CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n° 32
Limite d'une fonction réele de variable réelle.

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 22 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Classes de première et terminale

Prérequis

Fonctions

Références

- G. Costantini, *Les limites*. Première S. URL : `http://bacamaths.net`.
- X. Delahaye, *Limites, Terminale S*. URL : `http://xmaths.free.fr/TS/cours/cours.php?nomcours=TSlimfcours&page=01`

Plan de la leçon

1 Introduction

Exemple 32.1.
On considère la fonction f définie sur $]1\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-1}.$$

1. Si on calcule les valeurs de f quand x deviennent très grand, on obtient :

x	2	5	10	50	100	1000	10000
$f(x)$	2	2,75	2,88889	2,97959	2,98989	2,99899	2,99989

   On constate que lorsque les nombres x devient de plus en plus grands, les nombres $f(x)$ s'approchent aussi près que voulu du nombre 3. On dire que la limite f en $+\infty$ est égale à 3.

2. Si on calcule maintenant les valeurs de la fonction lorsque la variable x s'approche de plus en plus de la valeur interdite 1 :

x	0,5	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1	1,2	1,5	2
$f(x)$	5	8	13	103	1003	10003	$\times$	−9997	−997	−97	−7	−2	1	2

   On dira alors que f n'a pas de limite ou mieux :
   - la limite de f en 1 à gauche est égale à $+\infty$
   - la limite de f en 1 à droite est égale à $-\infty$.

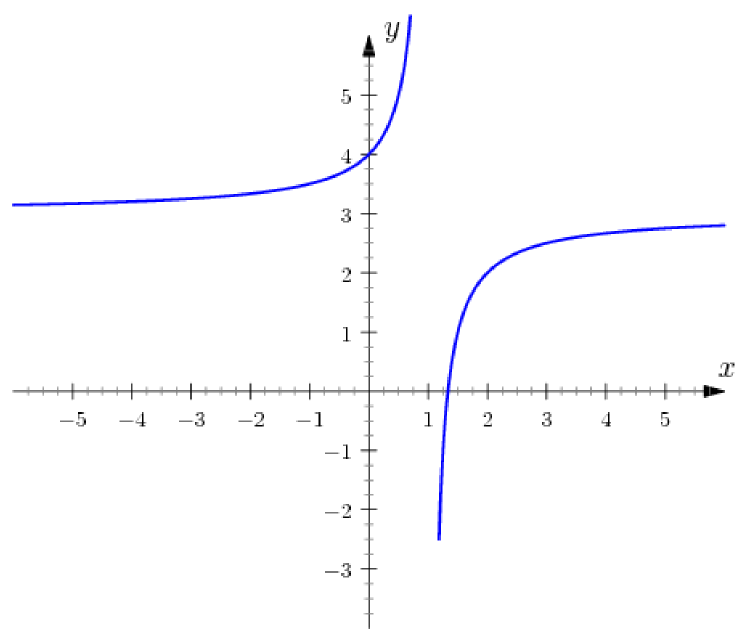


Figure 1 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$

2 Définitions

2.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

On donne tout d'abord des définitions intuitives de la limite :

Définition 32.2.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :

grands [a], on dit que f a *pour limite* $+\infty$ en $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

grands en valeurs absolue mais négatifs on dit que f *a pour limite* $-\infty$ en $+\infty$ et on note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

proches d'un réel ℓ [b], on dit que f *a pour limite* ℓ en $+\infty$ et on note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

a. Par l'expression « de plus en plus grand », il faut entendre « aussi grand que voulu ».
b. Par l'expression « de plus en plus proche », il faut entendre « aussi proche que voulu ».

On donne maintenant des définitions plus rigoureuses bien qu'elle ne soit pas utilisé en classe de Première S.

Définition 32.3.

1. Si pour tout réel M positif, il existe un réel A tel que :
$$x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M,$$
alors on dit que f *a pour limite* $+\infty$ en $+\infty$ et on note
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Si pour tout réel M négatif, il existe un réel A tel que :
$$x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M$$
alors on dit que f *a pour limite* $-\infty$ *en* $+\infty$ et on note
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

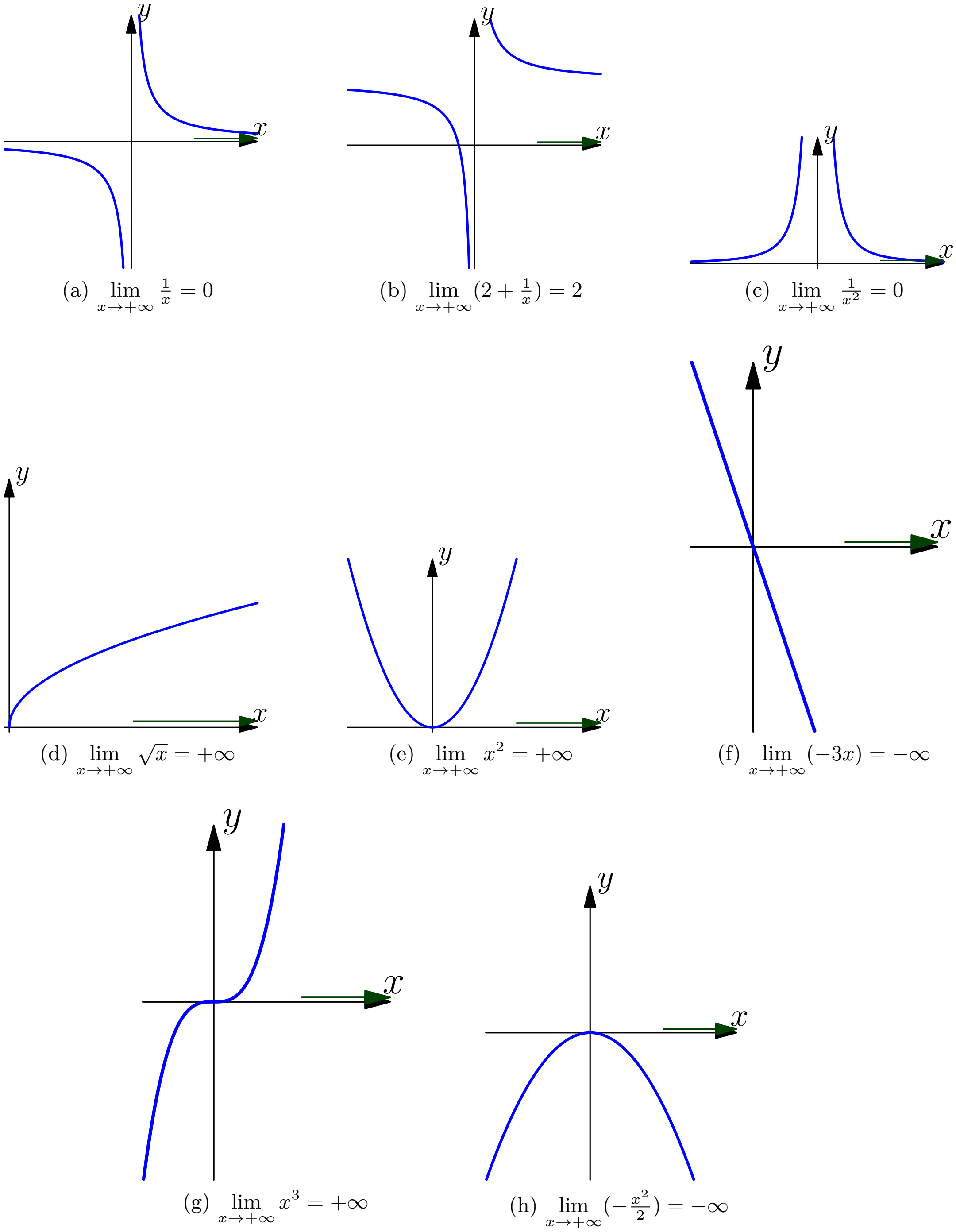
3. S'il existe un réel ℓ tel que pour tout intervalle $]\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon[$, $(\varepsilon > 0)$ et il existe un réel A tel que :
$$x \geq A \Rightarrow f(x) \in I.$$
Alors on dit que f a *pour limite* ℓ en $+\infty$ et on note
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

Exemples 32.4.

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$,
2. $\lim_{x \to +\infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2$,
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$,
4. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$,
5. $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$,
6. $\lim_{x \to +\infty} (-3x) = -\infty$,
7. $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$,
8. $\lim_{x \to +\infty} (-\frac{x^2}{2}) = - - \infty$.

Remarque 32.5.

Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$, c'est le cas, par exemple, pour la fonction sinus et cosinus.



(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

(b) $\lim_{x \to +\infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

(d) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

(e) $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

(f) $\lim_{x \to +\infty} (-3x) = -\infty$

(g) $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

(h) $\lim_{x \to +\infty} (-\frac{x^2}{2}) = -\infty$

FIGURE 2 – Limite d'une fonction en $+\infty$

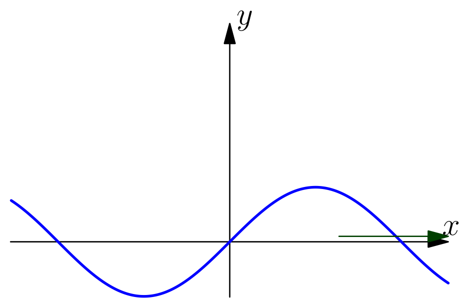


FIGURE 3 – La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$

2.2 Limite d'une fonction en $-\infty$

Définition 32.6.

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty\,, a[$. Lorsque $-x$ prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

proches d'un réel ℓ, on dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ et on note

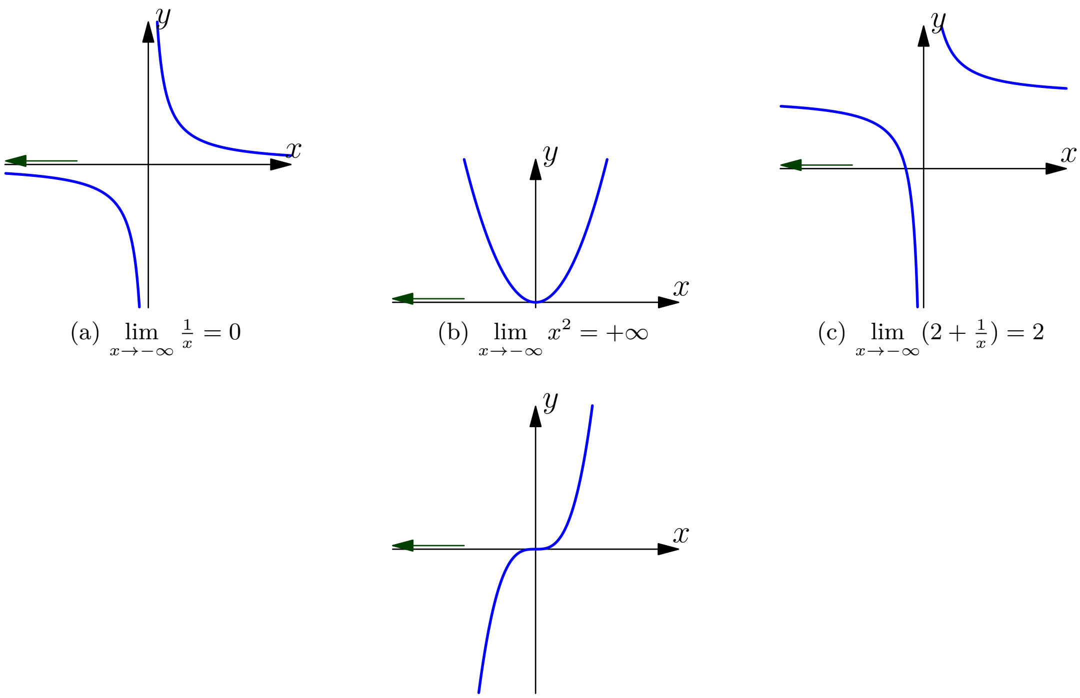
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

grands en valeurs absolue mais négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ et $-\infty$ et on note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemples 32.7.

1. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$,
2. $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$,
3. $\lim_{x\to-\infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2$,
4. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.



(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2+\frac{1}{x}) = 2$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

FIGURE 4 – Limite d'une fonction en $-\infty$

2.3 Limite d'une fonction en un réel a

Définition 32.8.

Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

proches d'un réel ℓ, on dit que f a pour limite ℓ en a et on note

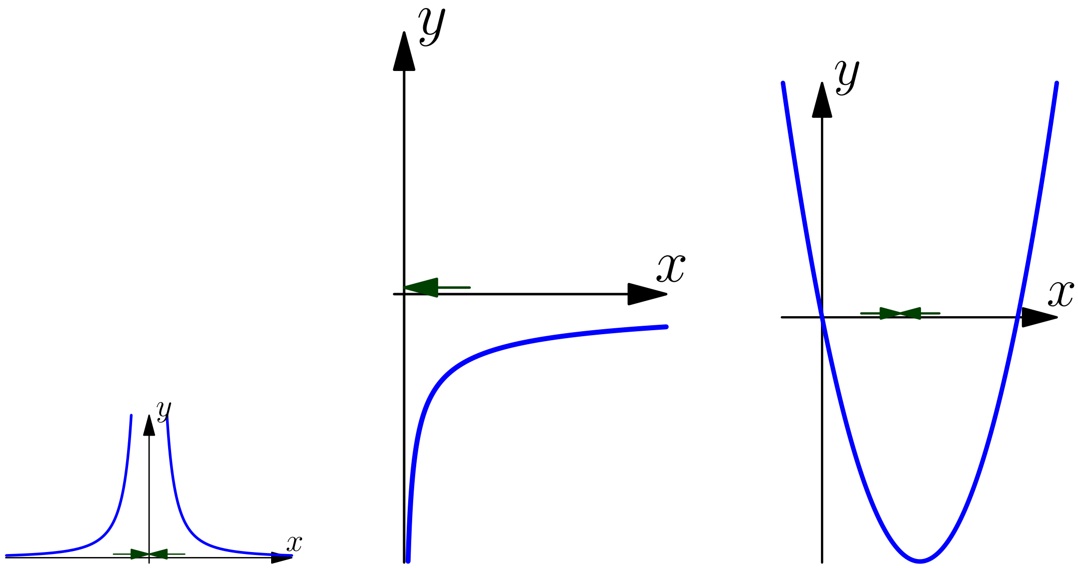
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

grands en valeur absolue mais négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Exemples 32.9.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,
2. $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$,
3. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 5x) = -6$.



(a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (b) $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$ (c) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 5x) = -6$

FIGURE 5 – Limite d'une fonction en un point a

Remarque 32.10.
Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en a ; c'est le cas de la fonction inverse, qui n'a pas de limite en 0.

2.4 Limite d'une fonction à droite (ou à gauche)

La fonction inverse n'a pas de limite en 0, car si x s'approche de 0, les nombres $\frac{1}{x}$ ne rentrent pas dans le cadre de la définition 32.8. Cependant, on peut parler de limite « à droite » et de limite « à gauche » : on note alors 0^+ pour signifier que x s'approche de 0 par valeur supérieure et 0^- pour signifier que x s'approche de 0 par valeur inférieure.

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

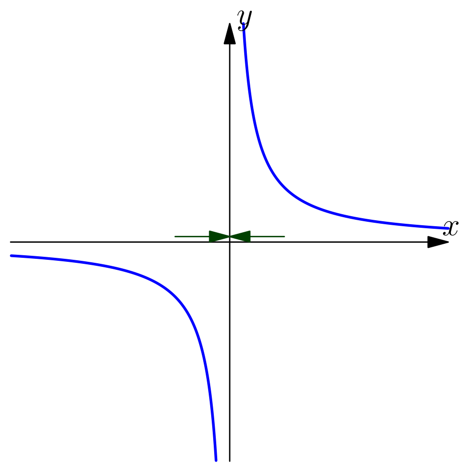


Figure 6 – Limite à gauche et à droite

3 Opérations sur les limites

Propriété 32.11.
Les tableaux 1, 2 et 3 permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme et du produit de deux fonctions f et g, ainsi que la limite de l'inverse d'une fonction f lorsqu'on connaît la limite de deux fonctions. Les limites peuvent être des limites en $+\infty$, en $-\infty$, en x_0, des limites à droite ou à gauche, mais bien entendu toutes les limites utilisées doivent être de même nature.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Table 1 – Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (suivant les signes)	forme ind.

Table 2 – Limite d'un produit

Si f a pour limite	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Table 3 – Limite d'un inverse

Remarques 32.12.

1. Les résultats des deux tableaux précédents permettent de trouver les résultats pour un quotient.
2. Les formes indéterminées sont de deux types exprimés sous forme abrégée par : $+\infty-\infty$, $0\times+\infty$.

Exemples 32.13.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x+15)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+15)=+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x(x+3))=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{x-2}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(x-2)=-2$.

Propriété 32.14.

– La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
– La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes des plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples 32.15.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3+2x^2+3x-5=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3x+2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$.

4 Asymptotes

4.1 Asymptote horizontale

Définition 32.16. *Asymptote horizontale*

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$ (resp $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k$) on dit que la droite d'équation $y=k$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple 32.17.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\frac{1}{x})=2$, donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=2+\frac{1}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$ en $+\infty$.

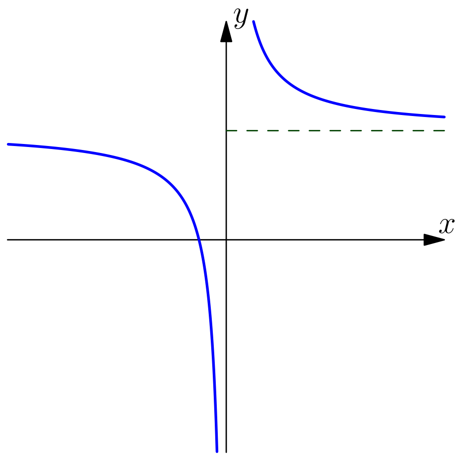


FIGURE 7 – La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2+\frac{1}{x}$ admet une tangente horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$

4.2 Asymptote verticale

Définition 32.18. *Asymptote verticale*

Si une fonction f admet une limite infinie à gauche ou à droite en un réel a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exemple 32.19.

$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ (et $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

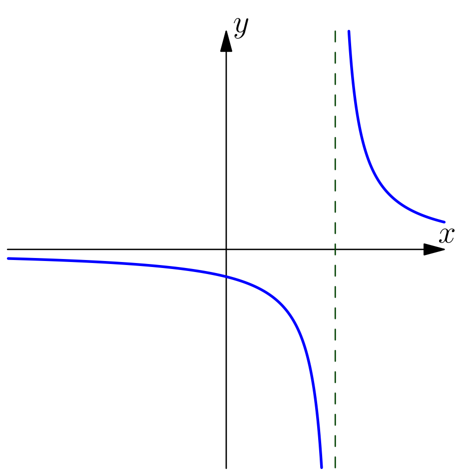


FIGURE 8 – La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$ admet une tangente verticale d'équation $x = 2$

5 Théorème de comparaison

5.1 Théorème de majoration, minoration

Theoreme 32.20.
Soit f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a\,,+\infty[$.
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples 32.21.
1. Soit $f(x) = -x + \sin(x)$. On calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On pose $v(x) = -x + 1$. Comme, pour tout x, $\sin x \leq 1$, on a, pour tout x, $f(x) \leq v(x)$. Or,
$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$$
donc
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
2. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim_{x\to 0} g(x)$. On pose $u(x) = \frac{1}{x^2}$. Comme, pour tout x, on a $1 \leq \sqrt{1+x^2}$, on a, pour tout x, $g(x) \geq u(x)$. Or,
$$\lim_{x\to 0} u(x) = +\infty$$
, donc
$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty.$$

5.2 Théorème d'encadrement ou théorème des « gendarmes »

Theoreme 32.22.
Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a\,,+\infty[$. Si, pour x assez grand, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si
$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = \ell$$
alors
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Démonstration. $\Diamond$ Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Pour tout intervalle ouvert U contenant ℓ :
- Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage V_1 de a tel que pour tout x de V_1, $f(x) \in U$.
- Puisque $\lim_{x\to a} h(x) = \ell$, il existe un voisinage V_2 de a tel que pour tout x de V_2, $h(x) \in U$.

– Enfin, d'après la propriété d'encadrement, il existe un voisinage V_3 de a tel que, pour tout x de V_3, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

L'intersection de trois voisinages est un voisinage donc $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ est un voisinage de a et pour tout a de V, on a :

$$\begin{cases} f(x) \in U \\ h(x) \in U \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases}$$

d'où il vient que pour tout voisinage U contenant ℓ, il existe un voisinage V tel que $x \in V$ implique $g(x) \in U$. Ce qui prouve que :

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell.$$

$\square$

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples 32.23.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}.$$

On veut calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. On pose :

$$u(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

on en déduit que, pour tout $x \neq 0$:

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x).$$

Or

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} v(x) = 1,$$

donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$