CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n° 34
Nombre dérivé. Fonction dérivée. Applications

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 22 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Classes de premières et terminales

Prérequis

Continuité en un point d'une fonction, limite en un point d'une fonction

Références

- G. Costantini, *Fonctions dérivables*. Cours de Terminale S. URL : http://bacamaths.net.
- X. Delahaye, *Dérivée*. Terminale S. URL : http://xmaths.free.fr/TS/cours/cours.php?nomcours=TSdericours&page=01 .

Plan de la leçon

1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé

Theoreme 34.1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un réel ℓ tel que l'accroissement moyen ait pour limite ℓ :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

2. Il existe un réel ℓ et une fonction φ tels que pour tout h tel que $x_0+h \in I$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

$\Diamond$ *Démonstration du théorème 34.1.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

On pose, pour $h \neq 0$:

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \ell.$$

Par hypothèse, on a ainsi :

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

De plus :

$$h\varphi(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \ell h.$$

D'où la condition (ii) :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

Pour $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell + \varphi(h)$$

et comme $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il vient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

D'où la condition (i).

$\square$

Définition 34.2. *Nombre dérivé*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. On note

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell := f'(x_0).$$

$f'(x_0)$ est le *nombre dérivé* de la fonction f au point x_0.

Définition 34.3. *Accroissement moyen*

La quantité $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s'appelle *l'accroissement moyen de f en x_0*. Graphiquement, elle représente le coefficient directeur de la sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f entre les points d'abscisses x_0 et x_0+h.

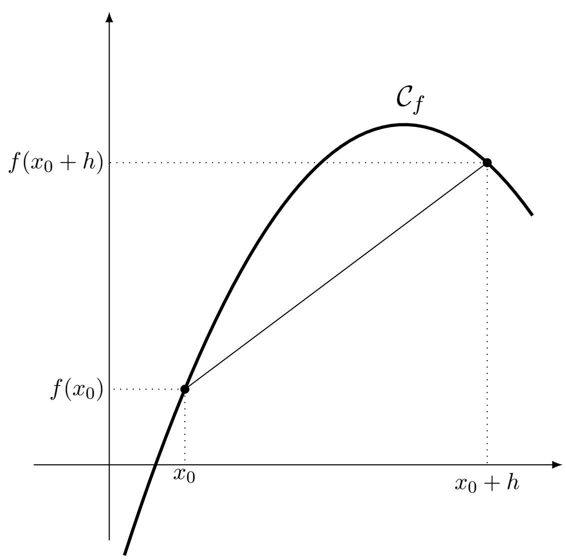


FIGURE 1 – Accroissement moyen de f

La condition (i) du théorème peut donc aussi se traduire par « l'accroissement moyen de f en x_0 admet une limite *finie* ».

Définition 34.4. *Dérivabilité*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Lorsque l'une des deux conditions du théorème ci-dessus est vérifiée, on dit que f est *dérivable* en x_0. Le nombre ℓ s'appelle alors *le nombre dérivé de f en x_0* et on le note $f'(x_0)$.

Exemples 34.5.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On étudie la dérivabilité en 0.

Pour cela on évalue la limite de l'accroissement moyen de f en $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

La limite n'est pas finie. La fonction « racine carrée » n'est donc pas dérivable en 0.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. On étudie la dérivabilité de cette fonction en 0. Nous avons, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{|0+h|-|0|}{|h|} = \frac{|h|}{h}.$$

Or la quantité $\frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h}{h} = -1.$$

L'accroissement moyen de la fonction f n'a pas de limite en 0. Par conséquent la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

2 Différentes interprétations du nombre dérivé

2.1 Interprétation graphique du nombre dérivé

Il représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0.

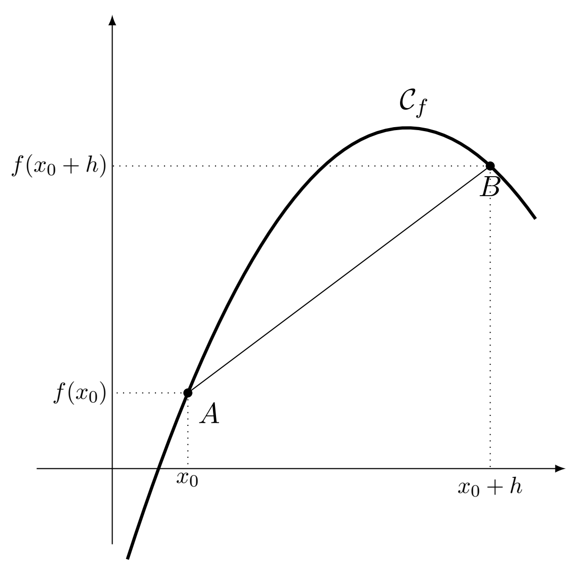


Figure 2 – Accroissement moyen de f

Le coefficient directeur de la sécante (AB) est :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0 :
- le point B tend vers le point A
- la droite (AB) tend alors vers la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A
- l'accroissement moyen de f en x_0 tend vers $f(x_0)$. A la limite le point B est en A, la droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en A et son coefficient directeur est $f'(x_0)$.

2.2 Interprétation numérique du nombre dérivé

On a vu que lorsque f est dérivable en x_0, on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varphi(x-x_0) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0.$$

Ainsi lorsque x est voisin de x_0, on a l'approximation :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

L'application

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

s'appelle *approximation affine de f en x_0.*

2.3 Détermination d'une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse x_0

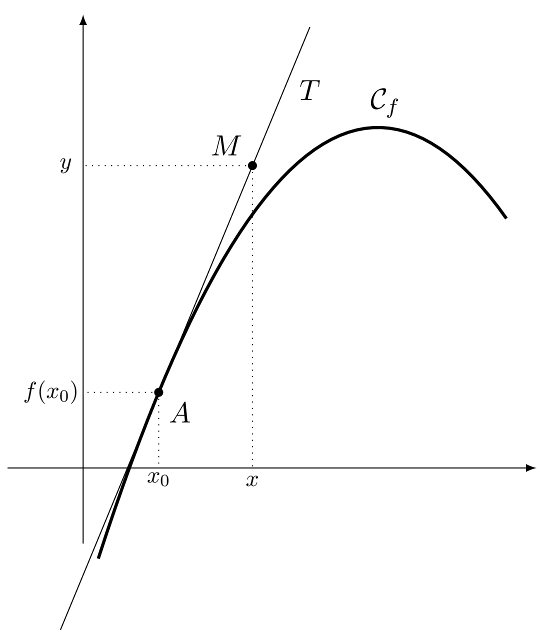


FIGURE 3 – Tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$

La méthode est classique : soit $M(x,y)$ un point quelconque de cette tangente T distinct de A. Le coefficient directeur de T est :

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$$

D'où une équation de T :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On constate que la tangente T n'est autre que la représentation graphique de l'approximation affine de f (en x_0).

Exemple 34.6.

On se donne la fonction f définie sur tout $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = -x^2 + 3.$$

On cherche une équation de la tangente T au point d'abscisse $x_0 = 2$. On calcule $f'(2)$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-(2+h)^2 + 3 - (-2^2 + 3)}{h} = \frac{-4h - h^2}{h} = -4 - h$$

donc

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} (-4 - h) = -4.$$

L'équation de T est donc :

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = -1 - 4(x - 2) = -4x + 7.$$

2.4 Interprétation cinématique du nombre dérivé

Supposons ici que f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est alors :

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0).$$

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

3 Fonction dérivée

Définition 34.7. *Fonction dérivée*

Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est *dérivable sur I*. On définit alors la *fonction dérivée*, notée f', qui à tout point x_0 de I associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Voici un théorème fondamental :

Theoreme 34.8.
Toute fonction f dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

◊ *Démonstration du théorème 34.8.* Soit $x_0 \in I$. Puisque f est dérivable en x_0 :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0.$$

On pose $x = x_0 + h$, il vient alors :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varphi(x-x_0) \quad \text{où } \lim_{x\to x_0}\varphi(x-x_0) = 0.$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers x_0, on obtient :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varphi(x-x_0)\right).$$

Or $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)f'(x_0) = 0$ car $f'(x_0)$ est un nombre fini et :

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x-x_0) = 0.$$

D'où :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

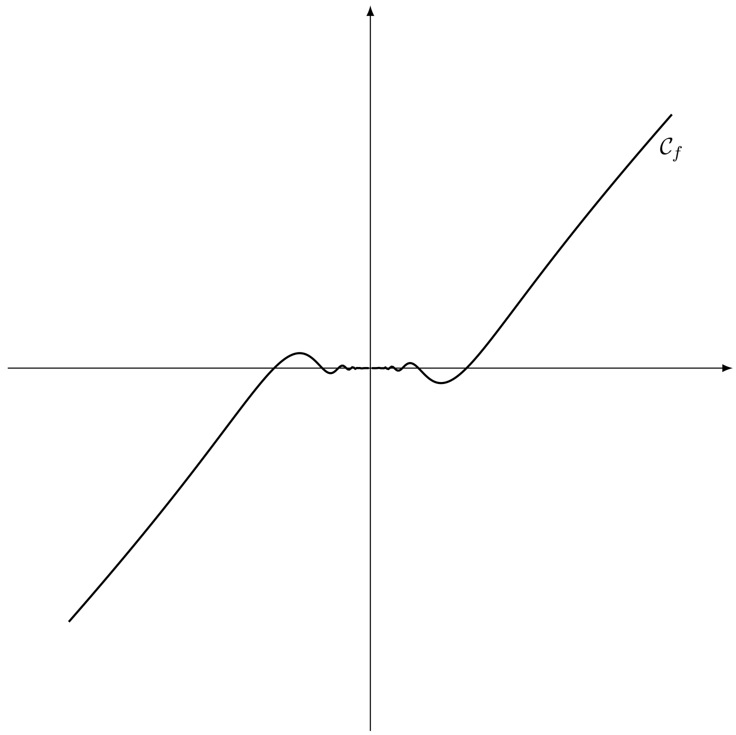
La fonction f est donc continue en x_0. Ce raisonnement étant valable pour tout x_0 de I, on en déduit que f est continue sur I. □

Remarques 34.9.

1. La réciproque du théorème 34.8 est fausse. En effet, il existe des fonctions continues en un point x_0 et non dérivables en x_0. C'est le cas, par exemple, de la fonction « valeur absolue ».
2. Une fonction f peut être dérivable (et donc continue) sans que sa dérivée f' soit continue.

Exemple 34.10.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



On montre que f est continue en 0. On a, pour tout réel $x \neq 0$:

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1.$$

Donc :

$$x^2 \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2.$$

D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$$

puisque $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. Donc :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0. On montre que f est dérivable en 0. Pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Or :

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Ce qui signifie que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Cependant f' n'est pas continue en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Nous savons que $\lim_{x\to 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$, mais la quantité $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. Donc f' n'a pas de limite en 0, ce qui signifie qu'elle n'est pas continue en 0.

Remarque 34.11.

Si f est dérivable en x_0, alors l'application « coefficient directeur » φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si $x \neq x_0$ et $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ est continue en x_0 puisque

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f'(x_0).$$

4 Applications de la dérivation à l'étude de fonctions

Theoreme 34.12. *Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction*
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I.
3. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante sur I si et seulement si
   - $f' \geq 0$ sur I (resp. $f' \leq 0$)
   - L'ensemble $\{x \in I,\ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.

Remarques 34.13.

1. Si $f' > 0$ sur I, sauf en des points isolés où elle s'annule, on a quand même la stricte croissance de f sur I,
2. il n'y a pas équivalence entre les conditions « $f' > 0$ » et « f est strictement croissante sur I ».

On applique les mêmes remarques pour « $f' < 0$ sur I ».

Exemples 34.14.

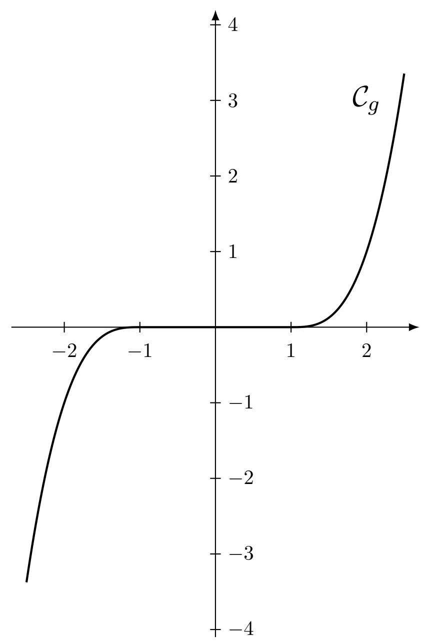
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$. La dérivée est toujours strictement positive sauf en 0 où elle s'annule. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cet exemple montre donc qu'une fonction strictement croissante sur un intervalle I n'a pas nécessairement une dérivée strictement positive sur I.

2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1\,,1] \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a :

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1\,,1] \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



3. Soit h la fonction définie sur $]-2\,,-1[\,\cup\,]1\,,2[$ par

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in\,]-2\,,-1[\\ 1 & \text{si } x \in\,]1\,,2[\end{cases}$$

On a clairement $h' = 0$ sur $]-2\,,-1[\,\cup\,]1\,,2[$. Cependant h n'est pas constante, d'où la nécessité de la condition « I est un intervalle » dans le théorème précédent.

Le théorème suivant donne une *condition nécessaire* pour que f ait un extremum local en x_0 :

Theoreme 34.15.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

♪ **Remarques 34.16.**

Avant de lire la démonstration, on donne quelques explications :

1. Si a et b représentent les extrémités de l'intervalle I (avec éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$), l'intérieur de I est l'intervalle ouvert $]a\,,b[$.
2. Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local. Une fonction f admet un maximum local en x_0, s'il existe un intervalle ouvert J du type $]x_0-\varepsilon\,,x_0+\varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) tel que pour tout x de J, on ait $f(x) \leq f(x_0)$. (On définit de façon analogue un minimum local). Une fonction peut avoir plusieurs maxima sur un même intervalle I. Le plus grand d'entre eux est appelé maximum global de f sur I.

♢ *Démonstration du théorème 34.15.* Par hypothèse, f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Comme x_0 est intérieur à I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0-\varepsilon\,,x_0+\varepsilon[$ soit contenu dans I. Supposons que l'extremum local de f soit un maximum local. Pour $h \in]0\,,\varepsilon[$, on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Pour $h \in]-\varepsilon\,,0[$, on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Ceci montre que la dérivée à droite de f en x_0 est négative et que la dérivée à gauche de f en x_0 est positive. Et comme elles sont toutes deux égales à $f'(x_0)$, on a nécessairement

$$f'(x_0) \geq 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) \leq 0$$

d'où $f(x_0) = 0$.

Dans le cas où f admet un minimum local, on raisonne de même. □

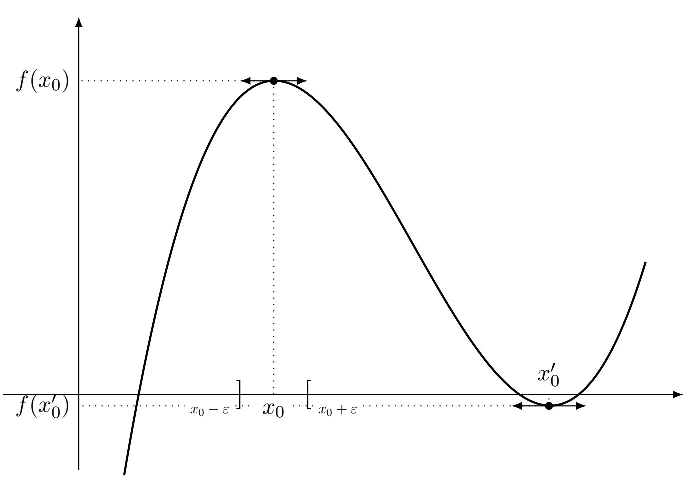


FIGURE 4 – Minimum local et maximum local d'une fonction

Le théorème suivant donne une *condition suffisante* pour que f ait un extremum local en x_0.

Theoreme 34.17.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un point intérieur à I. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0.

La démonstration repose sur le théorème des accroissements finis (voir compléments).

5 Dérivation d'une fonction composée et applications

Theoreme 34.18.
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$. La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x)).$$

◊ *Démonstration du théorème 34.18.* Soit $x_0 \in I$. On écrit :

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

On pose $y_0 = u(x_0)$ et $y = u(x)$, ainsi :

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Or, v étant dérivable en y_0, on a :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} = v'(y_0)$$

et u étant dérivable en x_0, on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0).$$

D'où :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) \times v'(y_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

c'est-à-dire

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0)).$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 \in I$, on en déduit la dérivabilité de $v \circ u$ sur I et

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x)).$$

□

Conséquence 34.19.
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

– Si $f = \sqrt{u}$ (où u est strictement positive sur I) alors f est dérivable sur I et $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
– Si $f = u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z}^*$ et u ne s'annulant pas sur I si $n \leq -1$) alors f dérivable sur I et $f' = nu'u^{n-1}$.

Exemples 34.20.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}.$$
On peut écrire $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + x$. la fonction u est strictement positive sur $]0\,,+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, ce qui donne :
$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}, \qquad \text{pour tout } x \in]0\,,+\infty[.$$
2. Dans la pratique, s'il n'y a pas d'ambiguïté avec les intervalles, on finit par ne plus préciser la composition :
$$f(x) = (2x^2 - x + 1)^6 \qquad f'(x) = 6(4x-1)(2x^2 - x + 1)^5.$$

6 Tableaux des dérivées usuelles et opérations sur les dérivées

Le tableau 1 nous donne les dérivées usuelles. Tous les résultats de ce tableau se démontre essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \tan(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega(1 + \tan^2(\omega t + \varphi))$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{t},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

TABLE 1 – Dérivées de fonctions usuelles

◊ *Exemples de démonstration de dérivée de fonctions usuelles.* **1.** Si $f(x) = x^n$ lorsque $n > 0$, l'accroissement moyen de f en x s'écrit (on utilise la formule du binôme de Newton) :
$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1}\binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} = nx^{n-1}.$$

On aurait pu procéder par récurrence en utilisant la formule de dérivation d'un produit.

2. Si $f(x) = \sin(x)$. L'accroissement moyen de f en x s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin h}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h}\\ &= \sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h}\cos x.\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin h}{h} = \cos x.$$

□

Le tableau 2 donne les opérations sur les dérivées lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I. Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Fonction	Dérivée	Conditions
$u+v$	$u'+v'$	
ku (k constante)	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
u^n $(n \in \mathbb{Z})$	$nu'u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u'(v' \circ u)$	

TABLE 2 – Opérations sur les dérivées

◊ *Exemples de démonstration sur les opérations de dérivées.* **1.** On veut montrer la relation $(uv') = u'v + uv'$. Pour tout x_0 de I, comme les fonctions u et v sont dérivables en x_0, on peut écrire :

$$u(x_0+h) = u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0, \tag{1}$$
$$v(x_0+h) = v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\psi(h) = 0. \tag{2}$$

En multipliant (1) par (2), il vient :

$$\begin{aligned}u(x_0+h)v(x_0+h) &= (u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h))(v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h))\\ &= u(x_0)v(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h)\end{aligned}$$

où

$$\Phi(h) = u(x_0)\psi(h) + u'(x_0)v'(x_0)h + u'(x_0)h\psi(h) + \varphi(h)v'(x_0)h + h\varphi(h)\psi(h).$$

Nous avons donc :

$$uv(x_0+h) = uv(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\Phi(h) = 0.$$

La fonction produit uv admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, donc uv est dérivable en x_0. Ceci étant valable pour tout x_0 de I, on a uv dérivable sur I. On a donc :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

2. On veut montrer la relation $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$. Pour tout $x \in I$, on pose $f(x) = \frac{1}{v(x)}$. On a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{v(x)-v(x+h)}{hv(x)v(x+h)}.$$

Or, puisque v est dérivable, on peut écrire :

$$v(x+h) = v(x) + v'(x)h + h\varphi(h).$$

Remplaçons $v(x)-v(x+h)$ par $-(v'(x)h + h\varphi(h))$; on obtient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{v'(x)h + h\varphi(h)}{hv(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)v(x+h)}.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Donc f est dérivable et $f' = -\frac{v'}{v^2}$ d'où :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

3. On veut montrer la relation $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. On écrit :

$$\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$$

et on utilise la dérivée d'un produit et le résultat ci-dessus.

□

7 Quelques inégalités

Exemples 34.21.

1. On va montrer les inégalités suivantes sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$:
   a) $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$
   b) $1-\frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x$.

   On note $I = [0\,,\frac{\pi}{2}]$. On étudie les fonction f et g sur I par $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$. On a, pour $x \in I$,

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad g''(x) = -\sin x \leq 0.$$

   La fonction f' est positive sur I, donc f est croissante sur I et comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur I, donc :

$$\sin x \leq x, \quad \text{pour tout } x \in I.$$

La fonction g'' est négative sur I, donc g' est décroissante sur I. Or :

$$g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0.$$

Comme g' est continue et strictement décroissante sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Donc g' est positive sur $[0\,,\alpha]$ puis négative sur $[\alpha\,,\frac{\pi}{2}]$. On en déduit que g est croissante sur $[0\,,\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\,,\frac{\pi}{2}]$. Mais $g(0) = 0$ et $g(\frac{\pi}{2}) = 0$. Donc g est positive sur I :

$$\frac{2}{\pi} \leq \sin x, \quad \text{pour tout } x \in I.$$

On montre de même que :

$$1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x, \text{ pour tout } x \in I.$$

2. On montre que pour tout $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}[$, on a :

$$x \leq \tan x.$$

On pose $f(x) = \tan x - x$, pour $x \in J = [0\,,\frac{\pi}{2}[$. On a :

$$f'(x) = \tan^2 x \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in J.$$

Donc f est croissante sur J. En outre, $f(0) = 0$ donc f est positive sur J d'où le résultat.

Remarque 34.22.

A l'aide de l'encadrement $\sin x \leq x \leq \tan x$ démontré ci-dessus pour $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}[$, on en déduit que :

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \quad \text{pour tout } x \in]0\,,\tfrac{\pi}{2}[.$$

On montre que l'encadrement est aussi valable pour $x \in]-\frac{\pi}{2}\,,0[$. Le théorème des gendarmes permet alors de retrouver la limite importante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

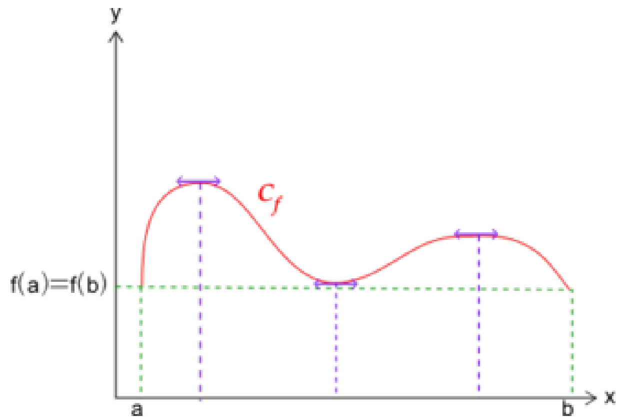


FIGURE 5 – Interprétation graphique du théorème de Rolle

8 Compléments : Théorème de Rolle et accroissements finis

Theoreme 34.23. *Théorème de Rolle*
Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in\,]a\,,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. $\Diamond$ Puisque f est continue, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a\,,b]) = [m\,,M]$. Si $m = M$ alors f est constante et donc $f' = 0$ sur $]a\,,b[$. On suppose alors que $m < M$. Alors $m < f(a)$ ou $f(a) < M$.

– Si $m < f(a)$, alors il existe $c \in\,]a\,,b[$ tel que $f(c) = m$.

$$\forall x \in\,]a\,,c[, f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$
$$\forall x \in\,]c\,,b[, f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Comme f est dérivable en c, le passage à la limite dans les deux inégalités ci-dessus donne respectivement :

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

d'où, par continuité de f en c, $f'(c) = 0$.

– si $f(a) < M$, un raisonnement analogue donne le même résultat : $f'(c) = 0$.

□

Theoreme 34.24. *Théorèe des accroissements finis*
Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$. Alors il existe un réel $c \in\,]a\,,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Démonstration. $\Diamond$ Soient A un réel et la fonction :

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi & : & [a\,,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) - f(a) - A(x-a) \end{array}.$$

φ est clairement continue sur $[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$, et vérifie $\varphi(a) = 0$. On détermine alors A tel que $\varphi(b) = 0$:

$$\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

On affecte alors cette valeur à A (l'existence est assuré par l'hypothèse $a < b$), de sorte que le théorème de Rolle s'applique, donannt l'existence d'un réel $c \in \,]a\,,b[$ tel que :

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - A = 0 \Leftrightarrow f'(c) = A \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

$\square$

Theoreme 34.25. *Inégalité des accroissements finis*
Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a\,,\text{ß}]$ et dérivable sur $]a\,,b[$. S'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $|f'(x)| < k$ pour tout $x \in \,]a\,,b[\,;$, alors :

$$|f(b) - f(a)| < k\,|b-a|\,.$$

Démonstration. $\Diamond$ D'après le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned} & \exists c \in \,]a\,,b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \\ \Rightarrow\ & \exists c \in \,]a\,,b[, |f(b) - f(a)| = |f'(c)|\,|b-a| \\ & \Rightarrow |f(b) - f(a)| < k\,|b-a|\,. \end{aligned}$$

$\square$