

CBMaths.fr
<https://cbmaths.fr>

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n° 37
Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes
approchées)

Clément BOULONNE

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 22 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Terminale S et ES

Prérequis

Intégrales, accroissements finis, primitives, propriétés sur l'intégrale, trigonométrie, fonction polynôme, fonction exponentielle

Références

- G. COSTANTINI, *Calcul intégral*. Cours de Terminale S. URL : <http://bacamaths.net>.
- D. ARNAUD & al, *Manuel Sesamaths, TS*. Magnard 2016.
- *Leçon 84 : Calcul approché d'intégrales*. Université Claude Bernard-Lyon I. CAPES de Mathématiques : Oral. URL : <http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/integrales.pdf>. Année 2004-2005.
- M. LEZEN, *Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou deux exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice*. URL : <http://capes-de-maths.com>. 2011.
- F. THIRIOUX, *BTS Electrotechnique Cours de Mathématiques*. Lycée René Perrin, Ugine.
- C. CHERRUAU & F. CHERRUAU, *Maths, BTS Groupement A*. Contrôle Continue Ellipses.

Plan de la leçon

1	Sommes de Riemann	2
2	Intégration par primitives	4
3	Intégration par parties	6
4	Intégration par changement de variables	8
5	Intégration de fractions rationnelles	11
6	Calcul approché de l'intégrale	12
7	Autres calculs de primitives	14

1 Sommes de Riemann

Soit f une application continue définie sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} , $\sigma = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une subdivision de $[a, b]$ (c'est-à-dire $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$), h est le pas de la subdivision σ ($h = \max(a_{i+1} - a_i)$) et pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.



Définition 37.1. Somme de Riemann

On appelle *somme de Riemann* associée à $(f, \sigma, (\xi_i)_{0 \leq i \leq n})$ le réel :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i).$$

Comme $h = \max(a_{i+1} - a_i)$, quand h devient très petit (tend vers 0), la subdivision devient de plus en plus fine et la somme de Riemann associée à $(f, \sigma, (\xi_i)_{0 \leq i \leq n})$ converge vers l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.



Theoreme 37.2.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration. \diamond Montrons que la différence suivante peut être rendue aussi petite que voulue :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx - (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(x) - f(\xi_i)) dx \right). \end{aligned}$$

En passant aux valeurs absolues, on a la majoration suivante :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(\xi_i)| dx \right).$$

Or, du théorème de Heine appliqué à f continue sur le segment $[a, b]$, on déduit f uniformément continue sur $[a, b]$ (et donc aussi sur chaque $[a_{i+1}, a_i]$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in [a, b]^2, (|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Pour une subdivision σ de pas h tel que $0 < h < \eta$, on aura :

$$\forall x \in [a_i, a_{i+1}], |x - \xi_i| \leq a_{i+1} - a_i \leq h < \eta.$$

Ce qui entraînera :

$$|f(x) - f(\xi_i)| \leq \varepsilon.$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} \varepsilon dx \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon (a_{i+1} - a_i) = \varepsilon (b - a).$$

Ceci prouve bien que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \int_a^b f(x) dx.$$

Toute intégrale est donc une limite de somme de Riemann. □

♪ Remarque 37.3.

Le résultat ci-dessus reste valable si f est continue par morceaux. Il suffit de refaire la même démonstration avec des subdivisions adaptées à f .

📌 Proposition 37.4. *Cas particulier d'une subdivision régulière*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on particularise $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$ et $\xi_i = a_i$ (donc $h = \frac{b-a}{n}$). On a alors :

$$a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}.$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

📌 Proposition 37.5. *Cas particulier des fonctions définies sur $[0, 1]$*

La formule ci-dessous devient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

🍀 Exemple 37.6.

On veut étudier la limite de la somme :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}.$$

On considère l'application f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \ln 2.$$

2 Intégration par primitives



Définition 37.7.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Une *primitive* de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.



Theoreme 37.8. Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Démonstration. \diamond On démontre ce théorème dans le cas où I est un intervalle fermé $[a, b]$ et on admettra pour cela le résultat suivant : « toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes ».

Soit f une fonction continue sur I et on note m son minimum. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur I . La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t) dt$ est définie et dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$, :

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m.$$

Étant donné que l'on cherche une fonction F , définie et dérivable sur I telle que $F' = f$, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est une candidate idéale : elle est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. \square



Theoreme 37.9. Lien entre les primitives

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I . Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme :

$$x \mapsto F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. \diamond

- Démontrons d'abord que toutes les primitives ont bien la forme annoncée. Soit G une primitive de f sur I . Alors $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$. La fonction $G - F$, de dérivée nulle, est donc une fonction constante sur I : il existe alors un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, soit $G(x) = F(x) + k$.
- On vérifie maintenant que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, sont bien des primitives de f . Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G : x \mapsto F(x) + k$ définie sur I . Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$: G est donc bien une primitive de f sur I . \square



Propriété 37.10. Condition d'unicité d'une primitive

Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I , il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

Démonstration. \diamond

Existence : soit G une primitive de f sur I et considérons $F : x \mapsto G(x) - G(x_0) + y_0$, définie sur I . Alors F est une primitive de f sur I et de plus, $F(x_0) = y_0$.

Unicité : notons F et G deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et démontrons que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$. Comme F et G sont deux primitives de f , il existe, d'après le théorème précédent, un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $F = G$ sur I . □

Les primitives permettent de faire du calcul intégral.

 **Propriété 37.11.**

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration. \diamond Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ de sorte que $\int_a^b f(t) dt = \Phi(b)$. Φ et F étant deux primitives de f sur $[a, b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a, b]$. Ainsi, $\Phi(b) = F(b) + k$. Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $F(a) = -k$, et ainsi, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$. □

 **Corollaire 37.12.** *Formule de Newton-Leibniz*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors pour tous a et b dans I :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. \diamond Soit $x_0 \in I$ et G la primitive de f définie par :

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On sait que deux primitives F et G diffèrent d'une constante. Donc il existe un réel k tel que pour tout :

$$F(x) = G(x) + k.$$

On a alors :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

□

 **Remarque 37.13.**

La quantité $F(b) - F(a)$ se note souvent $[F(t)]_a^b$.

Exemples 37.14.

1.

$$\int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1.$$

2.

$$\int_0^1 x^n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

3.

$$\int_2^e \frac{1}{x \ln x} dt = \int_2^e \frac{1/x}{\ln x} dt = [\ln(\ln(t))]_2^e = -\ln(\ln(2)).$$

Remarque 37.15.

Le choix de la primitive F choisie n'influe pas le résultat de l'intégrale. En effet, si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I , alors elles diffèrent d'une constante. Les quantités $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$ sont donc égales.

Theoreme 37.16. Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f' soit continue sur I . S'il existe un réel M tel que $|f'| \leq M$ sur I alors : pour tous réels a et b de I , on a : $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$.

Démonstration. \diamond Pour $a < b$, on a :

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| dt \leq M(b - a) \leq M |b - a|.$$

Pour $a > b$, on a :

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_b^a f'(t) dt \right| \leq \int_b^a |f'(t)| dt \leq M(a - b) \leq M |b - a|.$$

3 Intégration par parties □

Définition 37.17. Classe \mathcal{C}^1

On dit qu'une fonction est de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I .

Theoreme 37.18.

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

◇ *Démonstration du théorème 37.18.* On sait que pour tout $t \in [a, b]$:

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

En intégrant de a à b :

$$\int_a^b (u(t)v(t))' dt = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t) dt$$

et d'après la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (u(t)v(t))' dt = \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

D'où le théorème. □



Méthode 37.19.

Pour intégrer par parties, il faut

- reconnaître, dans la fonction à intégrer, le produit d'une fonction u et d'une fonction dérivée v' ;
- appliquer la formule d'intégration par parties.



Exemples 37.20.

1. Soit à calculer :

$$I = \int_0^1 te^t dt.$$

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$. D'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$ (à une constante près) et ainsi :

$$I = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e - 1) = 1.$$

2. Soit à calculer :

$$J(x) = \int_1^x \ln t dt.$$

On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. D'où $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$ (à une constante près) et ainsi :

$$J(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x dt = x \ln x - (x - 1) = x \ln x - x + 1.$$

4 Intégration par changement de variables

Theoreme 37.21.

Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, dont les valeurs sont dans \mathbb{R} . Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

La démonstration est hors programme du BTS et admise.

Remarque 37.22.

Dans $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$, on pose $u = \varphi(t)$ (changement de variable qu'on donne ou qu'on doit trouver). Si t vaut a (resp. b) alors u vaut $\varphi(a)$ (resp. $\varphi(b)$), ce qui conduit à changer les bornes de l'intégrale. Ensuite $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$, ou encore (bien que cette écriture soit formellement incorrecte au niveau BTS), $du = \varphi'(t) dt$, que l'on remplace dans l'intégrale.

◇ *Démonstration (hors programme)*. Posons $H(x) = \int_{\alpha}^x f(u) du$ où α et x sont deux éléments de I . La fonction f est continue sur I , donc la fonction H est dérivable sur I , on a $H'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. On a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = \int_{\varphi(a)}^{\alpha} f(u) du + \int_{\alpha}^{\varphi(b)} f(u) du = - \int_{\alpha}^{\varphi(a)} f(u) du + \int_{\alpha}^{\varphi(b)} f(u) du$$

soit :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = -H(\varphi(a)) + H(\varphi(b)) = -(H \circ \varphi)(a) + (H \circ \varphi)(b).$$

Posons $K = H \circ \varphi$, nous obtenons :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = K(b) - K(a).$$

Comme la fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et puisque H est dérivable sur I , la fonction composée K est dérivable sur $[a, b]$ et on a :

$$K'(t) = H'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Par conséquent, la fonction K est une primitive sur $[a, b]$ de la fonction $(f \circ \varphi)\varphi'$.

De plus, les fonctions φ et φ' sont continues sur $[a, b]$ et la fonction f étant continue sur I alors la fonction K' est continue sur $[a, b]$ et on a :

$$K(b) - K(a) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

soit encore :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

□

 **Exemples 37.23.**

1. Soit à calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + t + 1} dt.$$

On met $t^2 + t + 1$ sous la forme canonique :

$$t^2 + t + 1 = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

Ainsi

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + t + 1} = \int_0^1 \frac{4}{3} \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} dt = \frac{4}{3} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2 + 1} \frac{\sqrt{3}}{2} du,$$

en posant $u = \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$

$$U = \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan(u)]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. Soit f une fonction T -périodique. Alors l'intégrale de f sur une période est constante ; par exemple :

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^{T/2} f(t) dt + \int_{T/2}^T f(t) dt$$

par la relation de Chasles


$$= \int_0^{T/2} f(t) dt + \int_{-T/2}^0 f(u + T) du$$

en posant $u = t - T$

$$= \int_{-T/2}^0 f(u) du + \int_0^{T/2} f(t) dt$$

car $f(u + T) = f(u)$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

 **Exercice 37.23.** *Intégrale de Wallis*

Il s'agit, pour $n \in \mathbb{N}$, des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt, \quad J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt, \quad K_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt, \quad L_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt.$$

◇

1. On va calculer I_n grâce à une intégration par parties. On a immédiatement :

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 1.$$

Pour tout $n \geq 0$, on a, par intégration par parties [$u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$]

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \cos t \, dt = \left[(\cos t)^{n+1} \sin t \right]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (\sin t)^2 \, dt$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

ou encore

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

On en déduit immédiatement :

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}, \quad I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}.$$

Ainsi, on peut en déduire une formule générale :

– Si n pair ($n = 2p$)

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2} = \frac{\binom{2p}{p} \pi}{2^{2p+1}}.$$

– Si n impair ($n = 2p+1$) :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. On calcule J_n en se ramenant à I_n . En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt = \int_{-\pi/2}^0 \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \right)^n (-du) = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^n \, du = I_n.$$

3. On calcule K_n en se ramenant à I_{2n+1} . On pose $u = \arcsin t$ ($t \mapsto \arcsin t$ est une bijection de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). On a donc $t = \sin u$.

$$K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos u)^{2n} \cos u \, du = 2I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. On calcule L_n en se ramenant à K_n .

$$L_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \, dt = (-1)^n K_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

5 Intégration de fractions rationnelles



Exercice 37.23.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\frac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

2. a) En déduire sur $]1, +\infty[$ une primitive F_1 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+1)^2}.$$

- b) Déterminer une primitive F_2 de f sur l'intervalle $] -1, 1[$ puis une primitive F_3 sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.

3. Calculer la valeur exacte de

$$I = \int_{-4}^{-2} \frac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

puis la valeur décimale approchée de I à 10^{-2} près par défaut.

◇ *Correction de l'exercice.* 1.

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} &= \frac{a(x+1)^2 + b(x-1)(x+1) + c(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{a(x^2 + 2x + 1) + b(x^2 - 1) + cx - c}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+c)x + a-b-c}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+1)^2}. \end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, la comparaison des coefficients respectifs donne :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + c = 0 \\ a - b - c = -4 \end{cases}$$

On exprime, à l'aide des deux premières équations, b et c en fonction de a et l'on reporte les expressions trouvées dans la troisième équation $b = 2 - a$ et $c = -2a$:

$$a - (2 - a) - (-2a) = -4 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

On en tire $b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $c = -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Ainsi,

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{2}, \quad c = 1.$$

2. a) On peut écrire, en utilisant les résultats de la première question :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, $x-1 > 0$ et $x+1 > 0$. On en reconnaît dans les deux premiers quotients la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$. Le troisième quotient est de la forme $\frac{u'}{u^2}$. Une primitive F_1 de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$ est :

$$F_1(x) = -\frac{1}{2} \ln(x-1) + \frac{5}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{x+1}.$$

- b) Dans le cas général $x \mapsto \ln|u|$ est une primitive de $x \mapsto \frac{u'}{u}$ si $u \neq 0$.

$$F(x) = -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{5}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{x+1}.$$

Si $u < 0$, $\ln|u| = \ln(-u)$, on applique cette règle pour le calcul des primitives F de f : sur l'intervalle $] -1, 1[$, $x-1 < 0$ et $x+1 > 0$:

$$F_2(x) = -\frac{1}{2} \ln(-x+1) + \frac{5}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{x+1},$$

sur l'intervalle $] -\infty, -1[$, $x-1 < 0$ et $x+1 < 0$:

$$F_3(x) = -\frac{1}{2} \ln(-x+1) + \frac{5}{2} \ln(-x-1) - \frac{1}{x-1}.$$

3. L'intervalle $[-4, -2]$ est inclus dans l'intervalle $] -\infty, 1[$. On utilise, pour primitive de f , la fonction F_3 .

$$\begin{aligned} I &= F_3(-2) + F_3(-4) = \left(-\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{5}{2} \ln 1 - \frac{1}{-1} \right) - \left(-\frac{1}{2} \ln 5 + \frac{5}{2} \ln 3 - \frac{1}{-3} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln 3 + 1 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{5}{2} \ln 3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln 5 - 3 \ln 3 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La calculatrice donne $I \approx -1,824451$, ce qui signifie $-1,83 \leq I \leq -1,82$. La valeur décimale approchée par défaut de I à 10^{-2} près est : $I \approx -1,83$.

□

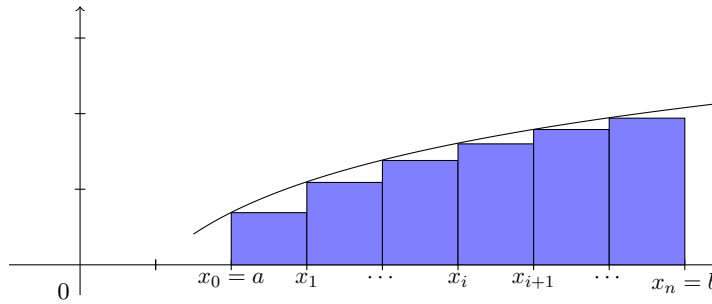
6 Calcul approché de l'intégrale

Dans cette section, on ne travaillera qu'avec des fonctions monotones (croissantes). Si la fonction n'est pas monotone, il suffit de subdiviser l'intervalle I .

6.1 Méthode des rectangles à gauche

On subdivise $[a, b]$ en n intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$. On construit $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ avec $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$. Soit R_k l'aire de $A_k B_k B_{k+1} A_{k+1}$. Soit :

$$AR_n = \sum_{k=0}^{n-1} R_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$



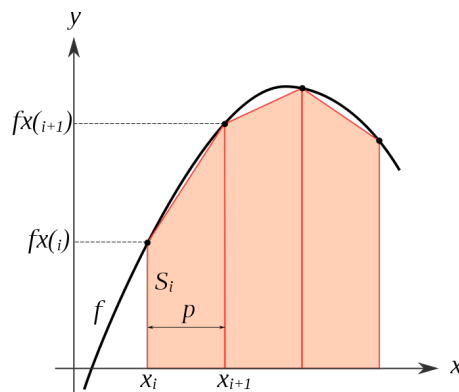
♪ **Remarques 37.24.**

1. Si f est croissante, c'est une approximation par défaut et si f est décroissante, c'est une approximation par excès.
2. La méthode des rectangles à gauche fait penser aux sommes de Riemann vue en début de leçon.

6.2 Méthode des trapèzes

On construit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$. Soit T_k l'aire du trapèze $A_k B_k B_{k+1} A_{k+1}$ et

$$AT_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_k = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$



♪ **Remarque 37.25.**

Plus rapide en termes de convergence par rapport à n mais on ne peut pas savoir si c'est une approximation par excès ou par défaut.

7 Autres calculs de primitives

✿ Exemple 37.26.

On veut calculer :

$$F = \int (t^2 + 2t)e^{\lambda t} dt$$

où λ est un nombre réel non nul.

Puisque la fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ est une fonction polynôme, cherchons F sous la forme $F(x) = P(x) \exp(\lambda x)$, où P est une fonction polynôme de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$. On doit avoir quel que soit x :

$$F'(x) = (P'(x) + \lambda P(x)) \exp(\lambda x) = (x^2 + 2x) \exp(\lambda x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= P'(x) + \lambda P(x) = (2ax + b) + \lambda(ax^2 + bx + c) \\ &= \lambda ax^2 + (2a + \lambda b)x + b + \lambda c. \end{aligned}$$

Les coefficients a , b et c sont solutions du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \lambda a = 1 \\ 2a + \lambda b = 2 \\ b + \lambda c = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\lambda} \\ b = \frac{2(\lambda-1)}{\lambda^2} \\ c = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda^3} \end{cases}.$$

Il vient donc

$$F(x) = \left[\frac{1}{\lambda} x^2 + 2 \frac{\lambda-1}{\lambda^2} x + 2 \frac{1-\lambda}{\lambda^3} \right] \exp(\lambda x).$$

✿ Exemple 37.27.

On veut calculer

$$\int (\sin t)^4 dt.$$

Nous avons l'identité :

$$8(\sin x)^4 = \cos 4x - 4 \cos 2x + 3.$$

Il vient donc :

$$\int (\sin t)^4 dt = \frac{1}{8} \int \cos(4t) dt - \frac{1}{2} \int \cos 2t dt + \frac{3}{8} \int dt = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x.$$