CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n$^{\text{o}}$ 30

Suites numériques. Limites.

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 22 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Classes de première et terminale

Prérequis

Notion de fonctions, continuité, dérivabilité, théorème du point fixe

Références

- G. Bontemps & al., *Fractale, Maths 1re S*. Bordas, Programme 2001.
- G. Costantini, *Les suites*. Première S. URL : `http://bacamaths.net`.
- X. Delahaye, *Les suites numériques, limites*. Première S. URL : `http://xmaths.free.fr/1S/cours/cours.php?nomcours=1Ssuitcours&page=01`.
- M. Cuaz, *Suites arithmético-géométriques*.
- *Suites arithmétiques, suites géométriques*. CNED Académie en Ligne. URL : `www.academie-en-ligne.fr/Ressources/MA11/AL7MA11TEPA0012-Sequence-08.pdf`.

Plan de la leçon

1 Suites numériques, définition

Définition 30.1. *Suite numérique*

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0. L'image d'un entier naturel n est notée $u(n)$ ou u_n, n est appelé *l'indice* ou le *rang* du terme u_n. La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemples 30.2.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n}, \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

Cette suite est définie en fonction du rang (elle est de type $u_n = f(n)$ où f est une fonction). On obtient :

$$u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$$

Cette suite est définie en fonction de terme(s) précédent(s) (on dit que c'est une suite récurrente). On obtient :

$$u_1 = u_0(1-u_0) = -2,\ u_2 = -6,\ u_3 = -42.$$

Remarque 30.3.

Une suite comportant un nombre fini de termes peut aussi être définie par un tableau de valeurs. Par exemple :

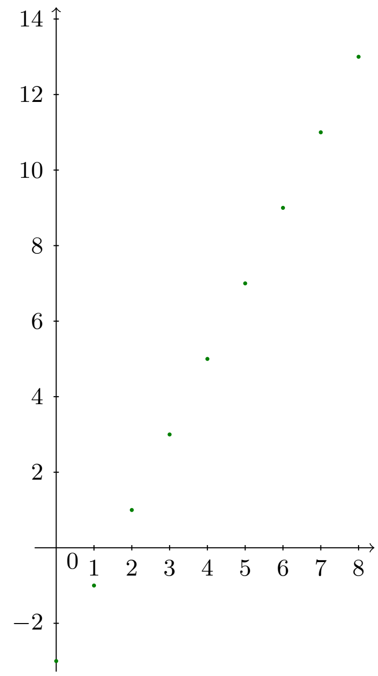
n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	-5	6	7	10	-15	21

Définition 30.4.

On appelle représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n).

Exemple 30.5.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n - 3$. On donne une représentation graphique de la suite.



2 Suites monotones

Définition 30.6.

Soit la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

- On dit que (u_n) est *croissante* si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- On dit que (u_n) est *décroissante* si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- On dit que (u_n) est *stationnaire* si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques 30.7.

1. On définit de la même façon une suite strictement croissante ou strictement décroissante en utilisant des inégalités strictes.
2. Une suite croissante ou décroissante est appelée suite *monotone*.
3. Étudier le sens de variation d'une suite, c'est déterminer si une suite est croissante ou décroissante (ou ni l'un ni l'autre). Cette étude peut se faire en calculant la différence $u_{n+1} - u_n$ et en déterminant si cette différence a un signe constant.
4. La définition d'une suite croissante (ou d'une suite décroissante) n'est pas identique à la définition d'une fonction croissante. Dans le cas d'une suite, on compare deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} dans le cas d'une fonction on compare les images de deux réels quelconques a et b.

Exemples 30.8.

1. La suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 = 2n + 1 > 0.$$
2. La suite $(-2n+3)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 3 - (-2n+3) = -2n - 2 + 3 + 2n - 3 = -2 < 0.$$
3. La suite $(-1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{2n+1} - u_{2n} = (-1)^{2n+1} - (-1)^{2n} = -1 - 1 = -2 < 0$$
$$u_{2n+2} - u_{2n+1} = (-1)^{2n+2} - (-1)^{2n+1} = 1 - (-1) = 2 > 0.$$
4. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Propriété 30.9.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Si $n \geq p$ alors $u_n \geq u_p$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Si $n \geq p$ alors $u_n \leq u_p$.

◊ *Justification de la propriété 30.9.*

– Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Si $n \geq p$, on peut écrire $n = p + k$ avec k un entier naturel ($k = n - p$). La suite (u_n) étant croissante, on peut alors écrire :
$$u_p \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \cdots \leq u_{p+k}.$$
Donc $u_p \leq u_n$, c'est-à-dire $u_n \geq u_p$.

– Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Si $n \geq p$, on peut écrire $n = p + k$ avec k un entier naturel ($k = n - p$). La suite (u_n) étant décroissante, on peut alors écrire :
$$u_p \geq u_{p+1} \geq u_{p+2} \geq \cdots \geq u_{p+k}.$$
Donc $u_p \geq u_n$, c'est-à-dire $u_n \leq u_p$.

□

Propriété 30.10.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction croissante sur $[n_0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par $u_n = f(n)$ est une suite croissante.

Justification de la propriété 30.10. Soit f une fonction croissante sur $[n_0\,,+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par $u_n = f(n)$. Soit $n \geq n_0$. On a de façon évidente, $n+1 \geq n$. La fonction f étant croissante sur $[n_0\,,+\infty[$, on en déduit que $f(n+1) \geq f(n)$. Donc $u_{n+1} \geq u_n$. Pour tout $n \geq n_0$, on a donc $u_{n+1} \geq u_n$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante. □

Remarques 30.11.

1. On a une propriété identique avec une fonction décroissante.
2. La condition est suffisante, mais pas nécessaire, c'est-à-dire que la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas (voir la figure 1).

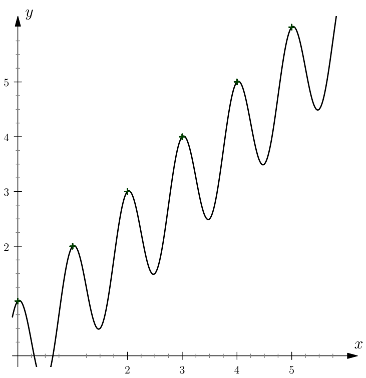


FIGURE 1 – La fonction $f(x) = \cos(2\pi x) + x$ n'est pas croissante et pourtant, la suite $u_n = f(n)$ est croissante

Exemple 30.12.

On peut démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$ est croissante en justifiant que la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est une fonction croissante sur $[0\,,+\infty[$.

3 Quelques exemples de suites numériques

3.1 Suites arithmétiques

Définition 30.13. *Suite arithmétique*

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un nombre réel. Le nombre r s'appelle la *raison* de la suite arithmétique.

Remarque 30.14.

Une suite arithmétique est donc définie par son premier terme u_0 et sa raison r. On a alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r = u_0 + 2r \\ u_3 &= u_2 + r = u_0 + 3r \\ &\dots \end{aligned}$$

Propriété 30.15.

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raions r, alors, pour tout n, on a $u_n = u_0 + nr$.

Exemple 30.16.

Soit u la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. Exprimer le terme u_n de la suite en fonction de n. En déduire les 10 premières valeurs de la suite.

Solution. ◊ On a $u_n = 3n + 1$ et on obtient le tableau de valeurs suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

□

Propriété 30.17.

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il existe deux nombres réels r et b tels que, pour tout n, $u_n = b + nr$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme b.

Exemple 30.18.

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{152n+30}{6}$. Montrer que cette suite est arithmétique.

Solution. ◊ On a, pour tout n, $u_n = \frac{76}{3}n + 5$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{76}{3}$ et de premier terme 5. □

Remarques 30.19.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Si $n > m > 0$ alors :
$$u_n = u_m + (n-m)r.$$
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier trerme u_0. Pour tout n, on a : $u_{n+1} - u_n = r$. On a ainsi :
   - si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante ;

– si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.

Propriété 30.20.
Soit S_n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r. On a :

$$S_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Démonstration. ♢ Soit :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \quad (1)$$
$$S_n = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0 \quad (2)$$

On en déduit que :

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0).$$

On a :

$$\begin{aligned} u_0 + u_n &= u_0 + (u_0 + nr) = 2u_0 + nr \\ u_1 + u_{n-1} &= (u_0 + r) + (u_0 + (n-1)r) = 2u_0 + nr \\ u_2 + u_{n-2} &= (u_0 + 2r) + (u_0 + (n-2)r) = 2u_0 + nr \\ &\cdots \end{aligned}$$

Toutes ces sommes sont égales à $u_0 + u_n$. On obtient :

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n).$$

La somme précédente comporte $(n+1)$ termes égaux à $(u_0 + u_n)$, d'où :

$$2S_n = (n+1)(u_0 + u_n).$$

□

Exemple 30.21.
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 30n - 6$. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

On a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)(15n - 6).$$

Remarque 30.22.
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique s'obtient par la formule :

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Conséquence 30.23.
La suite des entiers naturels non nuls est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 :
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

Démonstration. ◊ On peut montrer la formule (3) par récurrence.

Initialisation Pour $n = 1$, la formule est valable :
$$\frac{2 \times 1}{2} = 1.$$

Hérédité On suppose que, pour un entier donné n, la formule
$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
est vérifiée. On vérifie que la formule est vraie au rang $n + 1$:
$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + 1 &= 1 + 2 + \cdots + n + n + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$
La formule est donc vérifiée pour le rang $n + 1$.

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

3.2 Suites géométriques

Définition 30.24. *Suite géométrique*

La suite (u_n) est *géométrique* si, pour tout $u_{n+1} = q u_n$, où q est un nombre réel non nul. Le nombre q s'appelle la *raison* de la suite géométrique.

Remarques 30.25.

1. Si les termes de la suite ne sont pas nuls, alors, pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
2. Une suite géométrique est définie par son premier terme u_0 et sa raison q. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 q \\ u_2 &= u_1 q = u_0 q^2 \\ u_3 &= u_2 q = u_0 q^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Propriété 30.26.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q (q non nul) alors, pour tout n, on a : $u_n = u_0 q^n$.

Exemple 30.27.
Soit u la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3. Exprimer le terme u_n de la suite en fonction de n. En déduire les 10 premiers termes de la suite.

$\Diamond$ On a : $u_n = 3^n$ et on obtient le tableau de valeurs suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Propriété 30.28.
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il existe deux nombres a et q non nuls tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq^n$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.

Exemple 30.29.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 5 \times \frac{76^n}{3^n}$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

$\Diamond$ On a :

$$u_n = 5 \times \left(\frac{76}{3}\right)^n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{76}{3}$ et de raison 5.

Remarque 30.30.
Soit la suite géométrique (u_n) définie par $u_n = q^n$ ($q > 0$). Pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$. Donc :

- si $q > 1$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- si $q = 1$ alors $u_{n+1} - u_n = 0$ et la suite (u_n) est constante.

Propriété 30.31.
Soit S_n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q (q différent de 1). On a :

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Démonstration. ◊ Soit S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite. On peut écrire :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$qS_n = u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}$$

Alors $S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1}$ soit $(1-q)S_n = u_0 - u_{n+1}$, d'où :

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{car } q \neq 1.$$

□

Exemple 30.32.
Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{76}{3}$ et de premier terme 5. Calculer $S_3 = u_0+u_1+u_2+u_3$.

◊ On veut calculer la somme $S_3 := u_0 + u_1 + u_2 + u_3$. On a :

$$S_3 = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{76}{3}\right)^4}{1 - \frac{76}{3}} = \frac{2285075}{27}.$$

Conséquence 30.33.
Pour tout nombre réel $x \neq 1$, on a :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Exemple 30.34.
◊

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

3.3 Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

Méthode 30.35. ◊ *Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique*

1. **Écrire le terme général sous la forme** $u_n + nr = u_0$
   – Montrer qu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout n, $u_n = nr + u_0$.
   – Conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
2. **Étudier la différence** $u_{n+1} - u_n$
   – Calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et montrer qu'elle est constante et égale à r.
   – Conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
3. **Écrire le terme sous la forme** $u_n = u_0 q^n$
   – Montrer qu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout n, $u_n = u_0 q^n$.
   – Conclure que (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
4. **Trouver une relation de la forme** $u_{n+1} = qu_n$
   – Montrer que l'on peut écrire $u_{n+1} = qu_n$ (avec $q \neq 0$).
   – Conclure que (u_n) est une suite géométrique de raison q.

Remarque 30.36.
◊ Dans la méthode 4, on peut montrer aussi que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant sous conditions que tous les termes de la suite soient non nuls.

Exemples 30.37.
◊

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -5n + 12$ et la suite (v_n) vérifiant pour tout n, $v_n = 2u_n + n + 5$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = \frac{nv_n+4}{n+1}$ et de premier terme $v_1 = 1$. Montrer que la suite (u_n) vérifiant $u_n = nv_n$ est une suite arithmétique.
3. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 2(-5)^{n+1}\left(\frac{10}{3}\right)^n$ est une suite géométrique.
4. Soit la suite (v_n) de premier terme v_0 avec $v_0 = 3$ et définie par $v_{n+1} = -7v_n + 8$. Montrer que la suite (u_n) vérifiant, pour tout n, $u_n = v_n - 1$ est une suite géométrique.

4 Suites minorées, majorées

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+2}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \frac{2\times 0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \simeq 0{,}5\\
u_1 &= \frac{2\times 1+1}{1+2} = \frac{3}{3} \simeq 1\\
u_2 &= \frac{2\times 2+1}{2+2} = \frac{5}{4} \simeq 1{,}25\\
u_3 &= \frac{2\times 3+1}{3+2} = \frac{7}{5} \simeq 1{,}4\\
u_4 &= \frac{2\times 4+1}{4+2} = \frac{9}{6} \simeq 1{,}5\\
u_5 &= \frac{2\times 5+1}{5+2} = \frac{11}{7} \simeq 1{,}57
\end{aligned}
$$

On montre que $0 \leq u_n \leq 2$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ donc $\frac{2n+1}{n+2} > 0$ donc $u_n > 0$.

2. D'autre part, on peut écrire :

$$u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+1-2n-4}{n+2} = \frac{-3}{n+2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+2 > 0$ donc $\frac{-3}{n+2} < 0$ donc $u_n - 2 < 0$ donc $u_n < 2$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 2$. Ainsi, on peut penser que quand n est très grand, u_n est très proche de 2 (on dira que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$ est 2).

Définition 30.38.

Si pour tout entier n, on a $u_n \leq M$, on dit que la suite (u_n) est *majorée* par M. M est un *majorant* de la suite (u_n).

Si pour tout entier n, on a $u_n \geq m$, on dit que la suite (u_n) est *minorée* par m. m est un *minorant* de la suite $(u_n)_n$.

On dit que la suite (u_n) est *bornée* par m et M si elle est *minorée* par m et *majorée* par M.

Exemple 30.39.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 18$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1. On calcule u_1, u_2 et u_3 :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2}\times 18 + 3 = 9 + 3 = 12\\
u_2 &= \frac{1}{2}\times 12 + 3 = 6 + 3 = 9\\
u_3 &= \frac{1}{2}\times 9 + 3 = \frac{9}{2} + \frac{6}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5.
\end{aligned}
$$

2. On peut calculer $u_4, u_5, \dots, u_{10}$ sur une calculatrice TI-82 en faisant :

```
18 -> A
A * 1/2 + 3 -> A
```

où `->` peut être obtenu en tapant sur la touche `STO¿`. Il suffit ensuite d'appuyer plusieurs fois sur la touche `ENTER` pour obtenir les valeurs approchées successives des termes de la suite :

```
6.75
6.375
6.1875
6.09375
6.046875
6.0234375
6.01171875
```

3. Supposons $u_n \geq 0$, alors $\frac{1}{2}u_n \geq 0$ donc $\frac{1}{2}u_n + 3 \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 0$. Donc si u_n est positif alors u_{n+1} est positif. On sait que u_0 est positif. On peut en déduire que u_1 positif.
Sachant que u_1 est positif, on en déduit que u_2 est positif. Sachant que u_2 est positif, on en déduit que u_3 est positif. En poursuivant le raisonnement, on peut conclure que u_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On montre que (u_n) est décroissante. Supposons que $u_n \geq 6$ alors $\frac{1}{2}u_n \geq 3$ donc $\frac{1}{2}u_n + 3 \geq 6$ donc $u_{n+1} \geq 6$. Donc si $u_n \geq 6$ alors $u_{n+1} \geq 6$. On sait que $u_0 = 18$ donc $u_0 \geq 6$. On peut en déduit que $u_1 \geq 6$, etc. On conclut alors que $u_n \geq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n.$$

On sait que $u_n \geq 6$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\frac{1}{2}u_n \geq 3$ donc $-\frac{1}{2}u_n \leq -3$ donc $3 - \frac{1}{2}u_n \leq 0$. On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

5. La suite (v_n) est définie par $v_n = 6 + \frac{12}{2^n}$. On a :

$$\begin{aligned}
v_0 &= 6 + \frac{12}{2^0} = 6 + \frac{12}{1} = 6 + 12 = 18 \\
v_1 &= 6 + \frac{12}{2^1} = 6 + \frac{12}{2} = 6 + 6 = 12 \\
v_2 &= 6 + \frac{12}{2^2} = 6 + \frac{12}{4} = 6 + 3 = 9 \\
v_3 &= 6 + \frac{12}{2^3} = 6 + \frac{12}{8} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

6. On peut écrire $v_{n+1} = 6 + \frac{12}{2^{n+1}}$ et

$$\frac{1}{2}v_n + 3 = \frac{1}{2} \times \left(6 + \frac{12}{2^n}\right) + 3 = 3 + \frac{1}{2} \times \frac{12}{2^n} + 3$$

donc

$$\frac{1}{2}v_n + 3 = 6 + \frac{12}{2^{n+1}}.$$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme on a d'autre part $v_0 = 18 = u_0$, les suites (u_n) et (v_n) sont définies par le même premier terme et la même relation de récurrence. Donc : la suite (v_n) est identique à la suite (v_n).

5 Limites de suites

5.1 Notion de limite infinie d'une suite

Définition 30.40. *Limite infinie d'une suite*

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ si, pour tout nombre A positif, l'intervalle $[A\,,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, pour tout nombre A positif, l'inégalité $u_n \geq A$ est vraie à partir d'un certain rang.

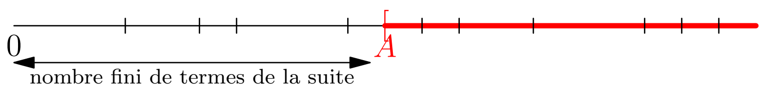


FIGURE 2 – Limite infinie d'une suite (en $+\infty$)

On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Remarque 30.41.

On définit de manière analogue une suite qui tend vers $-\infty$ et on note

$$\lim_{n\to-\infty} u_n = -\infty.$$

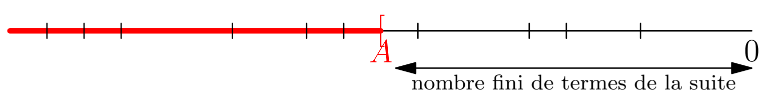


FIGURE 3 – Limite infinie d'une suite (en $-\infty$)

Propriétés 30.42. *Limite des suites de référence*

1. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$,
2. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$,
3. $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$,
4. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Propriété 30.43. *Limites et opposés*

$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ équivaut à $\lim_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$.

5.2 Limites finies - Suites convergentes

Définition 30.44.

On dit que la suite (u_n) *tend vers un nombre* ℓ si tout intervalle du type $]\ell - r\,,\ell + r[$ (avec $r > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

FIGURE 4 – Limite finie d'une suite

Remarque 30.45.

Dire que la suite (u_n) tend vers un nombre ℓ, revient aussi à dire que :

1. L'inégalité $|u_n - \ell| < r$ est vraie à partir d'un certain rang ;

2. La double inégalité $\ell - r < u_n < \ell + r$ est vraie à partir d'un certain rang.

Exemple 30.46.

Soit la suite définie par $u_n = \frac{3}{n}$. Pour $r > 0$, $0 < \frac{3}{n} < r$ est équivalent à $n > \frac{3}{r}$. Donc, pour n assez grand, $-r < u_n < r$. La suite (u_n) tend vers 0.

Propriété 30.47.

Si une suite (u_n) a une limite finie ℓ, alors la limite ℓ est unique.

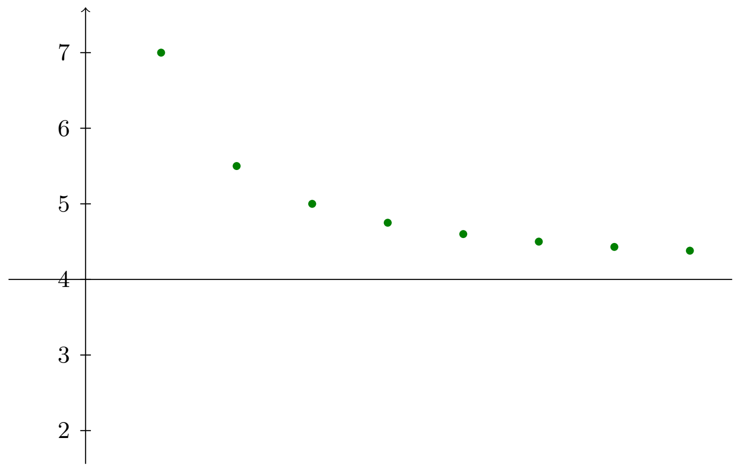
Si une suite (u_n) a une limite ℓ, on dit aussi que la suite est convergente ou qu'elle converge vers ℓ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Propriété 30.48.

Dire qu'une suite (u_n) tend vers un nombre ℓ équivaut à dire que la suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0.

Exemple 30.49.

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4n+3}{n}$. L'observation de la courbe représentant la suite dans un repère orthogonal montre que les termes de la suite sont de plus en plus proches du nombre 4.



On a :

$$|u_n - 4| = \frac{3}{n} \qquad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$$

donc la suite (u_n) tend vers le nombre 4.

Propriété 30.50. *Limites de suites de référence*

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Définition 30.51.

On appelle *suite divergente* une suite qui ne converge pas.

Remarque 30.52.

Si une suite diverge alors, soit la suite a une limite égale à $+\infty$, soit la suite a une limite égale à $-\infty$, soit la suite n'a pas de limite.

Exemple 30.53.

La suite $(-1)^n$ est une suite divergente. La limite de cette suite ne peut être que 1 ou -1. Or, la suite admet presque tous ses termes dans l'intervalle $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ et également dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. Il est donc impossible que 1 ou -1 soient limites de la suite.

5.3 Limites et opérations algébriques

Propriété 30.54. *Limite d'une somme de suites*

si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Remarque 30.55.
L'expression « forme ind. » (ou « forme indéterminée ») signifie que l'on ne peut pas conclure directement et une étude spécifique est nécessaire.

Propriété 30.56. *Limite d'un produit de suites*

si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	0
si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) =$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Propriété 30.57. *Limite de l'inverse d'une suite*

si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 avec $u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	0
alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Exemples 30.58.

1. Soit la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \left(\frac{4n+3}{n}\right)\left(3 + \frac{5}{n^3}\right).$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^3} = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{5}{n^3}\right) = 3.$$

On a montré précédemment que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+3}{n} = 4.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 4 \times 3 = 12$.

2. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = n^3\sqrt{n} + \frac{1}{n^2} + 3$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\sqrt{n} = +\infty.$$

De plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} + 3 = 3.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\sqrt{n} + \left(\frac{1}{n^2} + 3\right) = +\infty.$$

3. Soit la suite (z_n) définie par $z_n = \frac{1}{n^5\sqrt{n}}$. On écrit $n^5 = n^3n^2$ et on montre que $\lim_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$, d'où $\lim_{n\to+\infty} n^5\sqrt{n} = +\infty$. On a, d'après la propriété précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5\sqrt{n}} = 0.$$

5.4 Limites et comparaison de suites

Propriété 30.59.
Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration. ♢ Par l'absurde, supposons qu'à partir du rang n_0, $u_n \leq v_n$ e que $\ell > \ell'$. Soit $r = \frac{|\ell-\ell'|}{3}$, $I :=]\ell - r, \ell + r[$ et $I' =]\ell' - r, \ell' + r[$. I et I' sont bien disjoints c'est-à-dire $I \cap I' = \emptyset$.

I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_1, I' contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un rang n_2.

Soit N le maximum de n_0, n_1 et n_2 alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \in I$ et $v_n \in I$, d'où :

$$v_2 < \ell' + r < \ell - r < u_n,$$

ce qui est absurde car, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. □

Theoreme 30.60. *Théorème des gendarmes*
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang, $u_n \leq w_n \leq v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite ℓ, alors la suite (w_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

♢ *Démonstration du théorème des gendarmes.* Soit $r > 0$. A partir d'un certain rang, $\ell - r < u_n < \ell + r$. De même, pour la suite (v_n), à partir d'un certain, $\ell - r < v_n < \ell + r$. Donc, à partir d'un certain rang,

$$\ell - r < u_n \leq w_n \leq v_n < \ell + r.$$

Finalement, pour n assez grand,

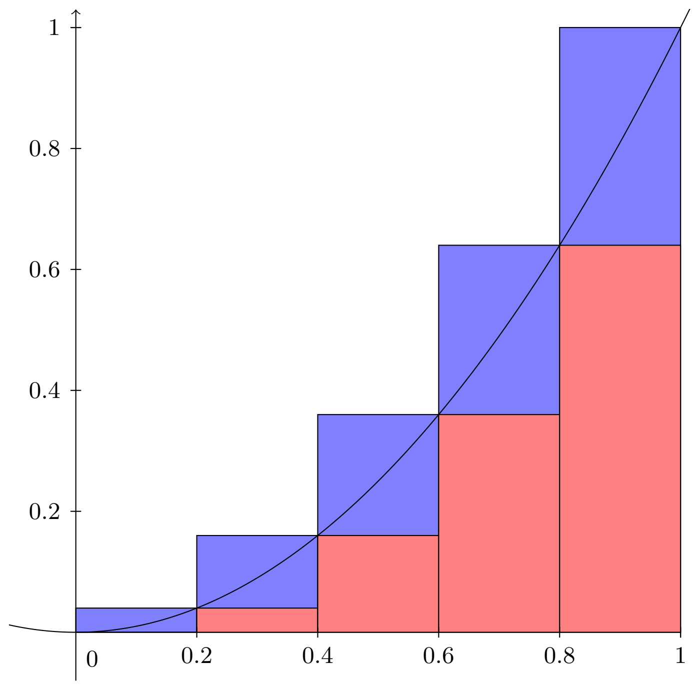
$$\ell - r < w_n < \ell + r.$$

□

Exemple 30.61.
On considère la fonction :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

et on veut calculer l'aire $\mathcal{A}$ entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre 0 et 1.



Soit (u_n) l'aire des rectangles inférieurs et (v_n) l'aire des rectangles supérieurs.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{0}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} v_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{3}$$

et comme $u_n \leq A \leq v_n$, par le théorème des gendarmes, $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$, ce qui correspond bien à $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$.

Propriétés 30.62.

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
   - Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   - Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq v_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple 30.63.

Soit la suite définie par $u_n = 7 + \frac{\sin n}{n}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 7 - \frac{1}{n} \leq 7 + \frac{\sin n}{n} \leq 7 + \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(7 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(7 - \frac{1}{n}\right) = 7.$$

Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 7$.

5.5 Limites des suites arithmétiques et géométriques

Définition 30.64. *Suites arithmétiques*

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un nombre réel. Le nombre r s'appelle la *raison* de la suite arithmétique.

Propriété 30.65.

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout n, on a $u_n = u_0 + nr$.

Définition 30.66. *Suites géométriques*

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* si, pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$, où q est un nombre réel non nul qu'on appelle la *raison* de la suite géométrique.

Propriété 30.67.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q (q non nul) alors pour tout n, on a $u_n = u_0 q^n$.

Propriété 30.68.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Propriété 30.69.
Soit (u_n) la suite géométrique de raison q définie par $u_n = q^n$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) est divergente.

Exemples 30.70.
1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(350 \times 0,95^n) = 0$. On a $0 < 0,95 < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$. La propriété sur le produit des limites permet de conclure.
2. $\lim_{n\to+\infty}(-3 \times 1,01^n) = -\infty$. On a $1,01 > 1$, $\lim_{n\to+\infty} 1,01^n = +\infty$. La propriété sur le produit des limites permet de conclure.

5.6 Déterminer la limite d'une suite

Méthode 30.71. *Déterminer la limite d'une suite*
1. Exprimer la suite en fonction de suites dont on connaît la limite et utiliser les propriétés sur les opérations algébriques.
2. Encadrer la suite par deux suites ayant même limite.
3. Majorer l'écart, entre le terme général de la suite et la limite, par le terme général d'une suite convergent vers 0.

Exemples 30.72.
1. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{9n^2 - 5n + 2}{n^2}.$$
On a :
$$u_n = \frac{9n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} + \frac{2}{n^2} = 9 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}.$$
Les suites $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ convergent vers 0. On a donc :
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{5}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0.$$
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 9$.
2. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{5n^3 - 4n + 6}.$$
Pour cela, on transforme l'expression de (u_n) comme pour la recherche de la limite en

$+\infty$ d'une fraction rationnelle :

$$u_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{5n^3 - 4n + 6} = \frac{n^3(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3})}{n^3(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3})} = \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3}}.$$

En procédant comme dans l'exemple 1, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3}\right) = 5.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{5}$.

3. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{5n^2 + (-1)^n}{n^2 + 2}.$$

Comme $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, on a :

$$5n + 1 \leq 5n^2 + (-1)^n \leq 5n^2 + 1,$$

d'où par encadrement

$$\frac{5n^2 - 1}{n^2 + 2} \leq u_n \leq \frac{5n^2 + 1}{n^2 + 2}.$$

On a :

$$\frac{5n^2 + 1}{n^2 + 2} = \frac{n^2(5 + \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{2}{n^2})} = \frac{5 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(5 + \frac{1}{n^2}\right) = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) = 1.$$

En utilisant le quotient, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 + 1}{n^2 + 2} = 5.$$

On montre de même que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^2 + 2} = 5.$$

La suite est donc encadrée par deux suites convergentes vers le même nombre 5. Le « théorème des gendarmes » implique alors que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 5.$$

4. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n - \sin n}{n}.$$

On a, pour tout n,

$$|u_n - 1| = \left|-\frac{\sin n}{n}\right| = \left|\frac{\sin n}{n}\right|.$$

On en déduit que, pour tout n, $|u_n - 1| \leq \frac{1}{n}$ avec

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

5.7 Suites monotones et limites

Theoreme 30.73.

1. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
2. Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. $\Diamond$ Soit (u_n) une suite croissante non majorée et $a \in \mathbb{R}$. Posons $I =]a\,, +\infty[$. Comme (u_n) est non majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} > a$. De plus, (u_n) est croissante, d'où

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq u_{n_0} < a.$$

I contient tous les termes de (u_n) à partir du rang n_0. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

$\square$

Theoreme 30.74.

1. Toute suite croissante majorée converge.
2. Toute suite décroissante minorée converge.

$\Diamond$ *Démonstration (admise en TS).* Soit (u_n) une suite réelle, croissante et majorée. On considère l'ensemble $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Comme (u_n) est majorée, E l'est également. De plus, E est non vide. Or, toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure. Soit $\alpha = \sup E$.

Montrons que (u_n) converge vers α. Soit $\varepsilon > 0$, d'après la caractérisation de la borne supérieure,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leq \alpha.$$

Comme (u_n) est croissante,

$$\forall n \geq n_0, \quad \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \alpha.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.$$

$\square$

6 Compléments

6.1 Suites adjacentes

6.1.1 Résultats sur les suites adjacentes

Définition 30.75.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles vérifient les trois conditions suivantes :

1. (u_n) est croissante ;
2. (v_n) est décroissante ;
3. $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Theoreme 30.76. *Théorème des suites adjacentes*
Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. ♢ Dans un premier temps, montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Pour cela, posons $w_n = v_n - u_n$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) \\ &= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0 \end{aligned}$$

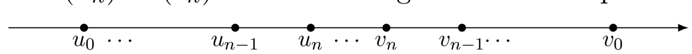
car

- (u_n) est croissante : $u_{n+1} - u_n \geq 0$
- (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n \leq 0$

donc (w_n) est décroissante vers 0. De ce fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq u_n.$$

Les termes des suites (u_n) et (v_n) sont donc rangés comme indiqué sur la figure ci-dessous :



La suite (u_n) est ainsi croissante et majorée par v_0. Le théorème des suites croissantes majorées permet de conclure que la suite (u_n) converge vers une limite λ.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0. On peut conclure de même que la suite (v_n) converge vers une limite λ'.

Or

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda'$. □

Exemple 30.77.
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies de la manière suivante :

$$u_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right)}{10^n}, \quad v_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1}{10^n}.$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right)}{10^{n+1}} - \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right)}{10^n} = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) - 10\mathrm{E}\left(10^n x\right)}{10^{n+1}}.$$

Or, $\mathrm{E}\left(10^n x\right) \leq 10^n x$ donc $10\mathrm{E}\left(10^n x\right) \leq 10^{n+1} x$. Comme $\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1} x$, on en déduit que :

$$\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) \geq 10\mathrm{E}\left(10^n x\right).$$

Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$ et $(u_n)_n$ est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1}{10^{n+1}} - \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1}{10^n} = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1 - 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1)}{10^{n+1}}.$$

Or, $10^n x < \mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1$ donc $10^{n+1} x < 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1)$. Comme $\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $10^{n+1} x$, on a :

$$\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1 \leq 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right) + 1 - 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right) + 1) \leq 0$$

ainsi, $v_{n+1} \leq v_n$ donc $(v_n)_n$ est décroissante.

On a : $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$, d'où $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

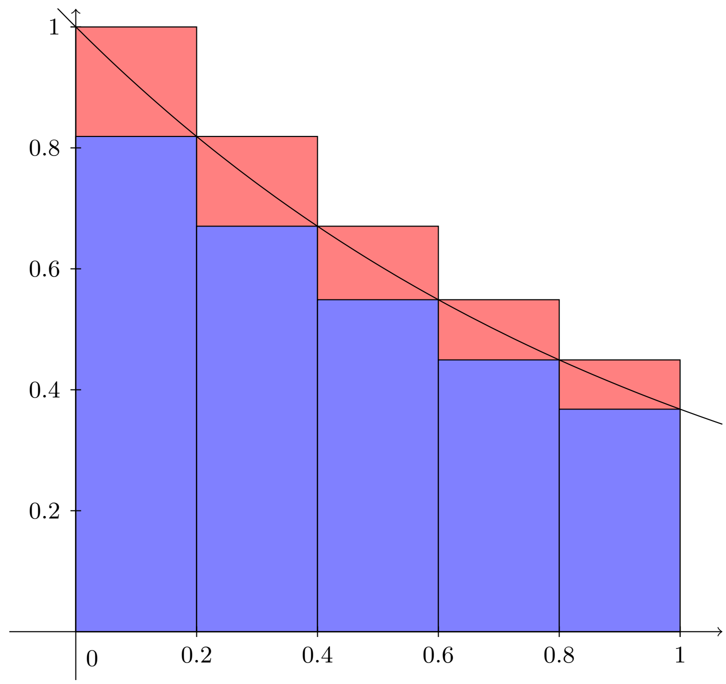
Finalement, les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Nous venons de démontrer que tout nombre réel x est limite d'une suite de nombres rationnels. Il s'agit de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

6.1.2 Aire sous la courbe

Soit f une fonction continue ou en escalier, positive et monotone sur l'intervalle $I = [a, b]$ et $\mathcal{A}$ désignant l'« aire sous la courbe ». La méthode des rectangles, par exemple, permet d'encadrer $\mathcal{A}$.

On se place dans le cas où f est décroissante sur $I = [0, 1]$. On partage I en N intervalle de même amplitude $\frac{1}{N}$ alors :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$



Si à tout entier naturel non nul n, on associe un partage régulier de $I = [0\,,1]$ défini par son pan p_n (on a alors $N = \frac{1}{p_n}$), en posant $a_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=N} f\left(\frac{k}{N}\right)$ et $b_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)$, on définit deux suites (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n \leq \mathcal{A} \leq b_n$.

Question : Est-ce que les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies sont adjacentes ?

Si [1] $p_n = \frac{1}{n}$, on ne peut pas conclure à la monotonie des suites (a_n) et (b_n) par des considérations d'aire car les $n+1$ rectangles obtenus à l'étape $n+1$ sont sans lien direct avec les n rectangles obtenus à l'étape n et les suites (a_n) et (b_n) ne sont pas nécessairement adjacentes.

Contre exemple : Soit f la fonction en escalier définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1/2 & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Alors, on montre que :

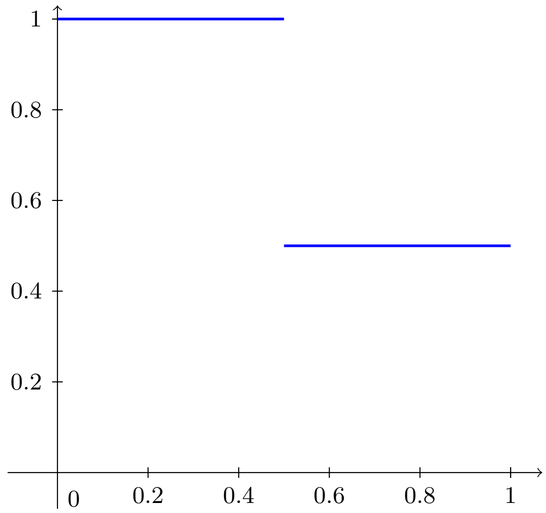
$$a_2 = \mathcal{A} \quad \text{et} \quad a_3 < \mathcal{A}$$

et plus généralement, pour tout entier naturel non nul k,

$$a_{2k} = \mathcal{A} \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \mathcal{A}.$$

La suite (a_n) n'est donc pas croissante.

1. à l'étape n, on partage l'intervalle $[0\,,1]$ en $N = n$ intervalles de même amplitude



Dans ce cas où $p_n = \frac{1}{n}$, que les suites (a_n) et (b_n) soient adjacentes ou ne le soient pas, les justifications ne sont en général pas simples, on peut toutefois trouver quelques fonctions telles que la fonction carrée ou la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ pour lesquelles on obtient des suites dont on peut démontrer qu'elles sont bien adjacentes.

Si[2] $p_n = \frac{1}{2^n}$ alors, dans le cas où f est monotone sur I, des considérations d'aire permettent d'établir la monotonie des suites (a_n) et (b_n) et de montrer qu'elles sont bien adjacentes.

Cependant si l'on cherche à exhiber un exemple correspondant à ce cas, les expressions de (a_n) et (b_n) deviennent vite très compliquées étant donné que $N = 2^n$.

6.2 Suites définies par récurrence

Définition 30.78. *Suite définie par une relation de récurrence*

Une suite définie par récurrence est une suite que l'on connaît par son terme initial u_0 ou u_1 et une relation qui lie un terme quelconque en fonction du précédent ou des précédents.

Il existe différents types de suite définie par récurrence :

1. Suite définie par une relation de récurrence du type
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
2. Suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$.
3. Suites définies par une relation de la forme :
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$
et leurs deux premiers termes.
4. Suite homographique : $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$.
5. . . .

2. à chaque étape on multiplie le nombre d'intervalles du partage par 2 et $N = 2^n$.

Si la suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et par :

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

(avec $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$), il n'y a pas de formule permettant de calculer directement u_n en fonction de n, mais on dispose d'une relation (dite de récurrence) permettant de calculer le terme de rang $n+1$ à partir de celui de rang n. Ainsi, en connaissant le premier terme u_0, on peut calculer le terme suivant u_1, puis connaissant u_1, on peut calculer u_2.

Exemples 30.79.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3 \times u_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \times u_0 = 3 \times 2 = 6 \\ u_2 &= 3 \times u_1 = 3 \times 6 = 18 \\ u_3 &= 3 \times u_2 = 3 \times 18 = 52. \end{aligned}$$

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{4 + u_n}$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\sqrt{4 + u_0} = 2\sqrt{4 - 1{,}5} \simeq 3{,}16 \\ u_2 &= 2\sqrt{4 + u_1} \simeq 2\sqrt{4 + 3{,}16} \simeq 5,35. \end{aligned}$$

Dans un repère orthonormé, on trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $y = x$. On part de u_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne u_1. Pour déterminer $u_2 = f(u_1)$, il nous faut rabattre u_1 sur l'axe des abscisses, pour cela, on utilise la droite d'équation $y = x$. Dès lors, u_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse u_1.

Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant u_2 sur l'axe des abscisses, u_3 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisses u_2…

Exemple 30.80. *Suite de Héron*

Soit la suite u_n définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0\,,+\infty\right[\\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Dans un premier temps, on montre que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$$

donc, $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} - u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - u_n^2}{u_n}\right) \leq 0 \quad \text{car } \forall n \geq 1,\ u_n^2 \geq 2.$$

d'où (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

(u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, par conséquent elle est convergente mais on ne peut conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Pour cela, on pose :

$$f \quad : \quad]0\,,+\infty[\quad \to \quad \mathbb{R}$$
$$x \quad \mapsto \quad \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

f est dérivable sur $I =]0\,,+\infty[$ et :

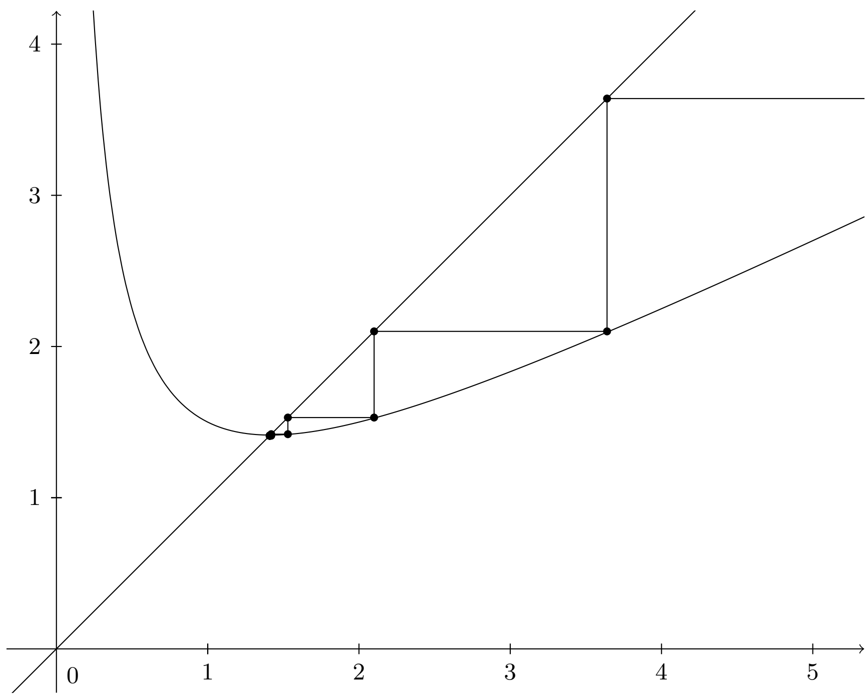
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}\,|x-y|\,.$$

f est $\frac{1}{2}$-contractante. Par le théorème du point fixe, (u_n) converge vers $\sqrt{2}$, qui est l'unique point fixe de f dans I.

On se sert de la suite de Héron pour approximer le nombre irrationnel $\sqrt{2}$



Le tableau suivant donne des approximations de $\sqrt{2}$ à partir des premiers termes de (u_n). On remarque pour avoir une bonne approximation à 10^{-4}, on doit choisir u_6 (ou les termes suivants).

n	u_n	erreur
0	$17,807113$	$16,392899$
1	$8,959714$	$7,545500$
2	$4,591467$	$3,177254$
3	$2,513291$	$1,099315$
4	$1,654115$	$0,240397$
5	$1,431677$	$0,017463$
6	$1,414320$	$0,000106$
7	$1,414213$	10^{-8}

6.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 30.81. *Suite arithmético-géométriques*

On dit qu'une suite (u_n) est *arithmético-géométrique* s'il existe deux réels a et b tels que $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple 30.82.

La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et de premier terme $u_0 = 1$ est arithmético-géométrique.

Remarque 30.83.

Une suite arithmético-géométrique n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

Exemple 30.84.

Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie, pour tout $n \geq 0$, par $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et de premier terme $u_0 = 5$. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \geq 0$, par $v_n = u_n - 3$ est une suite géométrique.

♢ On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \times 5 - 3 = 7 \\ u_2 &= 2 \times 7 - 3 = 11 \\ u_3 &= 2 \times 11 - 3 = 19. \end{aligned}$$

Soit la suite (v_n) définie, pour tout $n \geq 0$, par : $v_n = u_n - 3$. On a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 \\ &= 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$. On peut donc en conclure que, pour tout n,

$$v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n.$$

Ainsi, $u_n = v_n + 3$ et on peut en déduire que $u_n = 2 \times 2^n + 3$, pour tout n.

En résumé, le schéma de l'étude d'une suite arithmético-géométrique est toujours le même :

Méthode 30.85. *Étude d'une suite arithmético-géométrique*

1. Introduction d'une suite auxiliaire (v_n) définie à l'aide de la suite (u_n).
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. En déduire une formule exprimant v_n en fonction de n.
4. À partir de la relation entre (v_n) et (u_n), en déduire une formule générale exprimant u_n en fonction de n.

Pour fabriquer cette suite auxiliaire, voici comment orn procède. On suppose qu'on doit étudier la suite arithmético-géométrique (u_n) de premier terme u_0 donné et défini, pour tout $n \geq 0$, par : $u_{n+1} = au_n + b$ (on suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 0$). On résout l'équation $x = ax + b$ et on note ℓ la solution de cette équation. On a alors $\ell = a\ell + b$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{cases}$$

et en soustrayant, $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$. On pose alors $v_n = u_n - \ell$ et on obtient ainsi que (v_n) est une suite géométrique.

6.4 Méthode de dichotomie

Proposition 30.86.
Soit f définie et continue sur $[a\,,b]$ et telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors f admet au moins une racine dans l'intervalle $[a, b]$.

Démonstration. $\Diamond$ On utilise le principe de dichotomie : on définit une suite (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$ et $v_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n & \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} & \text{si } f(u_n)f(\frac{u_n+v_n}{2}) \leq 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} & \text{et} \quad v_{n+1} = v_n & \text{si } f(u_n)f(\frac{u_n+v_n}{2}) \geq 0 \end{cases}.$$

Par construction, les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - v_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ce sont donc des suites adjacentes, qui convergent donc vers une limite dans $[a, b]$ que l'on note ℓ.

La continuité de f nous assure que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(\ell)$, donc en passant à la limite dans la relation $f(u_n)f(v_n) \leq 0$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n)f(v_n) \leq 0 \Rightarrow (f(\ell))^2 \leq 0 \Rightarrow f(\ell) = 0.$$

$\square$

Exemple 30.87.
En utilisant cette méthode de dichotomie, déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à l'aide de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ définie sur $[1\,, 2]$.

Démonstration. ♢ On peut créer la fonction suivante sur Xcas :

```
dicho(f,a,b,n):={
  local u,v,t,g;
  u := a;
  v := b;
  g := f;
  tantque v-u>10^(-n-1) faire
    t := (u+v)/2;
    si g(u)*g(t) < 0
      alors v := t
      sinon u := t
     fsi
  ftantque
  return evalf(u);
}:;
```

La fonction prend comme argument :
- la fonction considérée,
- les bornes de l'intervalle de définition,
- la précision souhaitée

La fonction crée deux suites (u_n) et (v_n) applique le principe de la dichotomie à condition que $v_n - u_n < \frac{1}{10^{n-1}}$.

On utilise la fonction avec les données de l'énoncé :

$$f : x \mapsto x^2 - 2 \quad \text{sur } [1, 2]$$

```
f := x -> x^2 - 2
      (x) -> x^2 - 2
dicho(x -> x^2-2,1,2,1)
      1.4140625
dicho(x -> x^2-2,1,2,2)
      1.4140625
dicho(x -> x^2-2,1,2,3)
      1.41418457031
dicho(x -> x^2-2,1,2,4)
      1.4142074585
dicho(x -> x^2-2,1,2,5)
      1.41421318054
```

□

6.5 Développement décimal d'un nombre réel

Theoreme 30.88.
Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe une unique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :
1. $\forall n \geq 1$, $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ et $a_0 \in \mathbb{Z}$,
2. il n'existe pas $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $a_n = 9$,

3.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

Démonstration. $\lozenge$ Soit u_n la valeur décimale approchée par défaut à x à 10^{-n} près. La double inégalité en (iii) se réduit alors à l'égalité :

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Soit $m = u_n 10^n \in \mathbb{N}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$u_n = \frac{m}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \Leftrightarrow m = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1}10 + a_n.$$

Cette dernière équation n'admet qu'une unique solution dans $\mathbb{Z} \times \{0, \ldots, 9\}^n$, par unicité de l'écriture en base 10.

On montre que les coefficients a_i sont indépendants du rang choisi. Autrement dit, montrons que $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont les mêmes au rang n et $n+1$. Supposons qu'on ait au rang $n+1$ la double inégalité :

$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} \leq x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Or, puisque $b_{n+1} \leq 9$, on aura nécessairement $\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leq \frac{1}{10^n}$, et notre double inégalité devient :

$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} \leq x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

L'unicité de la solution $(a_0, \ldots, a_n)$ de la relation du (iii) au rang n nous permet d'affirmer que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $a_i = b_i$.

On suppose enfin qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$ vérifie $a_n = 9$. Quitte à effectuer une multiplication par une combinaison linéaire de puissance de 10, on est ramené à étudier le cas particulier $0,99\overline{9}\ldots$. Or :

$$0,99\overline{9}\ldots = \sum_{n \geq 1} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10}\frac{10}{9} = 1$$

et l'inégalité (iii) n'est plus vraie pour tout n alors, car les membres de gauche et de droite sont égaux, ce qui est contradictoire. $\square$

Définition 30.89.

Dans ce cas, par passage à la limite :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

et l'on dit que c'est le *développement décimal illimité propre* de et on note de manière plus commode $x = a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$.