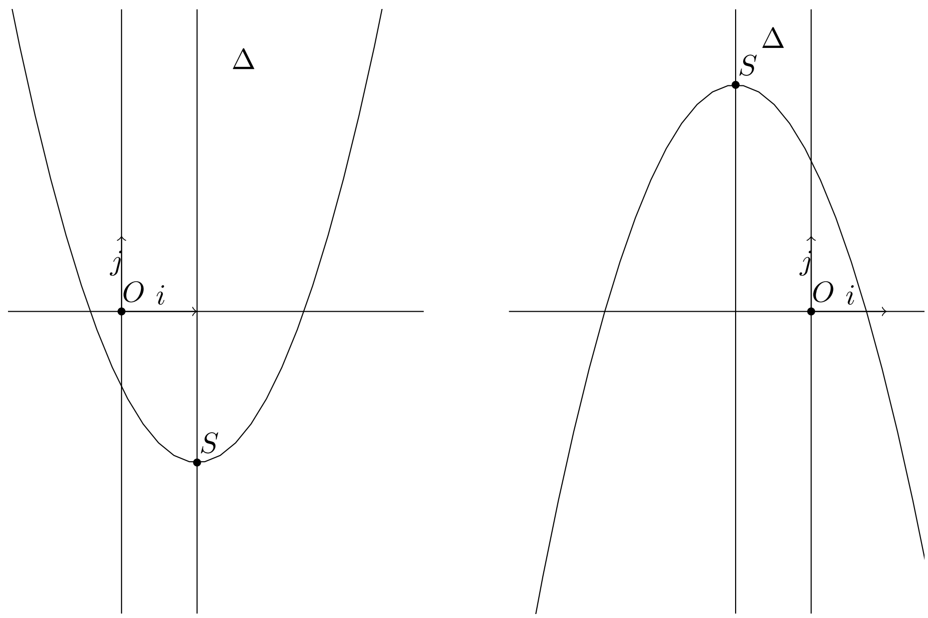
D'après la propriété 29.4, la fonction trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, peut aussi s'exprimer par $x \mapsto a[(x-\alpha)^2 - \beta]$. Donc f est une fonction associée à la fonction $x \mapsto x^2$ par la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

Propriété 29.6.
La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ s'obtient à partir de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ en effectuant une translation de vecteur $\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$, puis « une multiplication par a ».

Conséquence 29.7.
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, admet un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Définition 29.8. *Parabole*
Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, s'appelle une *parabole*. Son équation est $y = ax^2 + bx + c$.

Remarque 29.9.
On appelle aussi « parabole » la représentation de la fonction carré.



(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

FIGURE 1 – L'axe de symétrie dans le repère (O, i, j) est $\Delta : x = -\frac{b}{2a}$ et les coordonnées de S dans le repère (O, i, j) est $S(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

Propriété 29.10.

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, une fonction trinôme. Les variations de f sur $\mathbb{R}$ sont :

– Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\nearrow$	

f a un *minimum*.

– Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\searrow$	

f a un *maximum*.

Méthode 29.11.

Pour donner le tableau de variations d'une fonction trinôme, il faut :

1. Ecrire $f(x)$ sous forme canonique : $f(x) = a[(x - \alpha)^2 + \beta]$.
2. Déduire le tableau de variations.

Exemple 29.12.
On donne le tableau de variation de f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. On écrit $f(x)$ sous forme canonique

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

soit :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Sachant que $a > 0$, f admet un minimum $f(\frac{3}{2})$, soit $-\frac{5}{4}$. On dresse le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-\frac{5}{4}$		

2 Equations du second degré

2.1 Mise sous forme canonique

Theoreme 29.13.
Pour tout trinôme $f : ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe deux nombres α et β tels que :

$$f(x) = a[(x - \alpha)^2 - \beta].$$

Cette écriture est appelée *forme canonique*.

Démonstration. $\Diamond$ Comme $a \neq 0$, on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

On reconnaît le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ avec $x^2 + \frac{b}{a}x$. En effet

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

d'où

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a[(x - \alpha)^2 - \beta] \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 29.14.
Mettre sous forme canonique $2x^2 - 6x - 1$.

Solution. ♢ On a :

$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left(x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right).$$

$x^2 - 3x$ est le début du développement de $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= x^2 - 3x + \frac{9}{4}\\ x^2 - 3x &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}2\left(x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right) &= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\right]\\ &= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}\right].\end{aligned}$$

et on trouve : $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{11}{4}$.

□

2.2 Résolution

Définition 29.15. *Discriminant*

On appelle *discriminant* de l'expression $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, le nombre $b^2 - 4ac$, noté Δ.

Theoreme 29.16.
Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ.

Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles distincts x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{a}$$

On a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Si $\Delta = 0$ l'équation admet une solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions *complexes* conjuguées :

$$x_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration. $\diamondsuit$ Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$ (avec $a\neq 0$ et $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$). L'équation s'écrit :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0.$$

On pose $\Delta=b^2-4ac$, elle s'écrit donc

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0,$$

soit à résoudre :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

car $a\neq 0$.

Si $\Delta>0$ alors Δ est le carré de $\sqrt{\Delta}$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

L'équation s'écrit :

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0.$$

Donc soit $x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ou soit $x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ et ainsi :

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\text{ ou }x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta=0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ s'écrit $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$. Ce carré est nul si et seulement si, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$, soit $x=-\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta<0$ pas de solutions réels mais en passant par les complexes, $\frac{\Delta}{4a^2}$ est le carré de $\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et l'on revient au cas $\Delta>0$.

$\square$

2.3 Exemples de résolution

Exemples 29.17.

1. Résoudre $2x^2-5x-4=0$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, $2z^2+10z+25=0$.

Solution. ◊

1. Soit à résoudre $2x^2 - 5x - 4 = 0$. Le discriminant de l'expression $2x^2 - 5x - 4$ est $\Delta = 25 + 4 \times 4 \times 2 = 25 + 32 = 57 > 0$. Donc l'équation $2x^2 - 5x - 4 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{57}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{57}}{4}.$$

2. Soit à résoudre $2z^2 + 10z + 25 = 0$. Le discriminant de l'expression $2z^2 + 10z + 25$ est $\Delta = 10^2 - 4 \times 25 \times 2 = -100 < 0$. Il y a donc deux racines complexes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-10 + 10\mathrm{i}}{2 \times 2} = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i} = \frac{5}{2}(-1 + \mathrm{i}) \\ z_2 &= \frac{-10 - 10\mathrm{i}}{2 \times 2} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Ne nous arrêtons pas en si bon chemin. Calculons la forme exponentielle de z_1 et z_2. Tout d'abord, on calcule le module de z_1 et z_2 :

$$|z_1| = |z_2| = \frac{5}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

On calcule maintenant l'argument θ_1 de z_1 :

$$\frac{z_1}{|z_1|} = \cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = \frac{\frac{5}{2}(-1 + \mathrm{i})}{\frac{5}{2}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

donc :

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

Donc :

$$z_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}.$$

Pour z_2, son argument θ_2 est tel que :

$$\frac{z_2}{|z_2|} = \cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \frac{\frac{5}{2}(-1 - \mathrm{i})}{\frac{5}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

donc

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_2 &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

et ainsi,

$$z_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}.$$

□

3 Signe du trinôme du second degré

Propriété 29.18.
Soit ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ. Le signe de ax^2+bx+c est :
- Si $\Delta < 0$, le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$ (ax^2+bx+c n'a pas de racine).
- Si $\Delta = 0$, le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$ sauf x_0 (x_0 est la racine de ax^2+bx+c).
- Si $\Delta > 0$,
  - le signe de a pour tout x de $]-\infty\,,x_1[\,\cup\,]x_2\,,+\infty[$
  - le signe de $-a$ pour tout x de $]x_1\,,x_2[$

  (x_1 et x_2 sont les racines de ax^2+bx+c ($x_1 < x_2$)).

◊ *Démonstration de la propriété 29.18.* ax^2+bx+c sous forme canonique s'écrit

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]-\frac{\Delta}{4a^2}$$

avec $a \neq 0$.
- Si $\Delta < 0$ alors $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est positif et le signe de ax^2+bx+c est celui de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et son signe est celui de a sauf pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors ax^2+bx+c se factorise :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Soit $x_1 < x_2$, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		$\operatorname{sgn} a$	0	$\operatorname{sgn} -a$	0	$\operatorname{sgn} a$	

où $\operatorname{sgn} a$ est le signe de a. □

Exemple 29.19.
On note $f(x) = x^2+x-2$. On cherche le signe de f. $\Delta = 9$ et $f(x)$ a deux racines : -2 et 1. Le coefficient a de x^2 est positif. Donc $f(x) < 0$ pour tout x de $]-2\,,1[$ (« entre » les racines) ; $f(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty\,,2[\,\cup\,]1\,,+\infty[$ (« à l'extérieur » des racines).

Méthode 29.20.
On veut déterminer le signe d'un trinôme du second degré.
1. Si le cas est évident, le signe se déduit directement.
2. Sinon calculer le discriminant Δ.
   - Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a.
   - Si $\Delta = 0$, le trinôme est toujours du signe de a et nul pour $x = -\frac{b}{2a}$.
   - Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a « à l'extérieur des racines » et du signe opposé à a « entre les racines ».

Exemples 29.21.

1. On cherche le signe de $2x^2-3x+4$. On calcule le discriminant $\Delta=-23$. Δ étant négatif et le coefficient de x^2 positif : $2x^2-3x+4$ est positif sur $\mathbb{R}$.
2. On veut résoudre l'inéquation $x^2-3<0$. L'équation $x^2-3=0$ se résout sans discriminant, elle admet deux racines :
$$x_1=\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2=-\sqrt{3}.$$
Le coefficient de x^2 est positif :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de x^2-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation $x^2-3\leq 0$ a pour solution $[-\sqrt{3}\,,\sqrt{3}]$.
3. On veut résoudre l'inéquation $3x^2-2x+4<0$. On calcule le discriminant $\Delta=-44$. Δ étant négatif et le coefficient de x^2 positif : $2x^2-3x+4$ est positif sur $\mathbb{R}$. L'inéquation $3x^2-2x+4<0$ n'a pas de solution.

4 Applications

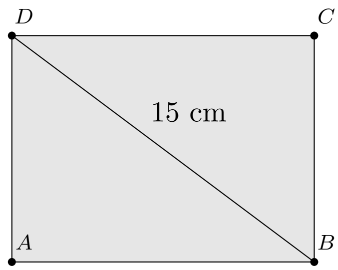
4.1 Nombres consécutifs

Déterminer deux nombres entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés est 221.

◊ *Solution.* On forme l'équation :
$$\begin{aligned} n^2+(n+1)^2=221 &\Leftrightarrow n^2+n^2+2n+1=221 \Leftrightarrow 2n^2+2n+1=221 \\ &\Leftrightarrow 2n^2+2n-220=0 \Leftrightarrow n^2+n-110=0 \end{aligned}$$
Le discriminant de l'expression $n^2+n-110$ est $\Delta=1-4\times 1\times(-110)=1+440=441>0$, d'où $\sqrt{\Delta}=\sqrt{441}=21$ et il y a deux solutions pour l'équation $n^2+n-110=0$:
$$n_1=\frac{-1+21}{2}=10 \quad \text{et} \quad n_2=\frac{-1-21}{2}=-11.$$
Ainsi :
$$10^2+11^2=100+121=221 \quad \text{et} \quad (-11)^2+(-10)^2=121+100=221.$$
□

4.2 Périmètre et diagonale d'un rectangle

Soit $ABCD$ un rectangle dont la diagonale $[BD]$ mesure 15 cm et le périmètre P du rectangle vaut 42 cm. Quels sont les dimensions du rectangle $ABCD$?



$$\mathcal{P}_{ABCD} = 45 \text{ cm}$$

$\Diamond$ *Solution.* Soit L la longueur du rectangle (ce qui correspond à la mesure du côté $[AB]$) et ℓ la largeur du rectangle (ce qui correspond à la mesure du côté $[AD]$). ℓ et L vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2(\ell + L) = 42 \\ \ell^2 + L^2 = 15^2 \text{ (d'après le thm. de Pythagore)} \\ (\ell, L \geq 0,\ \ell < L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell + L = 21 \\ \ell^2 + L^2 = 15^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L = 21 - \ell \\ \ell^2 + (21 - \ell)^2 = 225 \quad (2) \end{cases}$$

On résoud l'équation (2) :

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \ell^2 + (21 - \ell)^2 = 225 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell^2 - 42\ell + 441 - 225 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\ell^2 - 42\ell + 216 = 0 \Leftrightarrow \ell^2 - 21\ell + 108 = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant de l'expression $\ell^2 - 21\ell + 108$ est $\Delta = 441 - 432 = 9 > 0$ donc $\sqrt{\Delta} = 3$ et l'équation (2) admet deux solutions :

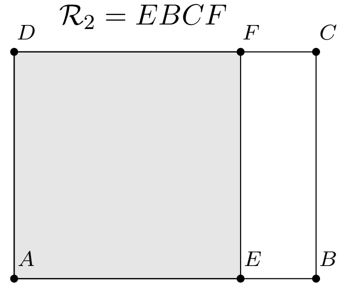
$$\begin{cases} \ell_1 = \frac{21+3}{2} = \frac{24}{2} = 12 \\ L_1 = 21 - 12 = 9 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ell_2 = \frac{21-3}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ L_2 = 21 - 9 = 12. \end{cases}$$

Or $L > \ell$, donc les dimensions du rectangle $ABCD$ sont $\ell = 9$ cm et $L = 12$ cm. $\square$

4.3 Nombre d'or

Soit R un rectangle. On note $\mathcal{Q}(R)$, le rapport de la longueur avec la largeur du rectangle R. Soit R_1 le rectangle $ABCD$ de longueur L et de largeur ℓ. On trace un carré $AEFD$ (qu'on nomme $\mathcal{C}$) avec $E \in [AB]$ et $F \in [CD]$ puis on obtient le rectangle $EBCF$ (qu'on nomme $\mathcal{R}_2$). On dit que $\mathcal{R}_1$ est un rectangle d'or si $\mathcal{Q}(R_1) = \mathcal{Q}(R_2)$ (on notera $\Phi = \mathcal{Q}(R_1)$). Quelle est la valeur exacte de Φ ?

$$\mathcal{R}_1 = ABCD$$
$$\mathcal{C} = AEFD$$
$$\mathcal{R}_2 = EBCF$$



$\lozenge$ *Solution.* On forme l'équation :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(R_1) = \mathcal{Q}(R_2) &\Leftrightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{L-\ell} \Leftrightarrow \frac{L(L-\ell)}{\ell^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow L^2 - L\ell = \ell^2 \Leftrightarrow L^2 - L\ell - \ell^2 = 0\end{aligned}$$

On note $\Phi = \frac{L}{\ell}$, on peut diviser par ℓ^2 (car $\ell \neq 0$) :

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{\ell^2} - \frac{L}{\ell} - 1 = 0 \Leftrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Le discriminant de l'expression $\Phi^2 - \Phi - 1$ est $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$. Donc :

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 0.$$

À noter qu'on trouve une autre solution de l'équation :

$$\tilde{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

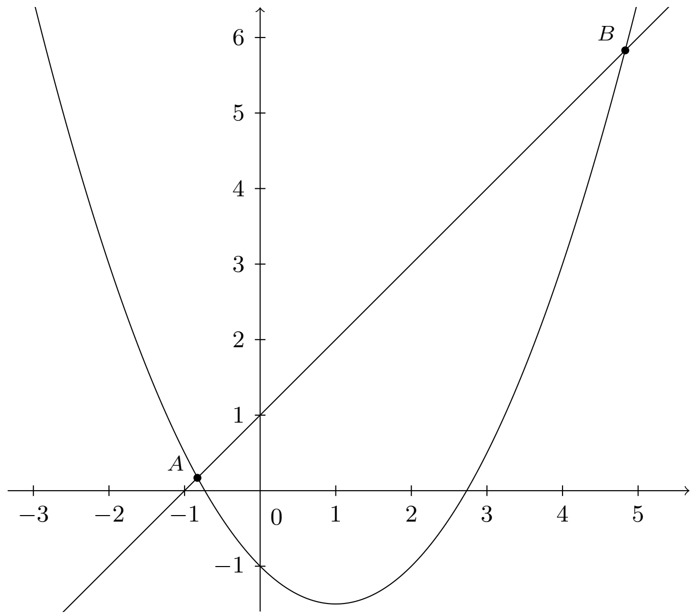
Comme le rapport $\frac{L}{\ell}$ est positif, on prend juste la valeur de Φ. $\square$

4.4 Intersection d'une parabole et une droite

Soit

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x^2}{2} - x - 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x + 1 \end{array}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ (resp. $\mathcal{C}_g$) la courbe représentative de la fonction f (resp. g). Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?



◊ *Solution.* On cherche les coordonnées des points d'intersections A et B des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Trouver les coordonnées des points d'intersections revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x - 1 = x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de l'expression $2x^2 - 3x - 3$ est $\Delta = 9 + 4 \times 3 \times 2 = 33 > 0$. Donc $\sqrt{\Delta} = 33$ et l'équation admet deux solutions :

$$\begin{cases} x_A = \frac{3+\sqrt{33}}{4} \\ y_A = \frac{7+\sqrt{33}}{4} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_B = \frac{3-\sqrt{33}}{4} \\ y_B = \frac{7-\sqrt{33}}{4} \end{cases} \quad .$$

□

4.5 Résolution d'équations du second degré à coefficients complexes

4.5.1 Résolution

Theoreme 29.22.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$ admet deux solutions (distinctes ou confondues) :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

où $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Démonstration. ◊ Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{1}$$

On met l'équation (1) sous la forme canonique :

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.
\end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et $w = z + \frac{b}{2}$. D'où :

$$(1) \Leftrightarrow w^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Soit δ une racine carrée de Δ, les deux solutions de (1) sont donc :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

□

4.5.2 Un exemple

Résoudre $\mathrm{i}z^2 - (3+8\mathrm{i})z + 13 + 13\mathrm{i} = 0$.

◊ *Solution.* On obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (3+8\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(13+13\mathrm{i}) = 9 + 48\mathrm{i} - 64 - 13 \times 4(\mathrm{i}(1+\mathrm{i})) \\
&= -55 + 48\mathrm{i} - 52(\mathrm{i}-1) = -55 + 52 + 48\mathrm{i} - 52\mathrm{i} = -3 - 4\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = -3 - 4\mathrm{i}$. On a : $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab$ et $|\delta|^2 = a^2 + b^2$. De plus $|\Delta| = \sqrt{9+16} = 5$. On en déduit :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = -2 \end{cases}$$

On trouve ainsi les racines de Δ :

$$\delta_1 = 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -1 + 2\mathrm{i}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{(3+8\mathrm{i}) - (-1+2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{4+6\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = 3 - 2\mathrm{i}; \\
z_2 &= \frac{(3+8\mathrm{i}) + (-1+2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{2+10\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = 5 + \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

□

4.6 La parabole vue comme une conique

Définition 29.23.

On appelle *conique*, l'ensemble des courbes qui s'obtiennent par l'intersection d'un cône de révolution avec un plan.

La parabole s'obtient en intersectant le plan de façon parallèle à l'une des génératrices du cône.

Définition 29.24.
Soient D une droite et F un point n'appartenant pas à D, et soit P le plan contenant la droite D et le point F. On appelle *parabole de droite directrice* D et *de foyer* F l'ensemble des points M du plan P vérifiant :

$$\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = 1$$

où $d(M,F)$ mesure la distance du point M au point F et $d(M,D)$ mesure la distance du point M à la droite D.

Remarque 29.25.
La parabole est donc une conique dont l'excentricité e vaut 1.

4.7 Équations

4.7.1 À partir du foyer et de la directrice

Si la parabole est donnée par son foyer F et sa directrice $\mathcal{D}$, soit O le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, on appelle le *paramètre de la parabole* (qu'on note p) la distance OF. On considère S le milieu de $[FO]$.

Propriété 29.26.
Dans le repère orthonormé $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\vec{\jmath}$ a même direction et sens que $\overrightarrow{OF}$, l'équation de la parabole est :

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

4.7.2 À partir de l'équation générale

Soit l'équation :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

dans un repère orthonormal. Si $B^2 - AC = 0$ alors cette équation est celle d'une parabole ou de deux droites parallèles.

Soit l'équation :

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

dans un repère orthonormal. Si $AC = 0$ avec AE ou DC non nul alors cette équation est celle d'une parabole.

Enfin, dans tout repère orthonormal, l'équation d'une droite est de la forme :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \text{avec } B^2 - AC = 0.$$

4.7.3 Équation polaire

Dans le repère $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ où O est le foyer et l'axe polaire en est l'axe focal, l'équation de la parabole est :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \frac{p}{1+\cos(\theta)}\vec{e_r}.$$

4.8 Quelques propriétés géométriques de la parabole

4.8.1 Cordes parallèles

Toutes les cordes parallèles ont leur milieu situé sur une droite perpendiculaire à la directrice. La tangente parallèle à cette direction a son point de contact sur cette droite. Les deux tangentes à la parabole aux extrémités d'une telle corde se coupent sur cette droite.

4.8.2 Tangente et bissectrice

Si A est un point sur une parabole définie par un foyer F et une directrice (d), alors la tangente de la parabole en A est la bissectrice intérieure de l'angle formée par F, A et le projeté orthogonal de A sur (d).

4.8.3 Propriété relative à l'orthoptique

Soient M et M' les points d'intersection d'une droite passant par le foyer de la parabole avec la parabole. Les deux tangentes de la parabole passant par M et M' se coupent sur la directrice en formant un angle droit entre elles. De plus, si on appelle H et H' les projetés respectifs de M et M' sur la directrice et O le point d'intersection des deux tangentes et de la directrice, alors O est le milieu $[HH']$.

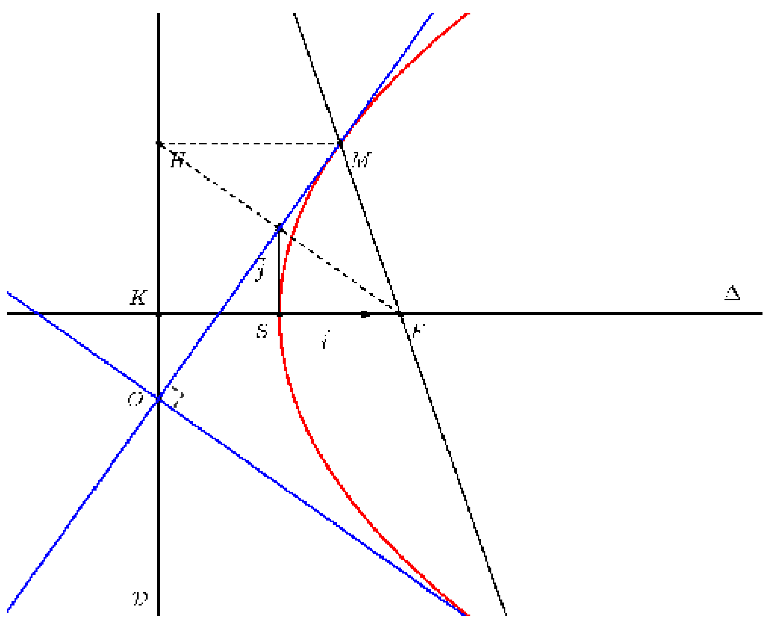


FIGURE 2 – En se déplaçant le long de sa directrice, la parabole est toujours vue sous un angle droit

4.9 Applications à la physique

La parabole est la trajectoire décrite par un objet que l'on lance si on peut négliger la courbure de la Terre, le frottement de l'air (vent, ralentissement de l'objet) et la variation de la gravité avec la hauteur.

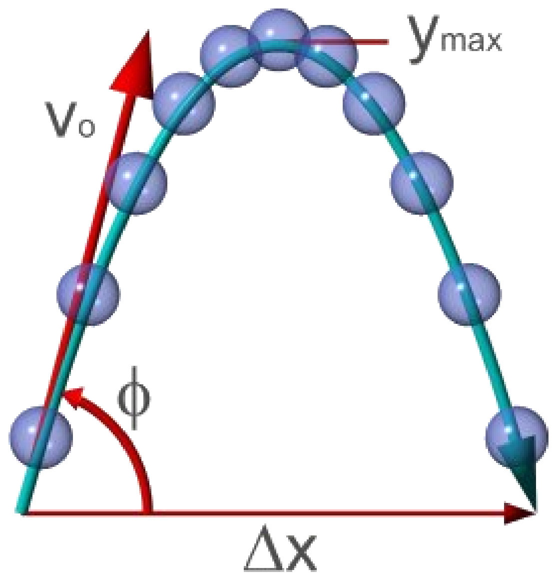


Figure 3 – Trajectoire parabolique