

CBMaths.fr  
<https://cbmaths.fr>

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n° 33  
Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.

Clément BOULONNE

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 22 août 2020

## Préambule

### Niveau de la leçon

Terminale S et ES

### Prérequis

Fonctions

### Références

- G. COSTANTINI, *Continuité*. Cours de Terminale S. URL : <http://bacamaths.net>.
- G. LEAHPAR, *Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Leçon n° 60 du CAPES 2010*. URL : <http://leahpar.etnalag.free.fr/capes.html>.

## Plan de la leçon

<b>1</b>	<b>Le théorème des valeurs intermédiaires</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Applications</b>	<b>4</b>

# 1 Le théorème des valeurs intermédiaires

## **Theoreme 33.1.** *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soient  $I$  un intervalle,  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $a < b$ . Soit  $f$  une application *continue* sur l'intervalle  $I$ . Soit  $\lambda$ , un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Alors il existe (au moins) un réel  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$ .

◇ *Démonstration du théorème 33.1.* Supposons  $f(a) < f(b)$ . Nous allons construire deux suites adjacentes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par l'algorithme suivant :

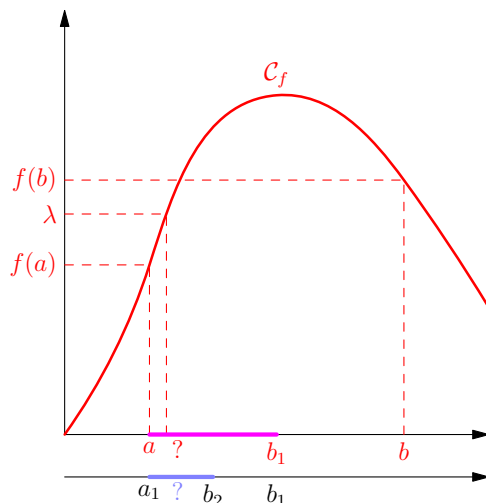
- Si le milieu  $m$  de l'intervalle  $[a, b]$  est tel que  $f(m) \geq \lambda$  alors on pose  $a_1 = a$  et  $b_1 = m$ .
- Sinon, on pose  $a_1 = m$  et  $b_1 = b$ .

On recommence le découpage :

- Si le milieu  $m$  de l'intervalle  $[a_1, b_1]$  est tel que  $f(m) \geq \lambda$  alors on pose  $a_2 = a_1$  et  $b_2 = m$ .
- Sinon, on pose  $a_2 = m$  et  $b_2 = b_1$ .

On a ainsi :

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b \quad \text{et} \quad f(a_2) \leq \lambda \leq f(b_2).$$



En répétant le procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés<sup>1</sup> :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

De plus, par construction, la longueur de  $[a_n, b_n]$  est  $\frac{b-a}{2^n}$ . Les segments  $[a_n, b_n]$  ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont donc adjacentes.

Notons  $c$  leur limite commune (ce réel  $c$  est dans l'intervalle  $[a, b]$ ). Montrons que  $f(c) = \lambda$ .  
On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

et par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq \lambda \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n).$$

Or,  $f$  est continue en  $c$  donc :

$$f(c) \leq \lambda \leq f(c)$$

et ainsi  $f(c) = \lambda$ . On a bien montré qu'il existe un réel  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$  □

1. Il s'agit d'une méthode de *dichotomie*.

♪ **Remarques 33.2.**

1. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation  $f(x) = \lambda$  ( $f(a) < \lambda < f(b)$ ) admet au moins une solution dans  $[a, b]$ .
2. L'hypothèse de continuité est *indispensable* dans le théorème. Essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $\lambda = \frac{1}{2}$ ...

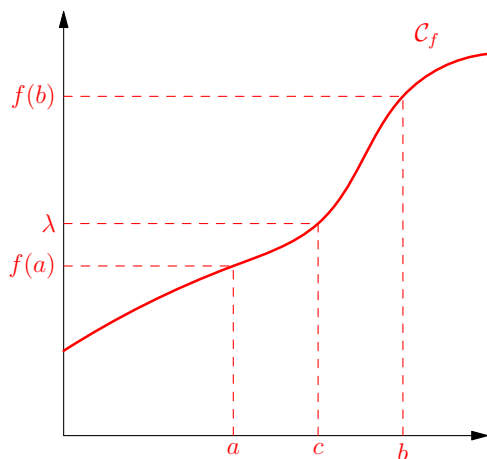


FIGURE 1 – Cas d'une fonction monotone

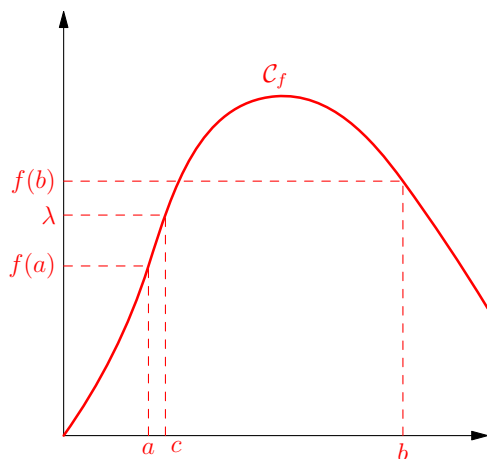


FIGURE 2 – Cas d'une fonction non monotone

✻ **Exemple 33.3.**

Tout polynôme de degré impair admet (au moins) une racine réelle. En effet, comme le degré de  $P$  est impair, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty.$$

En conséquence, il existe un réel  $a \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x < a$ , on ait  $P(x) < 0$  et un réel  $b \in \mathbb{R}$

tel que pour tout  $x > b$ , on ait  $P(x) > 0$ . Comme  $P$  est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $P(c) = 0$ .

### ♪ Remarque 33.4.

Le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de réciproque. Une fonction  $f$  peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Considérer par exemple la fonction  $f$  définie sur  $I = \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ où } x_0 \in [-1, 1].$$

On peut montrer (en exercice) que la fonction  $f$  est non continue en 0 et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires. En effet, soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ .

- Si  $a$  et  $b$  sont non nuls et de même signe, alors c'est immédiat (puisque dans ce cas  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ).
- Si  $a = 0$  (et  $b > 0$ ) alors on prend un réel  $\lambda$  compris entre  $f(a) = x_0$  et  $f(b)$ . Comme  $\lambda \in [-1, 1]$ , on peut toujours trouver un réel  $X \geq \frac{1}{b}$  tel que  $\sin X = \lambda$ . En posant  $x = \frac{1}{X}$ , il vient bien  $f(x) = \lambda$  avec  $x \in [a, b]$ .
- On raisonne de même si on a un intervalle  $[a, 0]$  ou  $[a, b]$  lorsqu'il contient 0.

## 2 Applications

### 2.1 Le théorème du point fixe

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer un petit théorème de point fixe.

#### **Theoreme 33.5.** *Théorème du point fixe*

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a, b]$ . Si  $f(I) \subset I$  alors  $f$  admet (au moins) un point fixe sur  $I$ . Autrement dit, il existe (au moins) un réel  $x$  de  $I$  tel que  $f(x) = x$ .

◇ *Démonstration du théorème 33.5.* Considérons la fonction  $g$  définie sur  $I$  par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Montrons que  $0 \in g(I)$ . On a :

$$g(a) = f(a) - a \in g(I) \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \in g(I).$$

Or, comme  $f(I) \subset I$ , on a  $f(a) \geq a$  et  $f(b) \leq b$ , c'est-à-dire  $g(a) \leq 0$  et  $g(b) \geq 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $x \in I$  tel que  $g(x) = 0$ , c'est-à-dire  $f(x) = x$ . □

### 2.2 Image d'un intervalle par une application continue

#### **Corollaire 33.6.** *Image d'un intervalle par une application continue*

Soit  $f$  une application continue sur un intervalle  $I$ . Alors  $f(I)$  est un intervalle.

a.  $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ .

◇ *Démonstration du corollaire 33.6.* Soient  $y_1$  et  $y_2$  dans  $f(I)$  avec  $y_1 \leq y_2$ . Il s'agit de montrer tout élément  $\lambda$  de  $[y_1, y_2]$  est élément de  $f(I)$ . Comme  $y_1$  et  $y_2$  sont dans  $f(I)$ , il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que :

$$f(a) = y_1 \quad \text{et} \quad f(b) = y_2.$$

Comme  $I$  est un intervalle, on a :  $[a, b] \subset I$ . Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$  (puisque  $[a, b] \subset I$ ), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $\lambda \in [y_1, y_2]$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$ . D'où :  $\lambda \in f(I)$ .  $\square$

♪ **Remarque 33.7.**

Si  $f$  n'est pas continue, il se peut très bien que  $f(I)$  ne soit pas un intervalle : avec  $f(x) = E(x)$ ,  $E(x)$  désignant la partie entière de  $x$ , on a  $f([0, 1]) = [0, 1]$ .

✿ **Exemples 33.8.**

1. Soit  $f(x) = x^2$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Image de l'intervalle ouvert  $I = ]1, 2[$  :  $f(I) = ]1, 4[$ .
  - Image de l'intervalle ouvert  $J = ]-1, 2[$  :  $f(J) = [0, 4[$ .
  - Image de l'intervalle fermé  $H = [-2, 2]$  :  $f(H) = [0, 4]$ .
  - Image de l'intervalle semi-ouvert  $K = [0, +\infty[$ ,  $f(K) = K$ .
2. Soit  $g(x) = \sin x$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Image de l'intervalle ouvert  $I = ]0, \pi[$ ,  $g(I) = ]0, 1]$ .
  - Image de l'intervalle ouvert  $J = ]0, 2\pi[$  :  $g(J) = [-1, 1]$ .
3. Soit  $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . On veut déterminer  $h(\mathbb{R})$ . Comme  $\mathbb{R}$  est symétrique par rapport à 0 et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$h(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -h(x),$$

ce qui prouve que  $h$  est impaire. Montrons que  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Supposons  $0 \leq x < y$ . Alors :

$$h(y) - h(x) = \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y(1+x) - x(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}.$$

Or,  $y-x > 0$  d'où :

$$h(x) - h(y) > 0 \Leftrightarrow h(x) < h(y).$$

Ceci prouve la stricte croissance de  $h$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $h$  est impaire, on en déduit qu'elle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = 1,$$

et,  $h$  étant impaire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1.$$

Montrons que  $h$  est bornée par  $-1$  et  $1$ . Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Il est clair que  $0 \leq x \leq 1 + x$ . Comme  $1 + x \geq 0$ , on peut diviser par  $1 + x$  :

$$0 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1$$

et comme  $x = |x|$  (puisque  $x \geq 0$ ) :

$$0 \leq h(x) \leq 1.$$

Comme  $h$  est impaire, on en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$-1 \leq h(x) \leq 1.$$

Donc  $h$  est bornée par  $-1$  et  $1$  (mais elle n'atteint pas ses bornes). On a donc  $h(\mathbb{R}) \in ]-1, 1[$ . Réciproquement soit  $y \in ]-1, 1[$ . Comme  $h$  est continue (quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(c) = y$ . Donc  $]-1, 1[ \subset h(\mathbb{R})$ . D'où :

$$h(\mathbb{R}) = ]-1, 1[.$$

## 2.3 Image d'un segment par une application continue

La démonstration est hors programme, on pourra admettre le théorème lors de la présentation du plan.



**Théorème 33.9.** *Image d'un segment par une application continue*

Soit  $f$  une application continue sur un segment  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $f(I)$  est un segment.

Pour démontrer le théorème 33.9, on a besoin du lemme suivant :



**Lemme 33.10.**

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un segment  $[a, b]$ . Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ .

◇ *Démonstration du lemme 33.10.* On suppose que  $f$  est non bornée et on reprend la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. On suppose que  $c$  est la limite commune des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  construite dans cette démonstration. Or  $f$  est non bornée sur  $[a_n, b_n]$ , on peut donc construire une suite réelle  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n$ ,  $c_n \in [a_n, b_n]$  et  $|f(c_n)| \geq n$ . La première relation nous montre que la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $c$  ce qui est contradictoire avec la seconde relation si on suppose  $f$  continue sur  $[a, b]$ . □

◇ *Démonstration du théorème 33.9.* Soit  $[a, b]$  un segment de  $I$ . D'après le lemme précédent, il existe deux réels  $m$  et  $M$  tel que  $f([a, b])$  soit l'un des intervalles  $]m, M[$ ,  $[m, M[$ ,  $]m, M]$ ,  $[m, M]$ . On justifiera de l'impossibilité des trois premières formes en introduisant les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{f(x) - m} \quad \text{ou} \quad x \mapsto \frac{1}{M - f(x)}$$

dont on observera qu'elles sont définies et continues sur  $[a, b]$  sans y être bornées. □

## 2.4 Théorème de bijection

Le théorème de bijection est une particularisation du théorème des valeurs intermédiaires. On ajoute une condition de plus pour la fonction  $f$  : la stricte monotonie.

### **Theoreme 33.11.** *Théorème de bijection*

Soit  $f$  une application *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  dans  $I$  avec  $a < b$ . Soit  $\lambda$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Alors il existe un *unique*  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$ .

◇ *Démonstration du théorème 33.11. Existence* L'existence a déjà été prouvée : c'est le théorème des valeurs intermédiaires.

**Unicité** L'unicité découle de la stricte monotonie. On va la démontrer dans le cas où  $f$  est strictement croissante (le cas strictement décroissante) est analogue. Supposons qu'il existe deux réels  $c$  et  $c'$  dans  $[a, b]$  tels que  $f(c) = \lambda$  et  $f(c') = \lambda$ . Si  $c < c'$  alors par stricte croissante de  $f$  :

$$f(c) < f(c').$$

Ce qui contredit la condition  $f(c) = f(c') = \lambda$ . Si  $c > c'$  alors par stricte croissante de  $f$  :

$$f(c) > f(c').$$

Ce qui contredit la condition  $f(c) = f(c') = \lambda$ . Finalement  $c = c'$ , ce qui prouve l'unicité. □

### **Remarque 33.12.**

En résumé, lorsque  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ , et lorsque  $\lambda \in f(I)$ , l'hypothèse de continuité de  $f$  nous fournit l'existence d'au moins une solution (dans  $I$ ) de l'équation  $f(x) = \lambda$ . Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de  $f$ , nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.

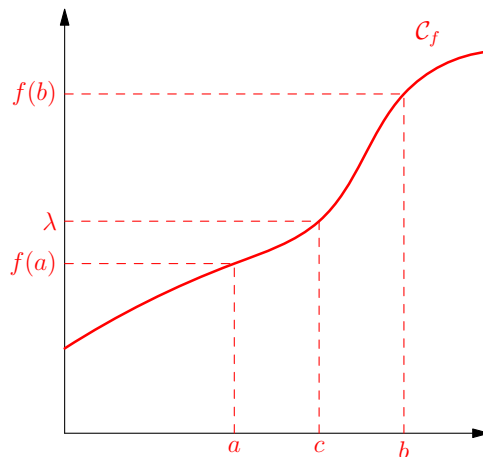



FIGURE 3 – Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de  $f$ , nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.



Dans le cas où  $f$  est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle  $I$ , on a donc moyen de déterminer l'image d'un intervalle  $[a, b]$  :

- $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$  lorsque  $f$  est strictement croissante ;
- $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$  lorsque  $f$  est strictement décroissante.

Ce résultat s'étend aux intervalles non bornés en remplaçant les valeurs de  $f$  par ses limites.

 **Corollaire 33.13.**

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I = [a, b]$ . Si  $f(a)f(b) < 0$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $I$ .

◇ *Démonstration du corollaire 33.13.* Si  $f(a)f(b) < 0$ , cela signifie que  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires. Autrement dit, 0 est intermédiaire entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . On conclut avec le théorème de bijection. □

 **Exemple 33.14.**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (1 + x)^3 + x.$$

On démontre que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-1, 0]$ . La fonction  $g$  est clairement continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  (comme somme et composée de fonctions qui le sont). De plus :

$$g(-1) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 1 > 0.$$

Le réel  $\lambda = 0$  est donc bien compris entre  $g(-1)$  et  $g(0)$ . On en déduit que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-1, 0]$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$\alpha$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$			+		
$g$			0		

↗
↗

On donne maintenant un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$  à l'aide d'un petit tableau de valeurs :

$x$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
$g(x)$	-0,899	-0,792	-0,673	-0,536	-0,375	-0,184	0,043	0,312	0,629

On en déduit :

$$-0,4 < \alpha < -0,3.$$