CBMaths

CBMaths.fr
https://cbmaths.fr

CAPES de Mathématiques session 2020— Épreuve de mise en situation professionnelle

LEÇON n° 38
Exemples de résolution d'équations (méthodes exactes, méthodes approchées)

Clément Boulonne

Propositions de plan et de contenu

Dernière mise à jour : 22 août 2020

Préambule

Niveau de la leçon

Tous niveaux (à partir de la classe de quatrième)

Prérequis

Arithmétique (PGCD, congruences), fonctions logarithmes, fonctions exponentielles, nombres complexes, changement de variables, évolutions, dérivées, calcul intégral, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Pythagore.

Références

- D. Müller*Résolution d'équations*. LCP, 2019. URL : https://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/MUSCU/MUSCU5.PDF.
- G. Bringuier & al., *Maths 2nde Profesionnelle Industriel*, Hachette Technique, 2009.
- C. Parfenoff, *Equations produit-nul, équations du type $x^2 = a$*. URL : https://www.parfenoff.org/pdf/cycle4_3e/3e_nc_eq_prod_nul_x_2_egal_a.pdf
- H. Gringoz & al, *Manuel Sesamaths, 2nde*. Magnard 2019.
- A. Bodin, *Systèmes linéaires*. Exo7. URL : http://exo7.emath.fr/cours/ch_syslin.pdf
- D. Arnaud & al, *Manuel Sesamaths, TS Spé*. Magnard 2016.
- J.-P. Beltramone & al., *Déclic TS, Mathématiques enseignements spécifique et de spécialité*, Hachette Education, 2012.
- D. Arnaud & al, *Manuel Sesamaths, TS*. Magnard 2016.
- N. Daval, *Chapitre 7 : Équations différentielles*, Terminale STI2D. URL : http://mathematiques.daval.free.fr/IMG/pdf/CoursA_Equa_diff_ordre1_TSTI2D.pdf
- A. Bodin & al., *Zéros de fonctions*. Exo7. URL : http://exo7.emath.fr/cours/ch_zeros.pdf
- Unknown, *Quand et comment utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et ses corollaires ?*. Maths-Desfontaines. Novembre 2007. URL : http://maths.desfontaines.free.fr/IMG/pdf/Quand_et_comment_utiliser_le_theoreme_des_valeurs.pdf
- P. Lapôtre & R. Moché, *Algorithmique : méthode de Newton-Raphson*, Terminale S. URL : http://gradus-ad-mathematicam.fr/documents/037_Prof.pdf
- M. Garin, *Maths de base*, Marabout 1983.
- A. Collot & al, *Manuel Sesamaths, 1S*. Magnard 2015.
- D. Pinel, *Chapitre II : Taux d'évolution - Indices*, Terminale STG. URL : http://mathemitec.free.fr/index.php
- G. Costantini, *Les nombres complexes*. URL : https://static.wikeo.be/files/24907/cplx03.pdf?download
- X. Caruso, *Cours d'Arithmétique*, Juillet 2002. URL : http://math.univ-lyon1.fr/~lass/anicoursarithbanal.pdf

Plan de la leçon

La leçon sera découpé en trois grandes parties. On verra, dans un premier temps, les méthodes exactes de résolutions de divers types d'équations (que l'on rencontre très souvent en mathématiques) puis des méthodes approchées quand il n'existe pas de méthodes exactes pour résoudre certaines équations plus complexes. Pour finir, nous verrons, en compléments, comment résoudre d'autres types d'équations un peu moins utilisé en mathématiques.

Mais avant de commencer la leçon, rappelons ce qu'est une égalité et ce qu'est une équation.

Définition 38.1. *Égalité*

Une *égalité* est une relation binaire entre objets (souvent appartenant à un même ensemble) signifiant que ces objets sont identiques, c'est-à-dire que le remplacement de l'un par l'autre dans une expression ne change jamais la valeur de cette dernière.

Exemple 38.2.

La proposition : « $3 + 2 = 4 + 1$ est une égalité vraie.

Définition 38.3. *Équation*

Une *équation* est une relation contenant une ou plus variables (ce sont des inconnus ou des paramètres).

Résoudre l'équation consiste à déterminer les valeurs que peut prendre l'inconnu (ou les inconnus) pour rendre l'égalité vraie.

1 Méthodes exactes de résolution d'équations

1.1 Équations polynomiales

On s'intéresse tout d'abord à des équations du type :

$$P(x) = Q(x)$$

où P et Q sont des polynômes de degré quelconque.

1.1.1 Équations du premier degré

Définition 38.4.

On dit qu'une équation est du premier degré si elle est sous la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ où x est l'inconnue.

Pour résoudre des équations du premier degré, on a recours aux propriétés suivantes.

Propriété 38.5.
Pour tous nombres a, b et c :
- Si $a = b$ alors $a + c = b + c$.
- Si $a = b$ alors $a - c = b - c$.
- Si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$.

Pour tous nombres a, b et c :

$$a = b \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}.$$

Exemple 38.6.
On veut résoudre l'équation $-2x + 4 = 0$:
1. on ajoute -4 des deux côtés de l'égalité :

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 - 4 = 0 - 4 \Leftrightarrow -2x = -4$$

2. on divise par -2 qui est non nul des deux côtés de l'égalité :

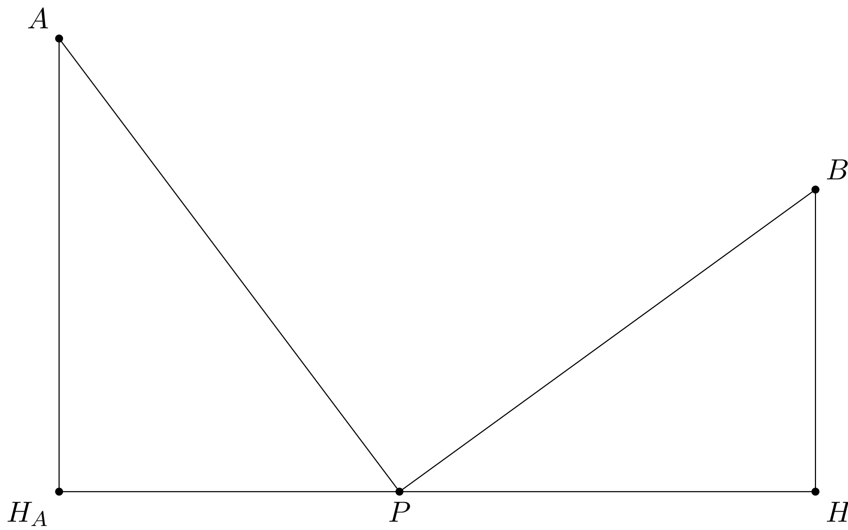
$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-2}$$

et on simplifie :

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow x = 2.$$

Exercice 38.6.
Sur chaque rive d'un fleuve se trouve un palmier, l'un vis-à-vis de l'autre. La hauteur du premier est de 30 mètres et celle du second de 20 mètres ; la distance entre leurs pieds est de 50 mètres. Un oiseau est perché sur la cime de chaque arbre. Brusquement les oiseaux ont aperçu un poisson à la surface de l'eau ; ils se sont jetés simultanément sur lui et l'on atteint au même instant (on suppose qu'ils volent à la même vitesse).

Solution. $\diamondsuit$ Faisons un schéma de la situation. On note :
- H_A le pied du premier palmier, A la position de l'oiseau du premier palmier ;
- H_B le pied du second palmier, B la position de l'oiseau du second palmier ;
- P la position du poisson. P appartient au segment $[H_A H_B]$ (qui représente la surface de l'eau) et donc on peut noter $(p ; 0)$ les coordonnées de p avec $0 \leq p \leq 50$.



Le triangle H_AAP (resp. H_BBP) est rectangle en H_A (resp. H_B). On a $H_AA = 30$, $H_BB = 20$, $H_AP = p$ et $H_BP = (50 - p)$. Les oiseaux volent à la même vitesse et atteignent le poisson au même instant donc $PA = PB$. Comme $PA > 0$ et $PB > 0$, $PA = PB$ implique que $PA^2 = PB^2$.

Comme les triangles H_AAP et H_BBP sont rectangles, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$PA^2 = H_AA^2 + H_AP^2$$
$$PB^2 = H_BB^2 + H_BP^2$$

L'équation à résoudre devient :

$$\begin{aligned} PA^2 = PB^2 &\Leftrightarrow H_AA^2 + H_AP^2 = H_BB^2 + H_BP^2 \\ &\Leftrightarrow 30^2 + p^2 = 20^2 + (50 - p)^2 \\ &\Leftrightarrow 900 + p^2 = 400 + 2500 - 100p + p^2 \\ &\Leftrightarrow 900 - 400 - 2500 = -100p \Leftrightarrow 100p = 2000 \Leftrightarrow p = 20. \end{aligned}$$

Ainsi, le poisson se trouve à 20 mètres du pied du premier palmier. □

1.1.2 Équations du second degré avec les nombres réels

Définition 38.7.

Une équation du second degré à coefficients réels est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.

On peut résoudre de trois manières une telle équation.

1) Equation produit-nul

Définition 38.8. *Equation produit-nul*

Une équation produit-nul est une équation qui peut s'écrire sous la forme d'un produit égale à 0.

Exemples 38.9.
Les équations suivantes sont des équations produits-nuls :
- $(5x+3)(3x-2)=0$
- $7(3x+4)(7x+1)=0$

Propriété 38.10.
Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors ce produit est nul. Donc, pour tout nombre réel a, on peut écrire :
$$0 \times a = 0 \quad \text{ou} \quad a \times 0 = 0.$$

La réciproque de cette propriété est vraie :

Propriété 38.11.
Si un produit est nul alors au moins un de ses facteur est nul. Donc, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

On peut résoudre facilement des équations du second degré grâce à cette propriété.

Exemple 38.12.
On souhaite résoudre l'équation $(3x+1)(2x-1)=0$. On a affaire à une équation produit nul. Les solutions de cette équation sont les nombres x tels que :
$$3x+1=0 \quad \text{ou} \quad 2x-1=0$$
ainsi :
$$\begin{aligned} 3x &= -1 \quad \text{ou} \quad 2x = 1 \\ x &= -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
L'équation produit $(3x+1)(2x-1)=0$ admet deux solutions $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

2) Résolution de l'équation $x^2 = a$

Propriété 38.13.
L'équation $x^2 = a$ admet :
- deux solutions quand $a > 0$, $x_1 = \sqrt{a}$ et $x_2 = -\sqrt{a}$;
- une solution quand $a = 0$, $x_0 = 0$;
- pas de solutions dans $\mathbb{R}$ quand $a < 0$.

Exemple 38.14.
L'équation $x^2 = 7$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ car $7 > 0$:

$$x_1 = -\sqrt{7} \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt{7}.$$

En seconde, on ne connaît pas la méthode du discriminant (que l'on voit dans la section suivante). On résout des équations du second degré soit par :
- la méthode de résolution de l'équation produit-nul (avec la forme factorisée) ;
- l'identité remarquable $A^2 - B^2$ combinée à la méthode précédente (avec la forme canonique) ;
- la méthode de résolution de l'équation $X^2 = a$ (avec $a \geq 0$).

Exercice 38.14.
On considère l'équation $(E) : x^2 - x - 5 = 0$.
1. Démontrer que $x^2 - x - 5 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{21}{4}$.
2. Résoudre l'équation $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{21}{4}$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Solution. ♢
1. On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} &= x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{21}{4} \\ &= x^2 - x + \frac{1-21}{4} = x^2 - x + \frac{20}{4} = x^2 - x + 5.\end{aligned}$$

2. On utilise la méthode de résolution de l'équation « $X^2 - a$ » avec $X = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ et $a = -\dfrac{21}{4}$.

$$\text{soit } x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{21}}{2} \text{ soit } x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{soit } x = -\frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{1}{2} \text{ soit } x = \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{1}{2}$$

Les deux solutions de l'équation $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{21}{4}$ sont $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.
3. On a :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = 0$$

Or, on a démontré à la question 1 que $x^2 - x - 5 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{21}{4}$ donc l'équation $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{21}{4} = 0$ est équivalente à l'équation (E). D'où les solutions de l'équation (E) sont : $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$. □

3) Discriminant

Comment obtenir la forme canonique d'un polynôme de degré 2 à partir de sa forme développée ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On factorise d'abord l'expression par a (on peut le faire car $a \neq 0$), on obtient :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.\right)$$

On remarque ensuite que :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

et ainsi :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

En remplaçant dans l'expression de $f(x)$, on obtient :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Si on développe la dernière expression, on a alors :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

On peut poser $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Remarque 38.15.

- $x^2 + kx$ est le début du développement de $\left(x + \frac{k}{2}\right)^2$.
- En classe de seconde, on a appris que $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. On peut vérifier que $f(\alpha) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Définition 38.16. *Discriminant*

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est le *discriminant* du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Définition 38.17. *Racines du trinôme*

On appelle *racines* du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Ce sont les valeurs de x qui annulent le trinôme.

Theoreme 38.18.
Le nombre de solutions de l'équation (E) du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ.

- Si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions à l'équation (E) :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  On peut ainsi factoriser le trinôme : $a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$ alors il y a une unique solution (qu'on appelle *racine double*) à l'équation (E) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

  On peut ainsi factoriser le trinôme : $a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solution réelle à l'équation (E). Ainsi, il n'y a pas de factorisation du trinôme dans $\mathbb{R}$.

Exemple 38.19.
On souhaite résoudre l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$. On utilise la méthode du discriminant pour résoudre cette équation. Le discriminant du polynôme $x^2 - 4x - 1$ est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 16 - 4 = 12.$$

12 est positif donc l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ admet deux solutions. On peut simplifier l'écriture de la racine carrée de 12 : $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Ainsi :

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ sont : $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$.

1.1.3 Équations du second degré avec les nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes introduit le nombre imaginaire i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Ainsi, l'équation « $x^2 = a$ » admet deux solutions complexes conjugués quand $a < 0$.

Theoreme 38.20.
Pour tout nombre réel non nul a, l'équation $z^2 = a$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$.

- Si $a > 0$, les racines sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, les racines sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

Dans la méthode de résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ par le discriminant, le cas $\Delta < 0$ nous donne deux solutions complexes conjugués.

Theoreme 38.21.
Soit l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ (où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$) que l'on doit résoudre. Si on note le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de cette équation, on obtient :
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La démonstration est similaire au paragraphe « Comment passer de la forme développée à la forme canonique ? ».

Exemple 38.22.
On souhaite résoudre l'équation $z^2 - 2z = -3$. On ramène à un second membre nul :

$$z^2 - 2z + 3 = 0.$$

On peut calculer le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$. Le discriminant est strictement négatif, il y a donc deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{2 - \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2 + \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$$

qui sont bien complexes conjuguées.

1.1.4 Racines évidentes, identification des coefficients

Pour des polynômes de degré supérieur, on peut utiliser :
- la formule de Cardan-Tartaglia pour des équations de degré 3 ;
- La formule de Ferrari pour des équations de degré 4.

Abel a formulé le théorème suivant pour la résolution d'équations polynomiales de plus haut degré :

Theoreme 38.23.
Il n'existe aucune formule générale pour la résolution des équations de degré supérieur à 4.

Des fois, il est assez simple de résoudre des équations du type $P(x) = 0$ avec P de degré supérieur ou égale à 3 en cherchant des racines évidentes et de faire une identification des coefficients du polynômes.

Définition 38.24. *Égalité de polynômes*

Soit m et n deux entiers naturels non nul. Soit $(a_0, \dots, a_n)$ un $(n+1)$-uplet de nombres et $(b_0, \dots, b_m)$ deux $(m+1)$-uplets de nombres. On dit que

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ Q(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

sont deux polynômes égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} m = n \\ a_i = b_i, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Exercice 38.24.

On considère, dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0 \quad (E)$$

1. Vérifier que $z_0 = 4$ est une solution de (E). Déterminer trois réels a, b et c tels que (E) s'écrive ;
$$(E) : (z-4)(az^2 + bz + c) = 0.$$
2. Résoudre l'équation (E). On notera z_1 sa solution ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.
3. Démontrer que les images respectives M_0, M_1 et M_2 de z_0, z_1 et z_2 sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $\omega = 2$ et de rayon $R = 2$. Illustrer.

1.2 Systèmes linéaires

On s'intéresse ici à la résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Définition 38.25. *Système linéaire de deux équations à deux inconnues*

On dit qu'un couple $(x; y)$ vérifie le système suivant de deux équations linéaires du 1er degré à deux inconnues :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des constantes, si ce couple vérifie les deux équations.

Remarques 38.26.

Résoudre un tel système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection des droites dont les équations sont celles du système, quand il existe, donc à étudier d'abord la position relative des deux droites.

- Si elles sont *sécantes* le système admet un seul couple solution.
- Si elles sont *strictement parallèles* le système n'admet aucune solution

– Si elles sont *confondues* le système a un nombre infini de solutions.

Il y a trois méthodes pour résoudre les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

1) Méthode par substitution

Méthode 38.27. *Résolution d'un système par substitution*

Cette méthode consiste à *isoler une inconnue* à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.

On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

Remarque 38.28.

Cette méthode présente l'inconvénient que si la résolution de la première équation est fausse alors celle de la seconde le sera également.

Exemple 38.29.

On veut résoudre le système :

$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = -3 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases} .$$

On isole l'inconnue y dans la première ligne :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

puis on remplace y dans la deuxième équation pour obtenir :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 5(2x - 3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 10x + 15 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ -7x = 2 - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = \dfrac{13}{7} \end{cases} .$$

On a plus qu'à remplacer la valeur numérique de x dans la première équation :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \times \frac{13}{7} - 3 \\ x = \dfrac{13}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{7} \\ x = \dfrac{13}{7} \end{cases} .$$

La solution du système est donnée par le couple $\left(\dfrac{13}{7}; \dfrac{5}{7}\right)$.

2) Méthode par combinaison

Méthode 38.30.
Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on peut renouveler la méthode pour éviter l'inconvénient de la méthode précédente.

Exemple 38.31.
On veut résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 = 0 & (L_1) \\ 3x - 4y - 2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

Pour trouver y, on peut faire $3 \times L_1 - 2 \times L_2$, on obtient :

$$(6x + 9y + 3) + (-6x + 8y + 4) = 0 \Leftrightarrow 17y + 7 = 0$$

Pour trouver x, on peut faire $4 \times L_1 - 3 \times L_2$, on obtient :

$$(8x + 12y + 4) + (9x - 12y - 6) = 0 \Leftrightarrow 17x - 2 = 0$$

On obtient le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} 17y + 7 = 0 \\ 17x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{7}{17} \\ x = \dfrac{2}{17} \end{cases} .$$

Donc la solution est le couple $\left(\dfrac{2}{17}; \dfrac{-7}{17}\right)$.

3) Méthode d'inversion de matrices

Cette méthode n'est pas au programme de seconde mais elle permet de résoudre les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

peut s'écrire, sous forme matricielle, de la manière suivante : $AX = Y$ où :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de la matrice A ($\det(A) = ab' - a'b$) est non nul, alors la matrice A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$$

et l'unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du système est donnée par $X = A^{-1}Y$.

Exemple 38.32.
On veut résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}.$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations donné est équivalent à l'équation matricielle suivante : $AX = B$. Le déterminant de la matrice A est égal à :

$$\det(A) = 1 \times 3 - (-1) \times (-2) = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

La matrice A est donc inversible et d'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du système est donnée par :

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-1) + 2 \times 3 \\ 1 \times (-1) + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.3 Équations diophantiennes (arithmétique)

On donne une définition des équations diophantiennes que l'on rencontre en arithmétique.

Définition 38.33. *Équation diophantienne*

Une *équation diophantienne* est une équation à coefficients entiers dont on cherche les solutions entières. Soit a, b et c trois entiers relatifs, les équations diophantiennes du premier degré sont du type : $ax + by = c$.

Pour résoudre les équations diophantiennes, on a besoin de quelques résultats.

Propriété 38.34.
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, et D leur PGCD. Alors il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = D$.

Démonstration. ◊
- Soit E l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme $ax+by$ où x et y sont des entiers relatifs. E est une partie non vide de $\mathbb{N}$. En effet, on a par exemple : $|a| \in E$ car, selon le signe de a, l'entier naturel $|a|$ s'écrit $a \times 1 + b \times 0$ ou $a \times (-1) + b \times 0$. E étant une partie non vide de $\mathbb{N}$, E admet un plus petit élément n.
  Par définition de E, il existe donc des entiers relatifs u et v tels que $n = au + bv$. Or D divise a et b, donc D divise n, d'où $D \leq n$.
- On montre que n divise a en écrivant la division euclidienne de a par n :
  $$a = nq + r$$
  avec $0 \leq r < n$ et q entier relatif. Donc :
  $$r = a - nq = a - q(au + bv) = a(1 - qu) + b(-qv).$$
  Ainsi r est de la forme $ax + by$ avec x et y entiers relatifs. De plus, $r < n$, donc, par définition de n, $r \notin E$. Alors nécessairement : $r = 0$ et donc n divise a.
- On montre de même que n divise b. D'où, par définition de D, $n \leq D$. Finalement, on obtient $D = n = au + bv$.

□

Remarque 38.35.
L'algorithme d'Euclide permet d'obtenir des entiers u et v tels que $au + bv = D$.

Theoreme 38.36. *Théorème de Bézout*
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration. ◊ SI a et b sont premiers entre eux, alors $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$ et donc, avec la propriété précédente, il existe des entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. Soit $D = \mathrm{PGCD}(a, b)$; alors D divise a, D divise b donc D divise $au + bv$, d'où $D = 1$. □

Propriété 38.37.
Une équation diophantienne du premier degré, de la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont des entiers relatifs, admet des solutions si, et seulement si, c est un multiple du $\mathrm{PGCD}(a, b)$.

Démonstration. ◊ Cela découle directement du corollaire du théorème de Bézout. □

Theoreme 38.38. *Théorème de Gauss*
Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration. ♢ Comme a divise bc, il existe un entier k tel que $bc = ka$. Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. En multipliant par c cette dernière égalité, on obtient :

$$c = acu + bcv = acu + kav = a(cu + kv).$$

Comme $(cu + kv)$ est un entier, cette égalité prouve que a divise c. □

Corollaire 38.39.
Si b et c divisent a et si b et c sont premiers entre eux, alors bc divise a.

Démonstration. ♢ Si b et c divisent a, alors il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $a = kb$ et $a = k'c$ donc $kb = k'c$. b divise $k'c$, or $\mathrm{PGCD}(b, c) = 1$, donc, d'après le théorème de Gauss, b divise k' donc $k' = k''b$:

$$a = k'c = k''bc.$$

Donc bc divise a. □

Exercice 38.39.

1. Déterminer $\mathrm{PGCD}(2688; 3024)$.
2. On cherche à déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de :

$$(E) : 2668x + 3024 = -3360.$$

   a) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $8x + 9y = -10$.
   b) Vérifier que le couple $(1; -2)$ est solution de (E).
3. a) Démontrer que si le couple $(x; y)$ est solution de (E) alors $8(x - 1) = 9(-y - 2)$.
   b) En déduire que si le couple $(x; y)$ est solution de (E), alors il existe un entier k tel que :

$$x = 1 + 9k \quad \text{et} \quad y = -2 - 8k.$$

   c) Quel est l'ensemble des couples solutions de l'équation (E) ?

Solution. ♢

1. On a :

$$3024 = 1 \times 2866 + 336$$
$$2866 = 8 \times 336 + 0.$$

   Donc : $\mathrm{PGCD}(2688; 3024) = 336$.
2. a) On divise les deux membres de l'équation (E) par 336 et on obtient l'équation diophantienne :

$$8x + 9y = -10.$$

   b) $8 \times 1 + 9 \times (-2) = -10$ donc le couple $(1; -2)$ est solution de (E).

3. a) Si le couple $(x; y)$ est solution, alors $8x + 9y = -10$ et on sait également que $8 \times 1 + 9 \times (-2) = -10$, donc par soustraction membre à membre, on obtient :

$$8(x-1) + 9(y+2) = 0 \Leftrightarrow 8(x-1) = 9(-y-2).$$

b) D'après l'égalité $8(x-1) = 9(-y-2)$, et comme $(x-1)$ et $(-y-2)$ sont des entiers, on a : 8 divise $9(-y-2)$.
Comme 8 est premier avec 9, d'après le théorème de Gauss, 9 divise $(-y-2)$. Donc il existe un entier relatif k tel que $-y-2 = 8k$, et on a donc : $y = -2 - 8k$. On a alors : $8(x-1) = 9 \times 9k$, c'est-à-dire $x - 1 = 9k$. Ainsi, $x = 1 + 9l$ pour le même entier relatif k.

4. Réciproquement, on vérifie que les couples $(1 + 9k; -2 - 8k)$ sont solutions :

$$8(1+9k) + 9(-2-8k) = 8 + 72k - 18 - 72k = -10.$$

Les couples-solutions sont les couples de la forme $(1 + 9k; -2 - 8k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

□

1.4 Équations différentielles

Définition 38.40.

Une *équation différentielle* est une relation entre une variable réelle, une fonction qui dépend de cette variable et un certain nombre de ses dérivées successives.

Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

1.4.1 Équations différentielles du type $y' = f$. Recherche de primitives

La première équation différentielle que l'on rencontre en classe de Terminale est l'équation différentielle du type $y' = f$ où f est une fonction réelle à variable réelle. Résoudre une telle équation signifie de rechercher les primitives de la fonction f.

Définition 38.41.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Une *primitive* de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 38.42.

On veut résoudre l'équation différentielle $y' = 2x$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions du type : $y = x^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Theoreme 38.43. *Existence de primitives*

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration. $\Diamond$ On démontre ce théorème dans le cas où I est un intervalle fermé $[a\,,b]$ et on admettra pour cela le résultat suivant : « toute fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ est bornée et atteint ses bornes ».

Soit f une fonction continue sur I et on note m son minimum. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur I. La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$, :

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m.$$

Étant donné que l'on cherche une fontiton F, définie et dérivable sur I telle que $F' = f$, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est une candidate idéale : elle est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. $\square$

Theoreme 38.44. *Lien entre les primitives*
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I. Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme :

$$x \mapsto F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. $\Diamond$

- Démontrons d'abord que toutes les primitives ont bien la forme annoncée. Soit G une primitive de f sur I. Alors $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$. La fonction $G - F$, de dérivée nulle, est donc une fonction constante sur I : il existe alors un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, soit $G(x) = F(x) + k$.
- On vérifie maintenant que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, sont bien des primitives de f. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G : x \mapsto F(x) + k$ définie sur I. Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$: G est donc bien une primitive de f sur I. $\square$

Propriété 38.45. *Condition d'unicité d'une primitive*
Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I, il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

Démonstration. $\Diamond$

Existence : soit G une primitive de f sur I et considérons $F : x \mapsto G(x) - G(x_0) + y_0$, définie sur I. Alors F est une primitive de f sur I et de plus, $F(x_0) = y_0$.

Unicité : notons F et G deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et démontrons que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$. Comme F et G sont deux primitives de f, il existe, d'après le théorème précédent, un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $F = G$ sur I.

$\square$

Les primitives permettent de faire du calcul intégral.

Propriété 38.46.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,,b]$ et F une primitive de f sur $[a\,,b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration. ♢ Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$. Φ et F étant deux primitives de f sur $[a\,,b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = F(x)+k$ pour tout $x \in [a\,,b]$. Ainsi, $\Phi(b) = F'b)+k$. Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $F(a) = -k$, et ainsi, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$. □

On donne une table de primitives pour les fonctions de références et une autre sur les primitives d'opérations de fonctions à connaître pour la classe de Terminale S.

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty\,,0[$ ou $]0\,,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0\,,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,,+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$, $k \in \mathbb{R}$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u'u^n$, $n \in \mathbb{N}$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \dfrac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$	$x \in I$

1.4.2 Équations différentielles du type $y' + ay = b$

Propriété 38.47.
On considère l'équation différentielle $y' + ay = 0$ où a est un réel et y une fonction dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{-ax} \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. ♢ On considère l'équation différentielle $(E) : y' + ay = 0$.

– Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-ax}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = -ak\mathrm{e}^{-ax}$ et :

$$f'(x) + af(x) = -ak\mathrm{e}^{-ax} + ak\mathrm{e}^{-ax} = 0$$

donc f est bien solution de (E).

– Les solutions de la forme $x \mapsto k\mathrm{e}^{-ax}$ sont des solutions de (E). Il reste à montrer qu'il n'en existe pas d'autres. Pour cela, on considère une fonction quelconque g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E) : soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{ax}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée :

$$h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{ax} + ag(x)\mathrm{e}^{ax} \Leftrightarrow h'(x) = \mathrm{e}^{ax}(g'(x) + ag(x)) = 0.$$

On a alors :

$$h(x) = K \Leftrightarrow g(x)\mathrm{e}^{ax} = K \Leftrightarrow g(x) = K\mathrm{e}^{-ax}.$$

On a donc montré que toute fonction solution de (E) est nécessairement de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{-ax}$, où K est un réel quelconque.

□

Exemple 38.48.
On veut résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 0$. Les solutions sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{3x}$ où k est un réel.

Propriété 38.49.
On considère l'équation $y' + ay = b$, où $a \neq 0$ et b sont des nombres réels et où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 38.50.
On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 4$. Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{-2x} + \frac{4}{2} = k\mathrm{e}^{-2x} + 2.$$

Propriété 38.51.
Soient x_0, y_0, $a \neq 0$ et b des réels donnés. L'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exemple 38.52.
On veut résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2}y = 2$ dont la solution f vérifie $f(0) = 1$.

- Les solutions de l'équation sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 4$ où k est une constante réelle.
- On a : $f(0) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 0} - 4 = k - 4$. $f(0) = 1$ donc $k = 4 + 1 = 5$.
- La solution de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2}y = 2$ telle que $f(0) = 1$ est $f(x) = 5\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 4$.

1.4.3 Équations différentielles du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Propriété 38.53.
On considère l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un réel non nul et y une fonction de la variable x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 38.54.
On souhaite résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$. Ici, $\omega^2 = 4$ donc $\omega = 2$. Les solutions sont du type $f(x) = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$ où λ et μ sont des réels.

Propriété 38.55.
L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant deux conditions initiales données.

Remarque 38.56.
Les conditions initiales sont, en général, du type :

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_1) = y_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Exemple 38.57.
On considère l'équation $(E) : 4y'' + \pi^2 y = 0$ dont la solution vérifie les conditions initiales :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

- On résout l'équation différentielle générale :

$$(E) \Leftrightarrow y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = 0$$

  les solutions sont donc :

$$f(x) = \lambda \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) + \mu \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$

- On utilise la première condition :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lambda \frac{\sqrt{2}}{2} + \mu \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu).$$

On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient $\lambda + \mu = 1$.

– On utilise la seconde condition :

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\mu \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Or :

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\lambda \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\mu \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}\lambda\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\mu\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}(-\lambda + \mu).$$

Sachant que $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on obtient $-\lambda + \mu = 0$.

– On résout donc le système d'équations obtenu avec les deux équations en λ et μ ci-dessus.

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + \mu + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

La solution qui vérifie l'équation différentielle (E) et les conditions initiales données est :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Compléments : équations fonctionnelles.

2 Méthodes approchées de résolution d'équations

2.1 Principe de dichotomie

La méthode de dichotomie repose sur le théorème des valeurs intermédiaires. Rappelons l'énoncé :

Theoreme 38.58. *Théorème des valeurs intermédiaires*
On considère une fonction f continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Corollaire 38.59. *Théorème de bijection*
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,,b]$, alors quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,,b]$.

Remarques 38.60.

- Le T.V.I. s'utilise dans le cas où on demande qu'une équation du type $f(x) = k$ admet au moins une solution.
- Le T.V.I. ne permet pas de déterminer le nombre de solutions, ni de calculer la ou les solutions.
- Le théorème de la bijection s'utilise dans le cas où on demande de montrer qu'une équation du type $f(x) = k$ admet une unique solution.
- Grâce au théorème de la bijection et un découpage d'étude de la fonction f par intervalles où elle est monotone, on peut donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ et on peut approcher les solutions grâce à la méthode de dichotomie.

Theoreme 38.61.
Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Si $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors il existe $\ell \in [a\,,b]$ tel que $f(\ell) = 0$.

On donne un algorithme qui met en place le principe de dichotomie pour une fonction f donnée.

```
def dicho(a,b,prec):
    while b-a > prec
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            b=c
        else:
            a=c
    return a,b
```

Voici la version récursive de l'algorithme de dichotomie :

```
def dichotomie(a,b,prec):
    if b-a <= prec
        return a,b
    else:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            return dichotomie(a,c,prec)
        else:
            return dichotomie(c,b,prec)
```

Enfin, on donne un exemple d'application du principe de dichotomie pour la recherche de valeurs approchées de solutions d'équation.

Exercice 38.61.
Soit la fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - 1$.

1. Calculer les limites de g en zéro et en l'infini.
2. Étudier les variations de g. Dresser le tableau de variations de g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle

$[1\,,3]$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous (principe de dichotomie) :

```
A <- 1
B <- 3
Tant que B - A > 0,1 faire
    M <- 0,5 (A+B)
    Si g(M) < 0 alors
        A <- M
    Sinon
        B <- M
    Fin Si
Fin Tant que
```

a) Faire fonctionner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
A						
B						
$B-A$						
M						
$g(M)$						

b) Que représentent les contenus des variables A et B à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

Solutions. ♢

1. On rappelle brièvement les limites de la fonction $x \mapsto \ln(x)$:

$$\lim_{x\to 0} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} = +\infty.$$

La limite de g en 0 se déduit par produit des limites : comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) - 1 = -1.$$

La limite de g en $+\infty$ se déduit par croissance comparée, la limite de x quand $x \to +\infty$ est $+\infty$ et toute puissance de x « l'emporte » sur le logarithme. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) - 1 = +\infty.$$

2. g est de la forme $uv - 1$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. On a : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi :

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

On étudie les variations de g en étudiant le signe de la dérivée de g. On a :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}.$$

Or :

$$\ln(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 \Leftrightarrow x \geq \mathrm{e}^{-1} \approx 0,37$$

(il n'y a pas de changement de symbole dans l'inéquation car $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$). On a aussi :

$$g(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-1}) - 1 = -1\mathrm{e}^{-1} - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1.$$

On en déduit alors le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	-	0	$+$	
g	$\|$ -1	$\searrow$	$-1,36$	$\nearrow$	$+\infty$

3. – La fonction g est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,,\mathrm{e}^{-1}]$ et strictement négative donc il n'y a pas de solution pour l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle.
– La fonction g est continue, strictement croissante sur l'intervalle $[\mathrm{e}^{-1}\,,1]$ et strictement négative donc il n'y a pas de solution pour l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle.
– La fonction g est continue, strictement croissante sur l'intervalle $[3\,,+\infty]$ et strictement positive donc il n'y a pas de solution pour l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle.
– La fonction g est strictement croissante et continue sur l'intervalle $[1\,,3]$. De plus :

$$g(1) = 1\ln(1) - 1 = 1 \times 0 - 1 = -1 < 0$$
$$g(3) = 3\ln(3) - 1 \approx 2,29 > 0$$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[1\,,3]$.

4. a) En exécutant l'algorithme, on obtient les valeurs suivantes :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
A	1	1	$1,5$	$1,75$	$1,75$	$1,75$
B	3	2	2	2	$1,875$	$1,8125$
$B-A$	2	1	$0,5$	$0,25$	$0,125$	$0,0625 < 0,1$
M	2	$1,5$	$1,75$	$1,875$	$1,8125$	ARRET
$g(M)$	$0,38 > 0$	$-0,39 < 0$	$-0,02 < 0$	$0,17 > 0$	$0,07 > 0$	

b) Les contenus des variables A et B à la fin de l'algorithme nous donne un encadrement de l'unique solution α de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $[1\,,3]$. On a ainsi : $1,75 < \alpha < 1,8125$ avec une amplitude de $\dfrac{1}{2^4}$.

□

2.2 Méthode de la sécante

Pour une fonction f continue sur un intervalle $[a\,,b]$, et vérifiant $f(a) \leq 0$, $f(b) > 0$, on trace le segment $[AB]$ où A est le point de coordonnées $(a; f(a))$ et B coordonnées $(b; f(b))$. Si le segment reste au dessus du graphe de f alors la fonction s'annule sur l'intervalle $[a', b]$ où $(a', 0)$ est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses. La droite (AB) s'appelle la *sécante*. On recommence en partant maintenant de l'intervalle $[a'\,,b]$ pour obtenir une valeur a''.

Proposition 38.62.
Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leq 0$ et $f(b) > 0$. Alors la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est croissante et converge vers la solution ℓ de $f(x) = 0$.

L'hypothèse f est convexe signifie exactement que pour tout x, x' dans $[a\,,b]$ la sécante (ou corde) entre $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ est au-dessus du graphe de f.

Une démonstration de la proposition est donnée dans le document : « A. Bodin & al., *Zéros des fonctions*, Exo7. »

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de la proposition. On donne l'algorithme pour la mise en place de la méthode de la sécante.

```
def secante(a,b,n):
    for i in range(n):
        a = a-f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a))
    return a
```

2.3 Méthode de Newton-Raphson

On présente une autre méthode numérique pour la résolution d'équations. Comme le principe de dichotomie, elle repose sur le calcul d'une récurrence qui part d'un point x_0 et qui, de proche en proche, tend vers la racine s.

Theoreme 38.63.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]\alpha\,,\beta[$, qui vérifie les hypothèses suivantes :
- (H_1) : il existe deux réels a et b tels que $\alpha < a < b < \beta$ et $f(a)f(b) < 0$;
- (H_2) : f est dérivable dans l'intervalle I ; la fonction dérivée f' ne prend pas des valeurs > 0 dans cet intervalle ;
- (H_3) : f' est strictement croissante dans I ;
- (H_4) : f' est continue dans I.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule s dans l'intervalle $[a\,,b]$. De plus, on définit par récurrence une suite (x_n) à partir de tout point x_0 de l'intervalle $]s\,,b]$ en posant :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Cette suite est strictement décroissante et converge vers s.

Démonstration. D'après (H_2), f est continue sur l'intervalle $[a\,,b]$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, d'après (H_1), f s'annule dans $]a\,,b[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

D'après (H_2), $f' > 0$ dans I, f y est donc strictement croissante. Comme $f(s) = 0$, on en déduit que, dans I, f ne prend que des valeurs < 0 avant s et des valeurs > 0 après. N'importe quel point de l'intervalle $]s\,,b]$ peut être choisi comme point x_0. Comme s est inconnu, on peut choisir b ou tâtonner.

La tangente (T_0) coupe l'axe des abscisses au point noté B d'abscisse :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Le point $(s;0)$ est appelé A. Le problème est de démontrer que A, B et $H_0 = (x_0;0)$ sont rangés dans cet ordre. C'est une propriété élémentaire de convexité du graphe : en effet, la pente du segment $[AM_0]$ est égale à $\dfrac{f(x_0)}{x_0 - s}$ est, d'après le théorème des accroissements finis, une valeur prise par la fonction f' dans l'intervalle $]s\,,x_0[$. Comme f' est strictement croissante dans I (hypothèse (H_3)), cette pente est strictement plus petite que la pente de la tangente (T_0). Comme enfin (H_0M_0) est perpendiculaire à l'axe des abscisses, les points A, B et H_0 sont bien dans l'ordre indiqué.

Il résulte que la suite (x_n) se trouve dans l'intervalle $]s\,,b]$ et est strictement décroissante. En tant que suite décroissante et minorée, elle converge. Notons sa limite ℓ. D'après l'hypothèse (H_4), la suite $(f'(x_n))$ converge vers $f(\ell)$ et $f'(\ell) \neq 0$ (d'après l'hypothèse (H_2)). De même que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$. En passant par la limite dans la relation de récurrence, on obtient donc l'égalité $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, qui prouve que $f(\ell) = 0$ puis que $\ell = s$. □

3 Autres types d'équations

3.1 Équation bicarrées (P)

Définition 38.64.

Une équation bicarrée est une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec a, b et c trois nombres et a non nul.

Pour résoudre une équation bicarrée, on peut faire un changement de variables $y = x^2$ et résoudre l'équation intermédiaire $ay^2 + by + c = 0$ (voir méthode de résolution dans la section 1.2).

Theoreme 38.65.
Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation intermédiaires, les solutions finales de l'équation bicarrée associée sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{y_1} \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{y_1} \text{ si } y_1 \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ et si } y_1 \geq 0\,; \\ x_3 &= \sqrt{y_2} \quad \text{et} \quad x_4 = -\sqrt{y_2} \text{ si } y_2 \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ et si } y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Exemple 38.66.
On veut résoudre l'équation $2x^4 + x^2 - 1$. Pour cela, on pose $y = x^2$ et on est ramené à une équation du second degré :

$$2y^2 + y - 1 = 0.$$

On calcule le discriminant du polynôme en y :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Il y a donc deux solutions pour l'équation intermédiaire :

$$y_1 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Or $y_1 < 0$ donc on ne peut pas le prendre en compte dans les solutions finales.

Les solutions finales sont donc :

$$x_1 = \sqrt{y_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.2 Équations irrationnelles (P)

Définition 38.67.
Une équation où l'inconnue figure sous un radical est dite *irrationnelle*. Pour résoudre une telle équation, on est amené à élever les deux membres d'une égalité à la puissance n pour éliminer le radical $\sqrt[n]{}$.

Exemple 38.68.
On souhaite résoudre l'équation : $\sqrt{2+x} + 4 - \sqrt{10-3x} = 0$. Tout d'abord on isole le radical :

$$\sqrt{2+x} + 4 - \sqrt{10-3x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2+x} + 4 = \sqrt{10-4x}$$

On élève les deux membres de l'équation au carré :

$$\Leftrightarrow 2 + x + 8\sqrt{2+x} + 16 = 10 - 3x \Leftrightarrow 8\sqrt{2+x})8 - 4x \Leftrightarrow 2\sqrt{2+x} = 2 - x$$

On élève encore les deux membres de l'équation pour se débarrasser du dernier radical :

$$\Leftrightarrow 4(2+x) = 4 + 4x + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4.$$

On obtient deux solutions potentiels à l'équation $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$. On vérifie si les deux solutions potentiels vérifient l'équation :

$$\sqrt{2-2} + 4 - \sqrt{10 - 3 \times (-2)} = 0 + 4 - \sqrt{10+6} = 0 + 4 - \sqrt{16} = 0.$$
$$\sqrt{2+2} + 4 - \sqrt{10 - 3 \times (+2)} = \sqrt{4} + 4 - \sqrt{10-9} = 2 + 4 - 1 = 5 \neq 0.$$

Seule la solution $x_1 = -2$ satisfait l'équation proposée.

3.3 Équations trigonométriques (P)

On peut résoudre des équations du type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 38.69. *Equations cosinus*
On souhaite résoudre l'équation $\cos(x) = a$.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si $a = -1$ alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

- Si $a = 1$ alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

- Si $-1 < a < 1$, il existe un unique nombre b dans $]0\,,\pi[$ tel que $a = \cos(b)$. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x) = a$ est :

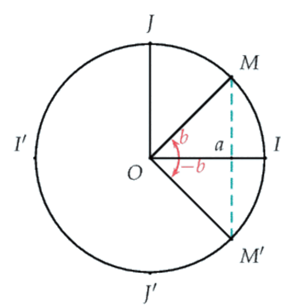
$$\{b + 2k\pi \quad \text{et} \quad -b + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Méthode 38.70.

Dans le cas général, $a \in\,]-1\,,1[$, on peut trouver un unique nombre b dans $]0\,,\pi[$ tel que $a = \cos(b)$. Les solutions de $\cos(x) = \cos(b)$ sur l'intervalle $]-\pi\,,\pi]$ sont $-b$ et b.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π :

$$\{b + 2k\pi \quad \text{et} \quad -b + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$



Exemple 38.71.

On souhaite résoudre dans $]-\pi\,,\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$. On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
L'équation $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a deux solutions dans l'intervalle $]-\pi\,,\pi]$, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Dans $\mathbb{R}$, cette équation a une infinité de solutions. Les deux solutions précédentes sont encore valables plus toutes celles que l'on obtient en ajoutant ou en soustrayant un nombre entier de fois 2π.

Les solutions sont $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 38.72. *Équations sinus*

On souhaite résoudre l'équation $\sin(x) = a$.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si $a = -1$ alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Si $a = 1$ alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Si $-1 < a < 1$, il existe un unique nombre b dans $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$ tel que $a = \sin(b)$. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = a$ est :

$$\{b + 2k\pi \quad \text{et} \quad \pi - b + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Méthode 38.73.

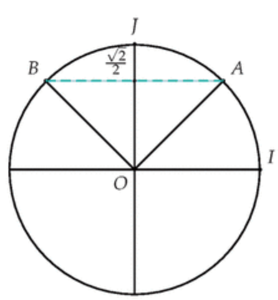
Dans le cas général $a \in \,]-1\,,1[$, il existe un unique nombre b dans $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$ tel que $a = \sin b$. L'équation est donc équivalente à $\sin x = \sin b$, ce qui est équivalent à $x = b$ ou $x = \pi - b$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π :

$$\{b + 2k\pi \quad \text{et} \quad \pi - b + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Exemple 38.74.

On veut résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$. On remarque l'équation est équivalente à $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Les solutions de cette équation dans $]-\pi\,,\pi]$ sont $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ dont les points-images sur le cercle sont A et B.



Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc :

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3.4 Taux moyen (P)

Propriété 38.75.
Soit a un nombre strictement positif, n un entier naturel non nul. L'équation $x^n = a$ d'inconnu x admet une unique solution notée $x = a^{1/n}$ (a puissance $1/n$).

L'équation $x^n = a$ se résout de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x^n = a &\Leftrightarrow (x^n)^{1/n} = (a)^{1/n} \\ &\Leftrightarrow x^{n \times \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x^{\frac{n}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x^1 = a^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

On note aussi $a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a}$, la racine $n$ième de a.

Définition 38.76. *Moyenne géométrique*
Soient c_1, c_2, …, c_n n nombre réels strictement positifs. On appelle moyenne géométrique de ces nombres, le réel :

$$c = (c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Définition 38.77.
Supposons que sur n intervalles de temps, un produit subisse une évolution globale de t. Le *taux d'évolution moyen* t_M, est le taux d'évolution qu'il devra subir pendant n intervalles de temps pour qu'au final, l'évolution soit de $t\%$.

Le taux d'évolution moyen est donné par l'équation :

$$(1 + t_M)^n = 1 + t$$

où t est le taux d'évolution globale à l'issue des n évolutions.

En résolvant l'équation donné, on obtient :

Propriété 38.78.
Avec les notations précédentes, le taux d'évolution moyen t_M est donné par :

$$1 + t_M = (1 + t)^{1/n}$$

où t est le taux d'évolution globale à l'issue des n évolutions.

Exercice 38.78.

Un produit a augmenté de 20% en 5 ans. Quelle est son évolution annuelle moyenne ?

Solution. On note t_M le taux d'évolution moyen annuel. Le taux global est de 20%, le coefficient multiplicateur traduisant une hausse de 20% est égal à $1 + 0,2 = 1,2$.

Ainsi, pour trouver t_M, il faut résoudre l'équation suivante :

$$(1 + t_M)^5 = 1,2 \Leftrightarrow 1 + t_M = 1,2^{1/5} = 1,037 \Leftrightarrow t_M = 1,037 - 1 = 0,037.$$

Conclusion, si en 5 ans, un produit a augmenté de 20%, en moyenne, il a augmenté de 3,7% par an. □

3.5 Équations du second degré à coefficients complexes (HP)

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$. On note Δ le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$$

Soit δ le complexe tel que $\delta^2 = \Delta$ (l'existence de ce nombre complexe peut être prouvé en résolvant les équations du type $z^2 = z_0$ où z_0 est un nombre complexe). La forme canonique permet de conclure :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\delta^2}{4a^2}$$

et en factorisant, on retrouve des formules semblables à celles connues dans $\mathbb{R}$:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Remarque 38.79.

Attention, les nombres z_1 et z_2 ne sont pas nécessairement conjugués.

Exemple 38.80.

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1 + \mathrm{i})z^2 + \mathrm{i}z - 1 = 0.$$

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = -1 - 4(1 + \mathrm{i})(-1) = -1 + 4(1 + \mathrm{i}) = 3 + 4\mathrm{i}.$$

On cherche un complexe δ tel que : $\delta^2 = 3 + 4\mathrm{i}$. On peut vérifier que le nombre $\delta = 2 + \mathrm{i}$ convient. On en déduit alors les deux solutions de l'équation :

$$z_1 = \frac{-\mathrm{i} - (2 + \mathrm{i})}{2(1 + \mathrm{i})} = \frac{-2 - 2\mathrm{i}}{2(1 + \mathrm{i})} = -1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-\mathrm{i} + (2 + \mathrm{i})}{2(1 + \mathrm{i})} = \frac{2}{2(1 + \mathrm{i})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

3.6 Équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (HP)

On peut s'intéresser aux équations du premier degré et second degré où les coefficients et solutions sont des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3.6.1 Équations du premier degré

1) $\overline{x} + \overline{a} = \overline{b}$

L'équation $\overline{x} + \overline{a} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut se retrouver très facilement. Ce revient à rechercher l'opposé de $\overline{a}$ qui est $\overline{-a} = \overline{n-a}$ puis :

$$\overline{x} + \overline{a} \ = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{b} + \overline{-a} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{b+n-a}.$$

2) $\overline{ax} = \overline{b}$

On veut résoudre l'équation $\overline{ax} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On se place d'abord dans le cas où a est premier avec n.

Ici, on aura besoin de la notion de PGCD pour introduire les résultats suivants.

Theoreme 38.81.
$\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si a et n sont premiers entre eux, c'est-à-dire si $\mathrm{PGCD}(a, n) = 1$.

On utilise le lemme de Gauss (théorème énoncé plus haut dans la leçon)

Theoreme 38.82. *Lemme de Gauss*
Soient a, b et c trois entiers. On suppose que a divise le produit bc et que a et b sont premiers entre eux. Alors a divise c.

On peut faire la remarque suivante :

Remarque 38.83.
Si p est un nombre premier, les entiers $1, \ldots, p-1$ sont tous premiers avec p. Ainsi, tout élément non nul de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est inversible. Ainsi, la résolution de l'équation $\overline{ax} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se déroule comme pour la résolution de l'équation $ax = b$ dans $\mathbb{R}$. Il s'agit juste de faire attention à ce que le nombre par lequel on divise soit non nul.

Exemple de table d'inverses de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$\overline{a}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{a}^{-1}$		$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$

Dans le cas général, on note $d = \mathrm{PGCD}(a, n)$ et on suppose que $d \neq 1$. On veut résoudre l'équation $\overline{ax} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si b n'est pas un multiple de d, l'équation n'a pas de solution.

Si maintenant b est un multiple de d alors l'équation est équivalente à :

$$\left(\frac{a}{d}\right) x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{n}{d}}.$$

Les quantités $\frac{a}{d}$ et $\frac{n}{d}$ sont premières entre elles, donc on peut inverser $\frac{a}{d}$ modulo $\frac{n}{d}$.

Remarque 38.84.

Les solutions sont définies modulo $\frac{n}{d}$ donc s'il l'on veut résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on aura d solutions.

Exemple 38.85.

On veut résoudre l'équation $\overline{4}\overline{x} = \overline{2}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. 4 et 10 ne sont pas premiers entre eux, leur PGCD est 2. Comme 2 est multiple de 2, il y aura deux solutions à l'équation.

On peut alors diviser l'équation par 2, l'équation initiale est équivalente à l'équation $\overline{2}\overline{x} = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. $\overline{2}$ admet un inverse dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, c'est la classe $\overline{3}$. On multiple donc notre équation par $\overline{3}$ et on obtient :

$$\overline{x} = \overline{3}$$

dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Les solutions dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sont donc $\overline{3}$ et $\overline{8}$.

3.6.2 Équations puissance

On souhaite maintenant résoudre l'équation $\overline{a}^{\overline{x}} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Tout d'abord, un mot sur les puissances successives de $\overline{a}$. On peut montrer que la suite $(\overline{a}^k)_k$ est périodique car l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini. Il existe donc deux entiers i et j $(i < j)$ tels que $u_i = u_j$.

Plus précisément, la suite $(\overline{a}^k)_k$ est de période $j - i$ au moins à partir du rang i mais il n'est pas forcément vrai que cette suite est périodique à partir du rang 0, c'est le cas où $\overline{a}$ ne serait pas inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (on aurait alors $\overline{a}\overline{a}^{k-1} = 1$, ce qui serait en total contradiction avec la non-inversibilité de $\overline{a}$).

On donnera une méthode pour déterminer la période de la suite quand $\overline{a}$ est inversible.

1) Cas où a est premier avec n

Lorsque a est premier avec n, la suite $(\overline{a}^k)$ est périodique à partir du rang 0. Il existe des entiers $i < j$ tels que :

$$\overline{a}^i = \overline{a}^j.$$

Si on note $\overline{a'}$ un inverse de $\overline{a}$, c'est-à-dire $\overline{a}\overline{a'} = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut multiplier l'égalité précédente par $(\overline{a'})^i$. Il vient :

$$\overline{a}^{j-i} = \overline{1}$$

ce qui prouve bien ce que l'on veut.

2) Fonction indicatrice d'Euler

On note φ la fonction indicatrice d'Euler. Si $n \geq 2$ est un entier, $\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers naturels inférieurs à n et premiers avec n. C'est le cardinal de l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ensemble que l'on note aussi $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$).

Theoreme 38.86.
Soit $\overline{a}$ un inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors :

$$\overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}.$$

ou dans sa version « congruences » :

Theoreme 38.87.
Soit a et n deux entiers premiers entre eux. Alors :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Si $n = p$ un nombre premier, tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont inversibles. On a : $\varphi(p) = p - 1$ et le théorème nous dit que si $\overline{a} \in \mathbb{Z}/Z\mathbb{Z}$ tel que $\overline{a} \neq \overline{0}$ alors $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$. Si $\overline{a}$ est nul, on peut multiplier l'égalité précédente par $\overline{a}$.

On a ainsi le petit théorème de Fermat :

Theoreme 38.88. *Petit théorème de Fermat*
Soit p un nombre premier. Pour tout $\overline{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a l'égalité :

$$\overline{a}^p = \overline{a}.$$

ou dans sa version « congruences »

Theoreme 38.89. *Petit théorème de Fermat*
Soit p un nombre premier. Pour tout entier a, on a la congruence :

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

On termine cette section en donnant une formule pour $\varphi(n)$ dans le cas général.

Theoreme 38.90.
Si la décomposition en facteurs premiers de l'entier n est :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

alors $\varphi(n)$ peut se calculer à l'aide de la formule suivante :

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

3.6.3 Équations du second degré

On se limite au cas de l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier impair.

On utilise pour résoudre l'équation $\overline{ax} + \overline{b}\overline{x} + \overline{c} = 0$, la méthode du discriminant :

$$\begin{aligned}\overline{ax} + \overline{b}\overline{x} + \overline{c} = 0 &\Leftrightarrow \overline{a}\left(\overline{x}^2 + \frac{\overline{b}}{\overline{a}}\overline{x} + \frac{\overline{c}}{\overline{a}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{a}\left(\overline{x} + \frac{\overline{b}}{\overline{2a}}\right)^2 - \frac{\overline{b}^2}{\overline{4a}} + \frac{\overline{c}}{\overline{a}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\overline{x} + \frac{\overline{b}}{\overline{2a}}\right)^2 = \frac{\overline{\Delta}}{\overline{4a}^2}.\end{aligned}$$

où $\overline{\Delta} = \overline{b}^2 - \overline{4ac}$.

Les divisions par $\overline{2}$, $\overline{4}$ et $\overline{a}$ correspondent respectivement aux multiplications par les inverses de ces nombres. C'est pour cela qu'il est important de supposer que p est impair.

Il s'agit maintenant de déterminer une racine carrée de $\overline{\Delta}$, c'est-à-dire un élément $\delta \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\overline{\delta}^2 = \overline{\Delta}$. Il existe un critère pour savoir dans un premier temps si un tel élément existe. Supposons qu'on ait trouvé un tel élément. L'équation devient :

$$\begin{aligned}\left(\overline{x} + \frac{\overline{b}}{\overline{2a}}\right) &= \left(\frac{\overline{\delta}}{\overline{2a}}\right)^2 \\ \left(\overline{x} + \frac{\overline{b} + \overline{\delta}}{\overline{2a}}\right)\left(\overline{x} - \frac{\overline{b} + \overline{\delta}}{\overline{2a}}\right) &= \overline{0}\end{aligned}$$

On a donc une équation produit nulle et on peut déduire que l'un des facteurs est nul car p est premier (si tel ne serait pas le cas (premier facteur nul), il est inversible et on trouverait que le deuxième facteur est nul après avoir multiplié par l'inverse en question).

4 Bien faire...

4.1 la différence entre inconnu et paramètre

Un paramètre est une variable susceptible de recevoir une valeur constante pour un cas déterminé et qui désigne certains coefficients ou certaines quantités en fonction desquels on veut exprimer une proposition ou les solutions d'un système d'équations.

4.2 la différence entre équation et identité

Une équation est une égalité qui n'est pas nécessairement vraie pour toutes les valeurs possibles que peut prendre la variable.