

**Notes de Cours**  
**M102 : FONDEMENTS DE L'ANALYSE 1**

Clément BOULONNE

Web : <http://clementboulonne.new.fr>

Mail : clement.boulonne@gmail.com

**Université des Sciences et Technologies de Lille**  
**U.F.R de Mathématiques Pures et Appliquées**  
Licence de Mathématiques — Semestre 1



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Nombres réels</b>	<b>1</b>
1.1	Historique	1
1.2	Le corps des réels	2
1.2.1	Addition des nombres réels	2
1.2.2	Multiplication des réels	3
1.3	Relation d'ordre	3
1.4	Valeur absolue	6
1.5	Intervalles de $\mathbb{R}$	6
1.5.1	Définition d'un intervalle	6
1.5.2	Les différents types d'intervalles	7
1.5.3	Caractérisation	7
1.5.4	Notion de voisinage	8
1.6	Borne supérieure et inférieure	8
1.6.1	Maximum et minimum	8
1.6.2	Majorant et minorant	9
1.6.3	Borne inférieure et supérieure	9
1.7	Exercices	9
<b>2</b>	<b>Suites numériques</b>	<b>11</b>
2.1	Définitions	11
2.2	Exemple de suites	17
2.2.1	Suite arithmétique	17
2.2.2	Suite géométrique réelle	18
2.2.3	Série géométrique	18
2.2.4	Suite comparable à une suite géométrique	19
2.2.5	Approximation d'un réel par des rationnels	20
2.3	Théorèmes de convergence des suites	20
2.3.1	Les suites convergentes sont bornées	20
2.3.2	Suites monotones	21
2.3.3	Suites adjacentes	21
2.3.4	Suites extraites	23

2.3.5	Suites récurrentes . . . . .	25
2.4	Exercices . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Fonctions réelles</b>	<b>31</b>
3.1	Définition d'une fonction réelle . . . . .	31
3.2	Monotonie de la fonction . . . . .	32
3.3	Fonctions minorées, majorées et bornées . . . . .	33
3.4	Parité de la fonction . . . . .	34
3.5	Périodicité d'une fonction . . . . .	35
3.6	Opérations sur les fonctions . . . . .	36
3.7	Exercices . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Limites et continuité des fonctions réelles</b>	<b>39</b>
4.1	Limites . . . . .	39
4.1.1	Définitions . . . . .	39
4.1.2	Propriétés . . . . .	42
4.1.3	Formes indéterminées . . . . .	42
4.1.4	Passage à la limite dans les inégalités . . . . .	42
4.1.5	Théorème des gendarmes . . . . .	43
4.2	Continuité . . . . .	43
4.2.1	Définition . . . . .	43
4.2.2	Propriétés . . . . .	43
4.2.3	Prolongement par continuité . . . . .	48
4.2.4	Image d'un intervalle par une application continue . . . . .	48
4.3	Fonctions réciproques . . . . .	51
4.3.1	Théorème d'existence des fonctions réciproques . . . . .	51
4.3.2	Fonctions réciproques usuelles . . . . .	53
4.4	Exercices . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Fonctions dérivables</b>	<b>63</b>
5.1	Dérivabilité . . . . .	63
5.1.1	Dérivée en un point et en un intervalle . . . . .	63
5.1.2	Tangente en un point . . . . .	64
5.1.3	Rapport avec la continuité . . . . .	65
5.2	Propriétés . . . . .	66
5.2.1	Somme et produit de deux fonctions dérivables . . . . .	66
5.2.2	Dérivée de l'inverse et du quotient . . . . .	67
5.2.3	Dérivée de la composée . . . . .	67
5.2.4	Dérivée d'une fonction réciproque . . . . .	68
5.3	Dérivées des fonctions usuelles . . . . .	71
5.4	Extremum local . . . . .	71

5.5	Théorème des accroissements finis . . . . .	72
5.5.1	Théorème de Rolle . . . . .	72
5.5.2	Théorème des accroissements finies . . . . .	72
5.6	Dérivées successives . . . . .	75
5.7	Exercices . . . . .	76



# Programme du cours

Math102 : **Fondements de l'analyse 1** [S1, 5 ECTS]

Prérequis : Aucun

- (6 h) Nombres réels.  
Propriétés de  $\mathbb{R}$  (la construction de  $\mathbb{R}$  n'est pas au programme de cette unité) : opérations sur  $\mathbb{R}$ . Relation d'ordre,  $\mathbb{R}$  est totalement ordonnée.  $\mathbb{R}$  est archimédien. Partie entière.  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Valeur absolue. Intervalles, voisinages. Majorant, minorant, plus petit élément, plus grand élément, borne supérieure, inférieure. Propriété de la borne sup (admise).
- (12 h) Suites numériques.  
Définition d'une suite, d'une suite majorée, minorée, monotone. Limite, convergence, propriétés de base (somme, produit, quotient). Suites géométriques, suites comparables à des suites géométriques. Théorème sur la convergence des suites croissantes majorées (démonstration à partir de la propriété de la borne sup). Théorème des suites adjacentes. Suites extraites. Théorème de Bolzano-Weierstrass (démonstration par dichotomie). Suites récurrentes : représentation graphique, étude de la convergence.
- (4 h) Fonctions réelles : Définitions générales.  
Ensemble de départ (domaine de définition ou ensemble de définition) et d'arrivée Image et graphe. Image directe et réciproque d'un ensemble. Injectivité, surjectivité, monotonie, croissance, périodicité. . . Fonction réciproque d'une fonction injective : domaine (ou ensemble) de définition, image. Graphe de la fonction réciproque  $f^{-1}$ .
- (16 h) Fonctions réelles : Limites et continuité.  
Définition de la limite. Propriétés de base :  $f + g$ ,  $fg$ ,  $f/g$ ,  $g \circ f$ . Passage à la limite dans les inégalités et théorème « des gendarmes ».  
Définition de la continuité. Propriétés de base (somme, produit, composée). Prolongement par continuité. Continuité et suites : «  $f$  est continue en un point  $a$  si et seulement si toute suite  $(u_n)$  convergeant vers

$a$ ,  $(f(u_n))$  converge vers  $f(a)$  ». Retour aux suites récurrentes. Théorèmes de base : valeurs intermédiaires, maximum sur un intervalle fermé borné, image d'un intervalle. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

Fonctions usuelles : exp, log, fonctions puissances et puissances inverses, trigonométriques et trigonométriques inverses, trigonométriques hyperboliques et inverses.

– (12 h) Fonctions réelles : Dérivabilité.

Dérivabilité en un point, interprétation géométrique. Dérivée de  $f + g$ ,  $fg$ ,  $g \circ f$  et de  $f^{-1}$ . Dérivées des fonctions réciproques usuelles. Minima, maxima (locaux). Dérivée d'ordre supérieur. Formule de Leibniz, Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Lien entre la monotonie et le signe de la dérivée. Règle de l'Hospital.



# Chapitre 1

## Nombres réels

### 1.1 Historique

Le mathématicien Pythagore était toujours convaincu que les phénomènes physiques étaient régis par les nombres. Par exemple, pour avoir un son mélodieux, il faut pincer la corde au  $\frac{1}{2}$ . Les nombres, à cet époque, étaient des entiers naturels et des fractions (rationnels). Mais, vient l'apparition du théorème de Pythagore :

**Théorème 1.1** (Pythagore). *Un triangle est rectangle si et seulement si la somme des carrés de deux côtés  $a, b$  est égale au carré du plus grand côté  $c$ , c'est-à-dire :*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

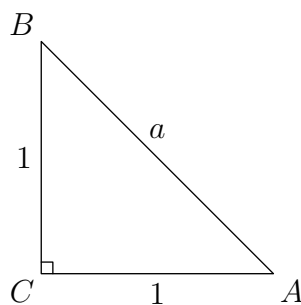


FIGURE 1.1 – Triangle rectangle en  $B$  de côtés  $AB = 1$ ,  $BC = 1$  et d'hypothénuse  $a$ . Que vaut  $a$  ?

Dans le triangle présenté en figure 1.1, d'après le théorème de Pythagore vaut

$$a^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

D'où, on note :  $a = \sqrt{2}$ . Pythagore croyait que  $a$  peut se noter  $\frac{p}{q}$  mais il n'en est rien<sup>1</sup>. On a donc une insuffisance de l'ensemble  $\mathbf{Q}$  des nombres rationnels qui sont les nombres qu'on peut représenter comme fraction  $\frac{p}{q}$  avec  $p, q$  des entiers. On verra, dans ce cours, qu'il existe, entre deux rationnels, des réels. Ici :

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

On passera la construction des nombres réels qui sera réservé à une autre unité, voir [4, 5]

Finalement, comme Pythagore ne voulait pas entendre parler de nombres réels<sup>2</sup>, il construisit, avec ses disciples, les triples pythagoriciens.

## 1.2 Le corps des réels

On ne rappellera pas les définitions de groupes, d'anneaux et corps. Si vous ne les connaissez pas (encore), vous pouvez vous référer à [3, Chap III.]. On va montrer dans cette section que, muni des opérations d'addition et de multiplication usuelles,  $\mathbf{R}$  est un corps.

### 1.2.1 Addition des nombres réels

**Définition 1.2** (Addition des nombres réels). *On définit sur l'ensemble  $\mathbf{R}$ , une opération nommée addition et noté  $+$  telle que :*

1. *La loi  $+$  est associative, c'est-à-dire que pour tout  $x, y, z \in \mathbf{R}$ , on a :*

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z.$$

2. *La loi  $+$  possède un élément neutre qui est « 0 ». On a alors, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,*

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

3. *Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on a l'existence d'un inverse qu'on appelle opposé qu'on note  $-x$ . On a ainsi que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , il existe un  $x' \in \mathbf{R}$  tel que :*

$$x + x' = 0 \Rightarrow x' = -x.$$

**Proposition 1.3.**  *$(\mathbf{R}, +)$  est un groupe d'après la définition 1.2. De plus, on a :*

$$x + y = y + x, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbf{R}.$$

*$(\mathbf{R}, +)$  est donc un groupe commutatif (ou abélien).*

---

1. car  $a = \sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel, c'est ce qu'on appellera un nombre irrationnel  
 2. L'ensemble  $\mathbf{R}$  a été formalisé au cours du XVII<sup>e</sup> grâce à l'analyse infinitésimal

## 1.2.2 Multiplication des réels

**Définition 1.4** ( $\mathbf{R}^*$ ). On note  $\mathbf{R}^*$ , l'ensemble  $\mathbf{R}$  privé de l'élément neutre de l'addition « 0 », c'est-à-dire  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

**Définition 1.5** (Multiplication des réels). On définit sur l'ensemble  $\mathbf{R}$ , une opération nommée multiplication et noté  $\times$  telle que :

1. La loi  $\times$  est associative, c'est-à-dire que pour tout  $x, y, z \in \mathbf{R}$ , on a :

$$(x \times y) \times z = x \times (y + z) = x \times y \times z.$$

2. La loi  $\times$  possède un élément neutre qui est « 1 ». On a alors, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$x \times 1 = 1 \times x = x.$$

3. Pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ , on a l'existence d'un inverse qui est  $\frac{1}{x}$ . On a ainsi que pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ , il existe un  $x' \in \mathbf{R}$  tel que :

$$x \times x' = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x}.$$

**Proposition 1.6.** On dit que  $(\mathbf{R}^*, +)$  est un groupe qui est, en plus, abélien car pour tout  $x, y \in \mathbf{R}$ , on a :  $xy = yx$ .

**Propriété 1.7** (Distributivité). La loi  $\times$  est aussi distributive avec la loi  $+$ , c'est-à-dire que pour tout  $x, y, z \in \mathbf{R}$ , on a :

$$x \times (y + z) = xy + xz$$

**Proposition 1.8.** On dit que  $\mathbf{R}$  est un corps car chaque élément de  $\mathbf{R}^*$  est inversible par la multiplication.

## 1.3 Relation d'ordre

**Définition 1.9** (Relation, [3]). Soit  $E$  un ensemble. Une relation  $\mathcal{R}$  dans  $E$  est un sous-ensemble de  $E \times E$ .

**Exemple 1.10.** Soit la relation  $\mathcal{R}$  dans  $\mathbf{Z}$  définie par :

$$p\mathcal{R}q = \{(x, y) \in \mathbf{Z}, 4 \mid p - q\}.$$

On a :  $12\mathcal{R}8$  mais  $15 \not\mathcal{R}12$ .

**Définition 1.11** (Relation d'ordre). On dit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre si :

1.  $\mathcal{R}$  est réflexive, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x,$$

2.  $\mathcal{R}$  est anti-symétrique, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y,$$

3.  $\mathcal{R}$  est transitive, c'est-à-dire :

$$\forall x, y, z \in \mathcal{R}, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

**Définition 1.12** (Relation d'ordre totale). Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre sur  $E$ . On dit que  $\mathcal{R}$  est totale (ou  $E$  est totalement ordonné si on peut comparer deux éléments quelconques de  $E$ , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

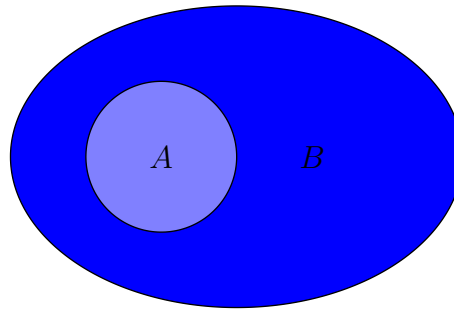


FIGURE 1.2 – L'ensemble  $A$  est inclus dans  $B$

**Exemples 1.13.** 1. Soient  $E$  un ensemble et  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Par exemple, si  $E = \{1, 2, 3\}$  alors :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

On munit  $\mathcal{P}(E)$  de la relation  $\subset$  dite « inclusion d'ensembles », c'est-à-dire si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles de  $E$  alors  $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$ . La figure 1.2 nous représente deux ensembles inclus l'un dans l'autre. On montre que  $\subset$  est une relation d'ordre :

**Réflexivité** Si  $A \in E$ , on a bien  $A \subset A$  car tout élément de  $A$  sont trivialement dans  $A$ .

**Anti-symétrie** Soient  $A, B \in E$ . Si  $A \subset B$  alors tous les éléments de  $A$  sont dans  $B$ . Si  $B \subset A$  alors tous les éléments de  $B$  sont dans  $A$ . On suppose qu'on a les deux assertions simultanément, c'est-à-dire tous les éléments de  $A$  sont dans  $B$  et vice-versa. D'où :  $A = B$ .

**Transitivité** Soient  $A, B, C \in E$ . On suppose que  $A \subset B$  donc tous les éléments de  $A$  sont dans  $B$  et que  $B \subset C$  alors tous les éléments de  $B$  sont dans  $C$ . Ainsi tous les éléments de  $A$  sont dans  $B$  donc dans  $C$ , d'où  $A \subset C$ .

Conclusion faite, la relation «  $\subset$  » est une relation d'ordre. Par contre, elle n'est pas totale car on ne peut pas comparer des singletons de  $E$ .

2. La relation  $\leq$  est une relation d'ordre totale dans  $\mathbf{R}$  car elle est réflexive, antisymétrique, transitive et on peut toujours comparer deux nombres réels entre eux.

**Propriétés 1.14.** Soient  $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ ,

1. si  $z \leq y$  et  $x \leq t$  alors  $x + z \leq y + t$ ;
2. si  $x \leq y$  et  $z \leq 0$  alors  $xy \leq yz$  et  $-xz \leq -yz$ .

**Proposition 1.15** ( $\mathbf{R}$  est archimédien). Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , il existe un  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $n \leq x$ . On dit alors que  $\mathbf{R}$  est archimédien.

**Définition 1.16** (Partie entière). Soit  $x \in \mathbf{R}$  alors il existe un unique entier  $k$  tel que :

$$k \leq x \leq k + 1.$$

Cet entier s'appelle la partie entière de  $x$  et se note  $E(x)$ .

**Proposition 1.17.**  $E(x)$  est le plus grand entier inférieur ou égale à  $x$ . C'est-à-dire, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$E(x) \leq x \leq E(x) + 1.$$

**Exemples 1.18.** 1.  $E(2,713) = 2$ ,

2.  $E(\pi) = 3$ ,

3.  $E(\sqrt{2}) = 1$ ,

4.  $E(-2,713) = -3$ .

## 1.4 Valeur absolue

**Définition 1.19** (Valeur absolue). Soit  $x \in \mathbf{R}$ , la valeur absolue de  $x$  (qu'on note  $|x|$ ) est le réel définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

**Propriétés 1.20.** Soient  $x, y \in \mathbf{R}$ ,

1.  $|x| \geq 0$  et  $|x| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ ,
2.  $|xy| = |x| \cdot |y|$ ,
3. pour  $y \neq 0$ ,

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|},$$

4.  $(\sqrt{x})^2 = |x|$ ,
5.  $-|x| \leq x \leq |x|$ ,

On peut donner une interprétation géométrique de la valeur absolue. Soit deux points  $x, y$  sur la droite réelle  $\mathbf{R}$ , la valeur absolue  $|x - y|$  représente la distance qui sépare les points  $x$  et  $y$  (voir la figure 1.3).

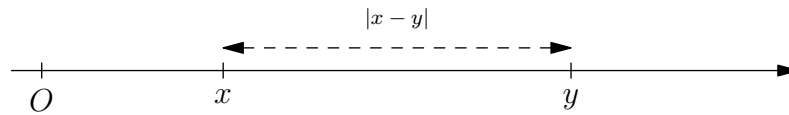


FIGURE 1.3 – La valeur absolue de  $x - y$  représente la distance qui sépare les points d'abscisses  $x$  et  $y$

**Proposition 1.21** (Inégalité triangulaire). Soient  $x, y \in \mathbf{R}$ , on a :

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

## 1.5 Intervalles de $\mathbf{R}$

### 1.5.1 Définition d'un intervalle

**Définition 1.22** (Intervalle, [7]). On appelle intervalle, un ensemble de nombres délimité par deux bornes qui sont des nombres réels. Cet intervalle contient tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.

### 1.5.2 Les différents types d'intervalles

**Définition 1.23** (Intervalle fermé). Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . On appelle intervalle fermé, tout intervalle de type :

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}.$$

**Définition 1.24** (Intervalle ouvert). Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . On appelle intervalle ouvert, tout intervalle du type :

$$\begin{aligned} ]a, b[ &= \{x \in \mathbf{R}, a < x < b\}, \\ ]a, +\infty[ &= \{x \in \mathbf{R}, a < x\}, \\ ]-\infty, b[ &= \{x \in \mathbf{R}, x < b\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.25** (Intervalle semi-ouvert). Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . On appelle intervalle semi-ouvert, tout intervalle du type :

$$\begin{aligned} ]a, b] &= \{x \in \mathbf{R}, a < x \leq b\}, \\ [a, b[ &= \{x \in \mathbf{R}, a \leq x < b\}, \\ ]-\infty, b] &= \{x \in \mathbf{R}, x \leq b\}, \\ [a, +\infty[ &= \{x \in \mathbf{R}, a \leq x\}. \end{aligned}$$

### 1.5.3 Caractérisation

On cherche à savoir si un ensemble  $I$  est un intervalle ou non de  $\mathbf{R}$ .

**Proposition 1.26** (Caractérisation). Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbf{R}$ .  $I$  est un intervalle si et seulement si, pour tout  $a, b \in I$  avec  $a < b$ ,  $[a, b]$  est inclus dans  $I$ .

**Exemple 1.27.**  $I = [0, 1] \cap \mathbf{Q}$  n'est pas un intervalle.

**Théorème 1.28.** Tout intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels, c'est-à-dire pour tout  $I$ , intervalle ouvert non-vidé, on a :

- (i)  $I \cap \mathbf{Q} = \emptyset$ ,
- (ii)  $I \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \emptyset$ .

On dit que  $\mathbf{Q}$  est dense dans  $\mathbf{R}$ .

### 1.5.4 Notion de voisinage

**Définition 1.29** ( $\bar{\mathbf{R}}$ ). On note  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = [-\infty, +\infty]$  et on l'appelle droite réelle achevée.

**Définition 1.30** (Voisinage). Soit  $a \in \bar{\mathbf{R}}$  et  $V$  une partie non vide  $\mathbf{R}$ . On dit que  $V$  est un voisinage de  $a$  si :

- dans le cas où  $a$  est fini (c'est-à-dire si  $a \in \mathbf{R}$ ),  $V$  contient un intervalle ouvert contenant  $a$ ,
- dans le cas où  $a$  est infini,  $V$  contient un intervalle du type  $[b, +\infty[$  ou  $]-\infty, b]$  avec  $b \in \mathbf{R}$ .

**Exemples 1.31.** 1. Soit  $a = 5$  et on définit les intervalles  $V_1 = [4, 6]$  et  $V_2 = [4, 10] \cup \mathbf{Q}$ . D'où les intervalles  $V_1$  et  $V_2$  sont des voisinages de  $a$  car  $a$  appartient bien aux intervalles.

2. Si  $V' = [4, 10] \cap \mathbf{Q}$  n'est pas un voisinage car il ne contient aucun intervalle,  $V'$  ne peut être au voisinage d'aucun point de  $\mathbf{R}$ .

## 1.6 Borne supérieure et inférieure

### 1.6.1 Maximum et minimum

**Définition 1.32** (Minimum et maximum). Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné.

1. On dit que  $\alpha$  est un élément minimum de  $E$  si  $\alpha \in E$  et si pour tout  $x \in E$ , on a :  $\alpha \leq x$ .
2. On dit que  $\beta$  est un élément maximum de  $E$  si  $\beta \in E$  et si pour tout  $x \in E$ , on a :  $x \leq \beta$ .

**Proposition 1.33** (Unicité). (i) Si un plus petit élément de  $E$  existe alors il est unique, il est appelé élément minimum de  $E$  et noté  $\min(E)$ .

(ii) Si un plus grand élément de  $E$  existe alors il est unique, il est appelé élément maximum de  $E$  et noté  $\max(E)$ .

*Démonstration.* On montre l'unicité d'un élément maximal de  $E$  (et on laisse au lecteur le soin de démontrer l'unicité d'un élément minimal de  $E$ ). Supposons que  $\alpha, \alpha' \in E$  soient des éléments minimaux de  $E$ . On a donc :

$$\forall x \in E, \quad \alpha \leq x, \tag{1.1}$$

$$\forall x \in E, \quad \alpha' \leq x. \tag{1.2}$$

En particulier, dans (1.1), on peut prendre  $x = \alpha'$ , on aura donc  $\alpha \leq \alpha'$  et dans (1.2), on peut prendre  $x = \alpha$  et ainsi  $\alpha' \leq \alpha$ . Donc :  $\alpha = \alpha'$  et il y a qu'un seul élément minimal.  $\square$



## 1.6.2 Majorant et minorant

**Définition 1.34** (Majorant et minorant). Soient  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie non vide de  $E$ .

1. On dit que  $M$  est un majorant de  $A$  si  $M \in E$  et pour tout  $a \in A$ , on a :  $a \leq M$ . La partie de  $A$  est dite majorée si  $A$  admet un majorant.
2. On dit que  $m$  est un minorant de  $A$  si  $m \in E$  et pour tout  $a \in A$ , on a :  $m \leq a$ . La partie de  $A$  est dite minorée, si  $A$  admet un minorant.

## 1.6.3 Borne inférieure et supérieure

**Définition 1.35** (Borne inférieure et supérieure). Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie non vide de  $E$ .

1. On appelle borne supérieure de  $A$  (noté  $\sup_E A$ , le plus petit de tous les majorants.
2. On appelle borne inférieure de  $A$  (noté  $\inf_E A$ ), le plus grand de tous les minorants.

**Proposition 1.36** (Caractérisation de la borne supérieure). Soient  $A$  une partie non vide de  $\mathbf{R}$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$ .  $\alpha = \sup_{\mathbf{R}} A$  si et seulement si :

- (i)  $\forall a \in A, a \leq \alpha$ ,
- (ii)  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $x_\varepsilon \in A$  tel que  $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$ .

Il y a une infinité de  $x_\varepsilon$  sauf quand  $x_\varepsilon = \alpha$  (élément maximal).

**Proposition 1.37** (Caractérisation de la borne inférieure). Soient  $A$  une partie non vide de  $\mathbf{R}$  et  $\beta \in \mathbf{R}$ .  $\beta = \inf_{\mathbf{R}} A$  si et seulement si

1.  $\forall a \in A, \beta \leq a$ ,
2.  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $x_\varepsilon \in A$  tel que  $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$ .

Il y a une infinité de  $x_\varepsilon$  sauf quand  $x_\varepsilon = \beta$  (élément minimal).

**Théorème 1.38** (Théorème de Bolzano-Weierstrass). Toute partie non vide majorée de  $\mathbf{R}$  admet une borne supérieure. Toute partie non vide minorée de  $\mathbf{R}$  admet une borne inférieure.

## 1.7 Exercices

**Exercice 1.1.** 1. Démontrer que si  $r \in \mathbf{Q}$  et  $x \notin \mathbf{Q}$  alors  $r + x \notin \mathbf{Q}$  et si  $r \neq 0, r \cdot x \notin \mathbf{Q}$ .

2. Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ .
3. En déduire qu'entre deux rationnels, il y a toujours un nombre irrationnel. (On pourra utiliser la propriété suivante : « pour tout réel  $a > 0$ , il existe un entier  $n$  tel que  $n > a$  ».)

**Exercice 1.2.** Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques :

$$\left\{ \frac{a}{2^k}, (a, k) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \right\}$$

est dense dans  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 1.3.** Étant donné un ensemble  $A \subset \mathbf{R}$ , écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de  $A$ ,
2.  $m$  est un minorant de  $A$ ,
3.  $P$  n'est pas un majorant de  $A$ ,
4.  $A$  est majoré,
5.  $A$  n'est pas minoré.

**Exercice 1.4.** Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbf{Q}, ]0, 1[ \cap \mathbf{Q}, \mathbf{N}, \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

# Chapitre 2

## Suites numériques

### 2.1 Définitions

**Définition 2.1** (Suite réelle). *Une suite réelle est une application*

$$\begin{aligned} u &: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

*On note  $(u_n)$  cette suite (ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ). Si la suite est définie, pour  $n \geq n_0$ , on note  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .*

**Définition 2.2** (Croissance et décroissance). *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle. On dit que la suite est*

1. *croissante si  $u_{n+1} \geq u_n$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,*
2. *strictement croissante si  $u_{n+1} > u_n$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,*
3. *décroissante si  $u_{n+1} \leq u_n$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,*
4. *strictement décroissante si  $u_{n+1} < u_n$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ .*

**Définition 2.3** (Monotonie). *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite. Elle est dite monotone si elle est croissante ou décroissante. Elle est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

**Remarque 2.4.** *Une suite peut être ni croissante ni décroissante (c'est-à-dire elle n'est pas monotone). Par exemple, on peut considérer la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie de la manière suivante*

$$u_n = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

**Définition 2.5** (Suite majorée et minorée). *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle. Elle est dite :*

1. majorée s'il existe un  $M \in \mathbf{R}$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on ait :  $M \geq u_n$ ,
2. minorée s'il existe un  $m \in \mathbf{R}$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on ait :  $m \leq u_n$ ,
3. bornée si la suite est majorée et minorée, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq M.$$

**Définition 2.6** (Limite finie). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réel et  $\ell$  un réel. On dit que la suite tend vers  $\ell$  ou qu'elle admet  $\ell$  comme limite si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Remarque 2.7** ([8]). L'assertion «  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N$  » veut dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N$  tel que pour tout indice  $n$ , on ait la propriété ou encore que tout intervalle  $I = ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$  tel que  $\varepsilon > 0$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (comme le montre la figure 2.1 pour la suite  $u_n = \frac{1}{n}$ ).

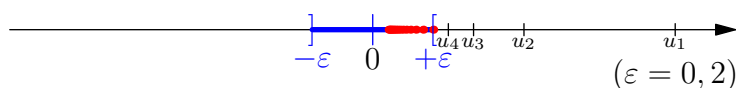


FIGURE 2.1 – Convergence de la suite  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}}$  : en trait noir, les termes qui ne sont pas dans l'intervalle  $] -\varepsilon, +\varepsilon[$  et en rouge, les termes qui le sont. On voit bien que les points rouges forment un segment continu au bout d'un certain moment car les termes sont de plus en plus rapprochés.

**Définition 2.8** (Limite infinie). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle.

1. On dit que la suite tend vers  $+\infty$  et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, u_n > A.$$

2. On dit que la suite tend vers  $-\infty$  et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, u_n < -A.$$

**Remarque 2.9** ([8]). L'assertion «  $\forall A > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N$  » veut dire qu'il existe un intervalle ouvert  $]A, +\infty[$  ou  $]-\infty, A[$  qui contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (voir la figure 2.2).

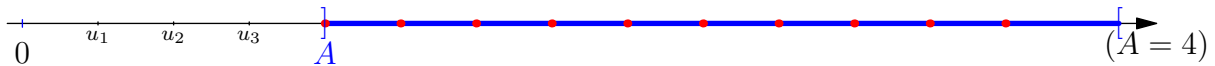


FIGURE 2.2 – Convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  : en trait noir, les termes qui ne sont pas dans l'intervalle  $]A, +\infty[$  et en rouge, les termes qui le sont.

**Définition 2.10** (Convergence de suites). *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si elle admet une limite finie et qu'elle diverge si elle n'admet pas de limites ou si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ .*

**Exemples 2.11.** 1. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par :

$$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

converge vers 1.

2. La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$v_n = n$$

diverge car elle admet une limite infinie.

3. La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$w_n = (-1)^n$$

diverge car elle n'a pas de limite.

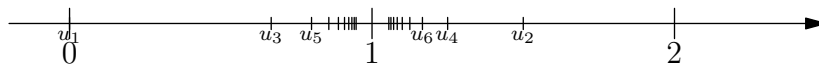


FIGURE 2.3 – Le comportement surprenant de la suite  $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

**Proposition 2.12.** *Soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.*

(i) *Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite alors cette limite est unique.*

(ii) *Si  $\lim u_n = \ell$  alors  $\lim |u_n| = |\ell|$ .*

(iii) *Si  $\lim u_n = \ell$  et  $\lim v_n = \ell'$  alors :*

$$\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell' \quad \text{et} \quad \lim(u_n \cdot v_n) = \ell \cdot \ell'.$$

(iv) *Si  $\lim u_n = \ell$  et si  $\ell \neq 0$  alors :*

$$\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}.$$

- (v) Si  $\lim u_n = +\infty$  alors  $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ .
- (vi) Si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont deux suites convergentes tels que  $u_n \leq v_n$  (pour tout  $n \geq n_0$ ) alors  $\lim u_n \leq \lim v_n$ . De plus, si  $\lim u_n = +\infty$  alors  $\lim v_n = +\infty$ .
- (vii) [Théorème des « gendarmes »] Soient  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$  trois suites tels que :

$$u_n \leq v_n \leq w_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$  convergent et si  $\lim u_n = \lim w_n$  alors  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge et  $\lim u_n = \lim v_n = \lim w_n$ .

*Démonstration.* (i) Supposons que  $\ell$  et  $\ell'$  sont deux limites distincts. On pose  $\varepsilon = (\ell + \ell')/3 > 0$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  d'où l'existence d'un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ . De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell'$ , d'où il existe un rang  $N'$  tel que pour tout  $n \geq N'$ , on ait  $|u_n - \ell'| < \varepsilon$ . On pose  $n \geq \max(N, N')$  et on a :

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

On obtient donc une contradiction, soit  $\ell'$  n'existe pas ou  $\ell = \ell'$ .

(ii) On veut démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, \quad ||u_n| - |\ell|| < \varepsilon.$$

On a, d'après l'inégalité triangulaire,  $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|$ . Or  $\lim u_n = \ell$ , donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Or, on a :  $||u_n| - |\ell|| < \varepsilon$  et  $|u_n - \ell| \geq ||u_n| - |\ell||$ . Donc :  $\lim |u_n| = |\ell|$ .

(iii) On veut démontrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq N$ , on ait :

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| < \varepsilon.$$

On a, par l'inégalité triangulaire,

$$|(u_n + v_n) - \ell + \ell'| = |u_n - \ell + v_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|.$$

Or, on a supposé la convergence des suites  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , d'où

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbf{N}, n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| &= \frac{\varepsilon}{2}, \\ \exists N_2 \in \mathbf{N}, n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

On pose  $N = \max(N_1, N_2)$ . Si  $n \geq N$  alors  $|u_n - \ell| = \frac{\varepsilon}{2}$  et  $|v_n - \ell'| = \frac{\varepsilon}{2}$ .  
D'où la somme :

$$|u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq |u_n - \ell + v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On obtient la même chose pour le produit des limites. On a :

$$|(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell')| \leq |(u_n - \ell)(v_n - \ell')| < \varepsilon.$$

Or, on assure la convergence des suites  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  donc :

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbf{N}, n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| &= \sqrt{\varepsilon}, \\ \exists N_2 \in \mathbf{N}, n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| &= \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Soit  $N = \max(N_1, N_2)$ . Si  $n \geq N$ , on a :  $|u_n - \ell| < \sqrt{\varepsilon}$  et  $|v_n - \ell'| < \sqrt{\varepsilon}$ .  
Donc le produit :

$$(u_n - \ell)(v_n - \ell') < \varepsilon.$$

(iv) On veut démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{-1} = \ell^{-1}$ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, n \geq N, \quad \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| < \varepsilon.$$

Mais on a :

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \left| \frac{\ell - u_n}{u_n \cdot \ell} \right| < \varepsilon$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$|u_n - \ell| |\ell| \cdot |u_n| < \varepsilon.$$

Si on prend  $\varepsilon = \alpha$  et si  $|u_n| \leq \ell + \alpha$  alors :

$$\frac{1}{\ell - \alpha} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\ell + \alpha}$$

Or :

$$\frac{|u_n - \ell|}{|\ell| \cdot |u_n|} \leq \frac{\varepsilon'}{|\ell| \cdot M} = \varepsilon,$$

d'où :  $\varepsilon' = \varepsilon \cdot |\ell| \cdot M$ .

(v) On remarque que si  $\lim u_n = +\infty$ , on a  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang. On veut montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \quad \left| \frac{1}{u_n} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Il suffit de prendre  $A = \frac{1}{\varepsilon}$ .

(vi) Soient  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  deux suites tels que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang  $n_0$ . On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont convergentes de limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}, n \geq N_1, |u_n - \ell| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbf{N}, n \geq N_2, |v_n - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{3}$ . Or on suppose que  $\ell' > \ell$ , donc ça voudrait dire que  $v_n < u_n$ . On aboutit donc à une contradiction. D'où  $\ell \leq \ell'$ . On a  $u_n \leq v_n$  donc :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq N, u_n \geq A.$$

(vii) Soient  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$  trois suites réelles. On suppose que  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbf{N}, \forall n \geq N_2, |w_n - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

On prend  $N = \max(N_1, N_2)$ , on a donc, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ . Or :

$$u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[ \quad \text{et} \quad w_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

d'où  $v_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

□

**Définition 2.13** (Forme indéterminée). *Si aucune règle opératoire sur les limites ne s'applique alors on dit que l'on a affaire à une indétermination ou une forme indéterminée. Pour des suites réelles, les formes indéterminées sont :*

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0.$$

**Exemples 2.14** (Indétermination «  $1^\infty$  »). 1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  la suite réelle définie, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1,$$

d'où une forme indéterminée du type «  $1^\infty$  ». On utilise la définition de la puissance pour transformer le terme général de la suite

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+1/n)}.$$



On s'intéresse au terme du logarithme. Faisons un changement de variables  $N = n^{-1}$ , on obtient donc :

$$n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N} \ln(1 + N)$$

Or :

$$\lim_{N \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + N)}{N} = 1,$$

d'où  $\lim u_n = e^1 = e$ .

2. La suite  $(1^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas une forme indéterminée du type  $1^\infty$  car  $u_n = 1^n = 1$  et  $\lim u_n = 1$ .

## 2.2 Exemple de suites

### 2.2.1 Suite arithmétique

**Définition 2.15** (Suite arithmétique). Une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite arithmétique s'il existe un  $r \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

On appelle  $r$  la raison de la suite.

**Remarque 2.16.** On en déduit donc que  $u_n = (n \cdot r) + u_0$ .

**Exemple 2.17.** La suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$u_n = 10 + 2 \times n$$

est une suite arithmétique de premier terme 10 et de raison 2.

**Proposition 2.18.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- (i) Si  $r > 0$ , la suite est croissante et diverge vers  $+\infty$ .
- (ii) Si  $r < 0$ , la suite est décroissante et diverge vers  $-\infty$ .
- (iii) Si  $r = 0$ , la suite est constante et converge vers le premier terme  $u_0$ .

**Proposition 2.19** (Somme). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors :

$$\sum_{p=0}^n u_p = \frac{(n+1)}{2} (u_0 + u_n). \quad (2.1)$$

On peut simplifier la formule (2.1) grâce à la remarque 2.16 :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^n u_p &= \frac{(n+1)}{2}(u_0 + u_n) \\ &= \frac{(n+1)}{2}(u_0 + (n \cdot r)u_0) = \frac{(n+1)(n+r+1)}{2}u_0.\end{aligned}$$

## 2.2.2 Suite géométrique réelle

**Définition 2.20** (Suite géométrique). Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite géométrique s'il existe un réel  $q$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

On appelle  $q$  la raison de la suite géométrique.

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = q^n \cdot u_0.$$

**Proposition 2.21.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ .

- (i) Si  $q = 1$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_0$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une suite constante.
- (ii) Si  $|q| < 1$ , la suite converge vers 0.
- (iii) Si  $|q| > 1$  ou  $q = -1$ , la suite diverge.

## 2.2.3 Série géométrique

**Définition 2.22** (Série géométrique). On dit que  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une série géométrique, toute suite de type :

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k.$$

On appelle  $q$  la raison de cette série.

**Proposition 2.23.** Soit  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une série géométrique de raison  $q$  :

- Si  $q = 1$ , alors  $s_n = n + 1$  et la série diverge.
- Si  $q \neq 1$  alors,

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- Si  $|q| < 1$  alors  $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$ .
- Si  $|q| > 1$  ou si  $q = -1$  alors  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

**Exemple 2.24.** Soit  $q \neq 1$  alors :

$$\sum_{n=k-1}^{k+p+r} q^n = \frac{q^{k-1} - q^{k+p+r+1}}{1-q}.$$

### 2.2.4 Suite comparable à une suite géométrique

**Théorème 2.25** (Critère de d'Alembert). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite tel que  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang. On suppose que la série  $\left( \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et on note  $\ell$  sa limite.

- (i) Si  $\ell < 1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim u_n = 0$ .
- (ii) Si  $\ell > 1$  alors  $\lim |u_n| = +\infty$  donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
- (iii) Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire (on dit, dans ce cas, que c'est un cas douteux).

*Démonstration, [10].* Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes strictement positifs telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \geq 0.$$

- Si  $\ell < 1$ , il existe  $k$  tel que  $\ell < k < 1$ , et  $N$  entier naturel tel que, pour  $n > N$  :

$$a_n < k \cdot a_{n-1} < k^{n-N} a_N,$$

donc la série  $\sum a_{n+N}$  converge, d'où le résultat pour  $\sum a_n$ .

- Si  $\ell > 1$ , il existe  $k$  tel que  $1 < k < \ell$ , et  $N$  entier naturel tel que pour  $n > N$  :

$$a_n > k a_{n-1} > k^{n-N} a_N,$$

donc la suite ne tend pas vers 0.

□

**Théorème 2.26** (Critère de Cauchy). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite, on suppose  $u_n \neq 0$  et que la suite  $(\sqrt[n]{|u_n|})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

- (i) Si  $\ell < 1$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim u_n = 0$ .
- (ii) Si  $\ell > 1$  alors  $\lim |u_n| = +\infty$  donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
- (iii) Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire !

## 2.2.5 Approximation d'un réel par des rationnels

**Théorème 2.27.** Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$  alors il existe une suite de rationnels qui converge vers  $\alpha$ . Plus précisément, si on pose, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_n = \frac{E(10^n \alpha)}{10^n},$$

la suite des rationnels  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $\lim u_n = \alpha$ .

*Démonstration.* Il est clair que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie est bien une suite de rationnels car  $10^n \in \mathbf{N}$  et  $E(10^n \alpha) \in \mathbf{Z}$ . Maintenant, si on note :  $\overline{x_0 x_1 \cdots x_n}$  la partie décimale d'un nombre réel, on a :

$$\alpha = \overline{y_p y_{p-1} \cdots y_1 y_0} + 0, \overline{x_0 x_1 \cdots x_n}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} u_0 &= E(\alpha) = \overline{y_p y_{p-1} \cdots y_1 y_0}, \\ u_1 &= \overline{y_p y_{p-1} \cdots y_1 y_0} + 0, x_0 \end{aligned}$$

On calcule  $|u_n - \alpha|$  :

$$|u_n - \alpha| < 0, \underbrace{0 \cdots 0}_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} < 0, \underbrace{0 \cdots 0}_n 1 = \frac{1}{10^n} = 10^{-n}.$$

On a alors :

$$0 < |u_n - \alpha| < \frac{1}{10^n}.$$

On peut donc conclure avec le « théorème des gendarmes » (vue en proposition 2.12-(vii))

$$\lim |u_n - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim u_n = \alpha.$$

□

**Remarque 2.28.** On retrouve, ainsi, le fait que  $\mathbf{Q}$  est dense dans  $\mathbf{R}$ .

## 2.3 Théorèmes de convergence des suites

### 2.3.1 Les suites convergentes sont bornées

**Proposition 2.29.** Toute suite convergente est bornée.

*Démonstration, [8].* Soit  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $I$  l'intervalle ouvert  $] \ell - 1, \ell + 1[$ .  $I$  est bien un voisinage de  $\ell$ . Comme  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge, on a qu'à partir d'un certain rang  $N$ , tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont dans  $I$ . Autrement dit :

$$n \geq N \Rightarrow \ell - 1 < u_n < \ell + 1.$$

On a deux cas de figures :

- Si  $N = 0$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée par les réels  $\ell - 1$  et  $\ell + 1$ .
- Si  $N \geq 1$ , alors on note  $A$  l'ensembl  $\{u_0, \dots, u_{N-1}, \ell - 1, \ell + 1\}$ ,  $M$  le plus grand élément de  $A$  et  $m$  son plus petit élément. Ainsi,  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée par les réels  $m$  et  $M$ .

□

### 2.3.2 Suites monotones

**Théorème 2.30.** *Toute suite (réelle) croissante et majorée converge.*

*Démonstration.* Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle croissante et majorée. On note l'ensemble  $A = \{u_n, n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$ .  $A$  est non vide et il existe  $M \in \mathbf{R}$  tel que pour tout  $n$ ,  $u_n \leq M$ .  $A$  est majorée et non vide donc  $A$  admet une borne supérieure qu'on note  $\ell$ . On montre que  $\ell = \lim u_n$ . On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u_N \in A \quad \text{tel que } \ell - \varepsilon \leq u_N \leq \ell + \varepsilon.$$

Comme  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est supposée croissante, si  $n \geq N$ , on a :  $u_n \geq u_N$ , d'où on vient de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell] \subset ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[,$$

c'est-à-dire  $\lim u_n = \ell$ .

□

**Théorème 2.31.** *Toute suite (réelle) décroissante et minorée converge.*

**Remarque 2.32.** Si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite croissante convergeante vers  $\ell$  alors pour tout  $n$ ,  $u_n \leq \ell$  (de même que pour  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite décroissante, on a :  $u_n \geq \ell$ ).

### 2.3.3 Suites adjacentes

**Définition 2.33** (Suites adjacentes). Soient  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  deux suites. On dit qu'elles sont adjacentes si

1.  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite décroissante ;
2. pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  ;

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

**Théorème 2.34** (Théorème des suites adjacentes). *Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites adjacentes. Alors elles sont convergentes et tendent vers la même limite.*

*Démonstration.* On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante tels que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites adjacentes. On a alors pour tout  $n$ ,  $u_n \leq v_n$  et comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, pour tout  $n$ ,  $v_n \leq v_0$ . D'où, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq v_0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par  $v_0$  donc elle converge et on note  $\ell$  sa limite. On raisonne de la même façon pour montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors pour tout  $n$ ,  $u_0 \leq u_n$  et on a, de plus  $u_n \leq v_n$ . D'où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_0 \leq v_n$ . La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée donc elle converge et on note sa limite  $\ell'$ . On montre que  $\ell$  et  $\ell'$  sont deux quantités égales. On a :

$$\lim(u_n - v_n) = 0 \Rightarrow \lim u_n - \lim v_n = 0 \Rightarrow \ell - \ell' = 0 \Rightarrow \ell = \ell'.$$

□

**Remarque 2.35.** On a montré que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites adjacentes alors elles convergent et ont la même limite. Notons leur limite commune  $\ell$ . Alors, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq \ell$  et  $v_n \geq \ell$ , d'où  $u_n \leq \ell \leq v_n$ .

**Théorème 2.36** (Théorème des segments emboîtés). *Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'intervalles telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = [u_n, v_n]$ . On suppose les  $I_n$  emboîtés, c'est-à-dire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset [u_n, v_n]$ . On suppose, de plus, que  $\lim(v_n - u_n) = 0$ . Alors :*

$$I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n = \{\ell\}.$$

*Démonstration.* On montre que, nécessairement,  $I$  contient au plus un réel. En effet, si  $\ell, \ell' \in I$  tels que  $\ell \neq \ell'$  et  $\ell < \ell'$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on aurait  $[\ell, \ell'] \subset I_n$ . Donc :

$$(u_n - v_n) \geq \ell' - \ell > 0,$$

ce qui est impossible à cause de l'hypothèse  $\lim(u_n - v_n) = 0$ . On peut montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes. Leur limite commune  $\ell$  vérifie pour tout  $n$ ,  $u_n \leq \ell \leq v_n$ , c'est-à-dire  $\ell \in [u_n, v_n] = I_n$  et pour tout  $n$ ,  $\ell \in I$ . Donc :

$$I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n = \{\ell\}.$$

□

### 2.3.4 Suites extraites

**Exemple 2.37** (Exemple introductif). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle. On veut définir une suite qui prend certains des termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Soit, donc,  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  tel que :

$$v_0 = u_1, v_1 = u_4, v_2 = u_9, v_3 = u_{16}.$$

On a alors  $v_n = u_{\varphi(n)}$  où

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \\ n &\mapsto \varphi(n) \end{aligned}$$

est une application strictement croissante (c'est-à-dire pour tout  $m, n \in \mathbf{N}$ , si  $n \leq m$  alors  $\varphi(n) \leq \varphi(m)$ ).

**Définition 2.38** (Suites extraites). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite. Une suite extraite (ou sous-suite) de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite du type  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  avec :

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \\ n &\mapsto \varphi(n) \end{aligned}$$

une application strictement croissante.

**Exemple 2.39.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite définie de la manière suivante :

$$v_0 = u_0, v_1 = u_2, v_2 = u_4, v_3 = u_6, \dots$$

On a, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n = u_{2n}$ , c'est-à-dire la suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une sous-suite de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Théorème 2.40.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une sous-suite convergente de limite  $\ell$ . Alors toute suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente et de limite  $\ell$ .

Avant de démontrer le théorème 2.40, on montre la propriété suivante :

**Propriété 2.41.** Soit

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \\ n &\mapsto \varphi(n) \end{aligned}$$

une application strictement croissante. Alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\varphi(n) \geq n$ .

*Démonstration de la propriété 2.41.* On montre cette propriété par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}$ .

**Initialisation** Dans le cas où  $n = 0$ , on a bien  $\varphi(0) \geq 0$  car  $\varphi(0) \in \mathbf{N}$ .

**Hérédité** On suppose que  $\varphi(n) \geq n$  et on montre que  $\varphi(n+1) \geq n+1$ . On a  $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)$  dû à la croissance de l'application. De plus,  $\varphi(n) \geq n$  donc  $\varphi(n+1) \geq n$  car  $\varphi(n+1) \in \mathbf{N}$ . D'où  $\varphi(n+1) \geq n+1$ .

Par récurrence,  $\varphi(n) \geq n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 2.40, [11].* On suppose que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  a pour limite  $\ell$ . Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Soit  $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  une application strictement croissante et on veut montrer que  $\lim u_{\varphi(n)} = \ell$ . Soit  $V$  un voisinage de  $\ell$ . Il existe un rang  $N$  à partir duquel  $u_n \in V$ . Soit alors  $n \geq N$ . La croissance de  $\varphi$  et la propriété 2.41 nous montre que  $\varphi(n) \geq \varphi(N) \geq N$ . On a donc :  $u_{\varphi(n)} \in V$ , d'où la convergence de la suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  vers  $\ell$ .  $\square$

**Corollaire 2.42.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite. Si  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont deux suites extraites de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  qui divergent ou qui convergent vers des limites différentes alors  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  diverge.

**Exemple 2.43.** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$  par :

$$u_n = (-1)^n$$

On considère les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ . Or, on a :

$$u_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Les limites des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  sont différents donc  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite divergente.

**Théorème 2.44.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite. Si  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  sont convergentes et de même limite  $\ell$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  convergente et de limite  $\ell$ .

*Démonstration.* On suppose que  $\lim u_{2n} = \ell = \lim u_{2n+1}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}, n \geq N_1, & \quad |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbf{N}, n \geq N_1, & \quad |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon \end{aligned}$$

Soit la suite  $(u_p)_{p \in \mathbf{N}}$  constitué des  $u_{2n}$  et  $u_{2n+1}$ . Si  $p = 2n$ , alors  $n \geq N_1 \Rightarrow p \geq 2N_1$  et si  $p = 2n+1$ ,  $n \geq N_2 \Rightarrow p \geq 2N_2+1$ . On prend donc  $p \geq \max(2N_1, 2N_2+1)$  pour assurer la convergence des  $u_p$  vers  $\ell$ .  $\square$

**Théorème 2.45** (Théorème de Bolzano-Weirestrass). De toute suite bornée, on peut en extraire une qui est convergente.



**Exemple 2.46.** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$  par :

$$u_n = (-1)^n$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  n'a pas de limite donc elle diverge mais par contre,  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  converge (car  $u_{2n} = 1$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ).

### 2.3.5 Suites récurrentes

#### Propriétés

**Définition 2.47** (Suites récurrentes). Soit  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite récurrente si elle est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b], \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

**Propriété 2.48.** Soit  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite récurrente telle que :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b], \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Alors,

- (i) Si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell$  alors  $f(\ell) = \ell$ .
- (ii) Si  $f$  est croissante,  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est monotone et convergente.
- (iii) Si  $f$  est décroissante,  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  sont monotones et convergentes.

**Démonstration de l'assertion (i).** Soit  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . On a  $f([a, b]) \subset [a, b]$  (on dit alors que l'intervalle  $[a, b]$  est stable par  $f$ ). Or,  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $\lim u_n = \ell$ . On vérifie que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \in [a, b]$ .

**Initialisation** Pour  $n = 0$ ,  $u_0 \in [a, b]$  par hypothèse.

**Hérédité** On suppose que  $u_n \in [a, b]$  et on démontre que  $u_{n+1} \in [a, b]$ . Or :  $u_{n+1} = f(u_n)$  et l'intervalle  $[a, b]$  est stable par  $f$ .

Donc, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \in [a, b]$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée par  $a$  et  $b$  et donc admet une limite  $\ell$ . Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $\ell$  doit vérifier  $\ell = f(\ell)$  (on dit que  $\ell$  est un point fixe de  $f$ ).  $\square$

**Démonstration de l'assertion (ii).** 1. On suppose que  $u_0 \leq u_1$ . On montre par récurrence que, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .

**Initialisation** Par hypothèse, pour  $n = 0$ , on a :  $u_0 \leq u_1$ .

**Hérédité** On suppose que pour un  $n$  fixé dans  $\mathbf{N}$ , on ait  $u_n \leq u_{n+1}$ .

Comme  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ , on a  $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ , c'est-à-dire  
 $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ .

Donc, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ , c'est-à-dire que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est croissante.

2. On suppose que  $u_0 \geq u_1$ . On montre par récurrence que, pour tout  $n$ ,  
 $u_n \geq u_{n+1}$ .

**Initialisation** Par hypothèse, pour  $n = 0$ , on a :  $u_0 \geq u_1$ .

**Hérédité** On suppose que pour un  $n$  fixé dans  $\mathbf{N}$ , on ait  $u_n \geq u_{n+1}$ .

Comme  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ , on a  $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ , c'est-à-dire  
 $u_{n+1} \geq u_{n+2}$ .

Donc, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$ , c'est-à-dire que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante.

On a montré par ces deux points que si  $f$  est croissante alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est monotone, cela dépend des deux premiers termes de la suite :

– Si  $u_0 \leq u_1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est croissante.

– Si  $u_0 \geq u_1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante.

Comme  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est monotone et bornée (par le (i)) alors elle est convergente.  $\square$

Avant de démontrer l'assertion (iii), on a besoin d'une propriété sur les fonctions décroissantes.

**Propriété 2.49.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Si  $f$  est décroissante alors  $f$  est croissante.

*Démonstration de la propriété 2.49.* Soit  $f$  une fonction continue décroissante sur  $[a, b]$ . On a donc :

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) \leq f(f(x_2)) \Rightarrow f \circ f(x_1) \leq f \circ f(x_2).$$

D'où,  $f$  est croissante.  $\square$

*Démonstration de l'assertion (iii).* On considère les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ . On a donc :

$$u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}).$$

Or  $f \circ f$  est croissante, on est donc ramené au cas de l'assertion (ii). On en déduit que  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  est monotone et bornée (donc elle est convergente) et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  est monotone et bornée (donc convergente). On pose  $\ell_0 = \lim u_{2n}$  et  $\ell_1 = \lim u_{2n+1}$ . On a, en plus, que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente si et seulement si  $\ell_0 = \ell_1$ .  $\square$

### Représentation graphique des suites récurrentes

On considère une suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_0 \in [a, b]$ . On se place dans un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^2$  et on trace les fonctions  $f$  et  $x$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . On place  $u_0$  sur l'intervalle  $[a, b]$  et on marque le point  $(u_0, f(u_0))$ . On projette ce point sur l'axe  $Oy$ , ce qui donne le point  $(0, f(u_0))$ . Ensuite, on marque le point  $(f(u_0), f(u_0))$  qui se trouve sur la droite «  $y = x$  » et on le projette sur l'axe  $Ox$ , ce qui nous donne  $u_1$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . Ainsi de suite pour trouver les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Pour exemple, on considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec } f(x) = e^{-x} \end{cases}$$

et on donne une représentation graphique de cette suite à la figure 2.4.

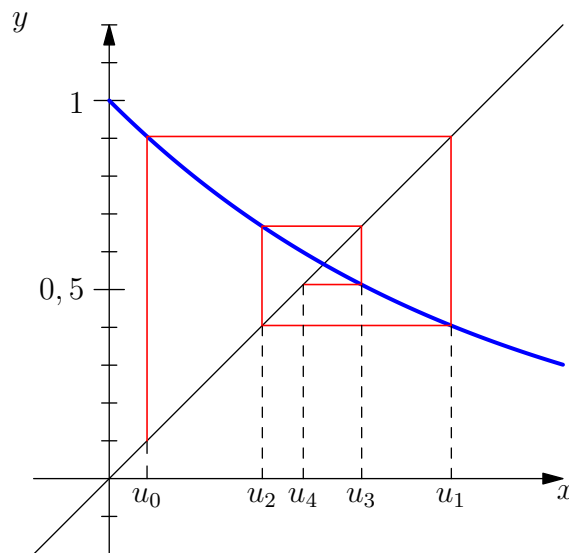


FIGURE 2.4 – Représentation graphique de la suite récurrente  $u_{n+1} = e^{-u_n}$

### Méthode pour résoudre un exercice sur les suites récurrentes

On considère une suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Étudier la fonction  $f(x)$  : dérivée, limites et sens de variations...
2. Trouver un minorant ou un majorant de  $f$ .
3. Étudier les variations de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en étudiant  $f(x) - x$ .
4. Conclusion sur la convergence.
5. Utiliser les théorèmes précédents pour déterminer la limite  $\ell$ .

## 2.4 Exercices

**Exercice 2.1.** Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

**Exercice 2.2.** En justifiant la réponse, dire si les énoncés suivants, sont vrais ou faux.

1. Si une suite est croissante et minorée, alors elle converge.
2. Si une suite est non majorée, alors elle tend vers  $+\infty$ .
3. Si une suite à termes positifs tend vers 0, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.
4. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.
5. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
6. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
7. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
8. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.
9. Il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $u_n = v_n \cdot w_n$  (resp.  $u_n = v_n + w_n$ ) convergente telle que l'une au moins des suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
10. Il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergente telle que  $(u_{n+1} - u_n)$  tend vers 0.

**Exercice 2.3.** Étudier la convergence des suites définies par :

$$u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n - 2)}, \quad v_n = \frac{n!}{n^n}.$$

**Exercice 2.4.** Étudier la convergence de la suite définie par :

$$u_n = \left( \frac{n}{2n + 1} \right)^n.$$

**Exercice 2.5 ([8]).** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergant vers 0. Démontrer que la suite  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

**Exercice 2.6.** On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbf{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite. Montrer que cette limite est un élément de  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ .

**Exercice 2.7.** 1. Soient  $a, b > 0$ . Montrer que  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

2. Montrer les inégalités suivantes ( $b \geq a > 0$ ) :

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \quad \text{et} \quad a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

3. Soient  $u_0$  et  $v_0$  des réels strictement positifs avec  $u_0 < v_0$ . On définit deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont adjacentes.

**Exercice 2.8.** On donne la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par :

$$u_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$

En étudiant les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ , montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente.

**Exercice 2.9.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite réelle définie par récurrence en posant  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$  si  $n \in \mathbf{N}^*$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est croissante et majorée.

2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers le nombre réel positif  $\ell$  qui vérifie  $\ell^2 - \ell - 1 = 0$  et calculer  $\ell$ .

**Exercice 2.10.** Étudier les suites :

1.  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ .

2.  $u_0 \in \mathbf{R}$  et  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .



# Chapitre 3

## Fonctions réelles

### 3.1 Définition d'une fonction réelle

Dans tout ce chapitre, on considère  $U$  une partie de  $\mathbf{R}$ .

**Définition 3.1** (Fonction réelle, [12]). *Une fonction réelle  $f$  d'une partie  $U$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  (qu'on note  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ ) est une correspondance qui à tout élément  $x$  de  $U$  associe un réel et un seul noté  $f(x)$ .*

On notera la fonction :

$$f : U \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) .$$

**Définition 3.2** (Image). *Soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. On appelle  $f(x)$  l'image de  $x$  par  $f$ .*

**Exemple 3.3.** La fonction

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto e^x$$

est une fonction réelle.

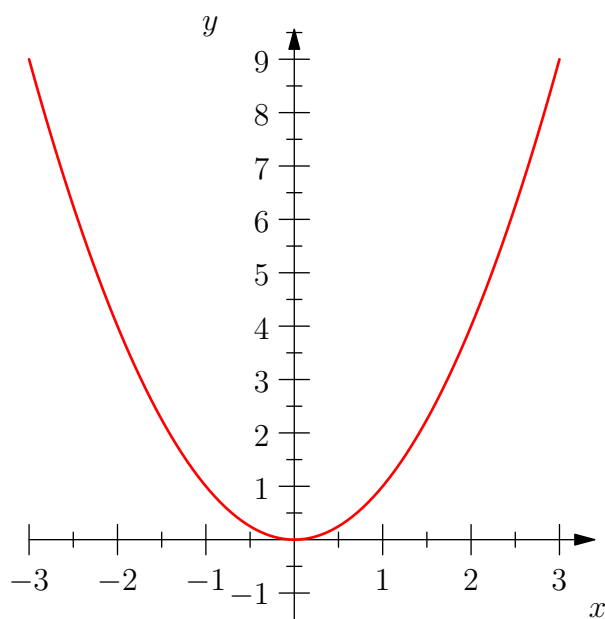
**Définition 3.4** (Graphe de la fonction). *Soit  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. On appelle graphe de la fonction l'ensemble*

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)), x \in U\} = U \times \mathbf{R}$$

**Exemple 3.5.** Soit la fonction réelle suivante :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) = x^2 .$$

Le graphe de la fonction  $f$  est représenté en figure 3.1.

FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction  $x \mapsto x^2$ 

## 3.2 Monotonie de la fonction

**Définition 3.6** (Monotonie de la fonction). Soient  $U$  une partie de  $\mathbf{R}$  et  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. On dit que :

–  $f$  est croissante sur  $U$  si

$$\forall x, x' \in U, \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'),$$

–  $f$  est strictement croissante sur  $U$  si

$$\forall x, x' \in U, \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) < f(x'),$$

–  $f$  est décroissante sur  $U$  si

$$\forall x, x' \in U, \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'),$$

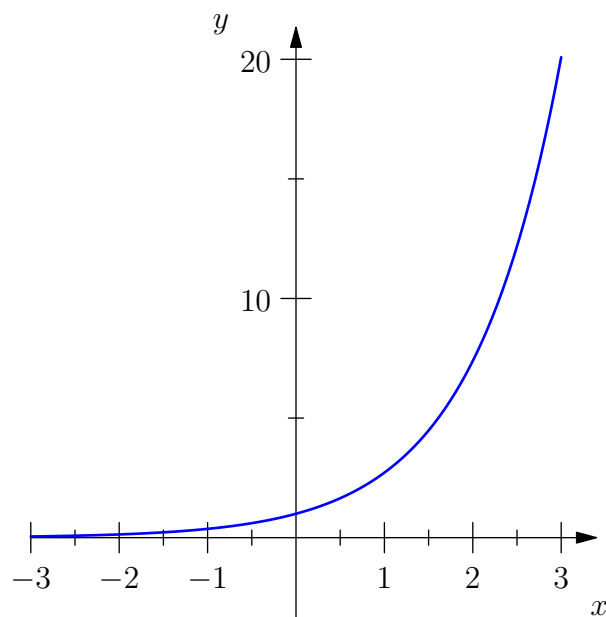
–  $f$  est strictement décroissante sur  $U$  si

$$\forall x, x' \in U, \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) > f(x'),$$

**Exemples 3.7.** 1. La fonction  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $x \mapsto f(x) = x^2$  est décroissante sur  $] -\infty, 0]$  et croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2. La fonction  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $x \mapsto g(x) = e^x$  est croissante sur  $\mathbf{R}$ . On donne le graphe de la fonction  $x \mapsto g(x) = e^x$  sur l'intervalle  $[-3, 3]$  en figure 3.2.



FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction  $x \mapsto e^x$ 

### 3.3 Fonctions minorées, majorées et bornées

**Définition 3.8** (Fonction minorée). Soient  $U$  une partie de  $\mathbf{R}$  et  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. On dit que  $f$  est minorée s'il existe  $m \in \mathbf{R}$  tel que :

$$\forall x \in U, \quad f(x) \geq m.$$

**Définition 3.9** (Fonction majorée). Soient  $U$  une partie de  $\mathbf{R}$  et  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. On dit que  $f$  est majorée s'il existe  $M \in \mathbf{R}$  tel que :

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leq M.$$

**Définition 3.10** (Fonction bornée). Soient  $U$  une partie de  $\mathbf{R}$  et  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. On dit que  $f$  est bornée s'il existe  $m, M \in \mathbf{R}$  tels que :

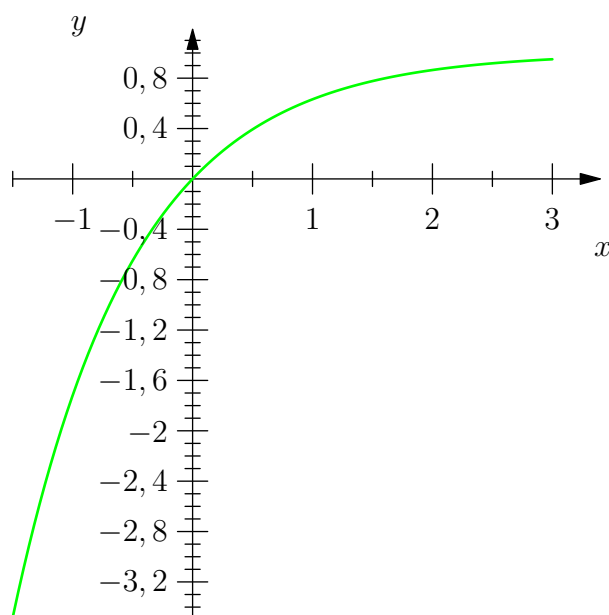
$$\forall x \in U, \quad M \leq f(x) \leq m.$$

ou encore il existe  $M \in \mathbf{R}$  tel que :

$$\forall x \in U, \quad |f(x)| \leq M.$$

**Exemples 3.11.** 1. La fonction  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $x \mapsto f(x) = 1 - e^{-x}$  est majorée par 1 (son graphe est représentée en figure 3.3).

2. La fonction  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $x \mapsto g(x) = x^2$  n'est ni majorée, ni minorée.

FIGURE 3.3 – Graphe de la fonction  $x \mapsto 1 - e^x$ 

### 3.4 Parité de la fonction

On considère  $I$  un intervalle centré en 0 (c'est-à-dire si  $x \in I$  alors  $-x \in I$ ).

**Définition 3.12** (Fonction paire). *Soit  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle sur  $I$ . On dit que  $f$  est paire si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(-x) = f(x)$ . La courbe représentative de  $f$  (ou le graphe de  $f$ ) dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est symétrique à l'axe  $Oy$ .*

**Exemple 3.13.** La fonction réelle

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est une fonction paire car sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe  $Oy$  (voir la figure 2.4).

**Définition 3.14.** *Soit  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. On dit que  $f$  est impaire si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = -f(-x)$ . La courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

**Exemple 3.15.** La fonction réelle

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

est une fonction paire car sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. (voir la figure 3.4).

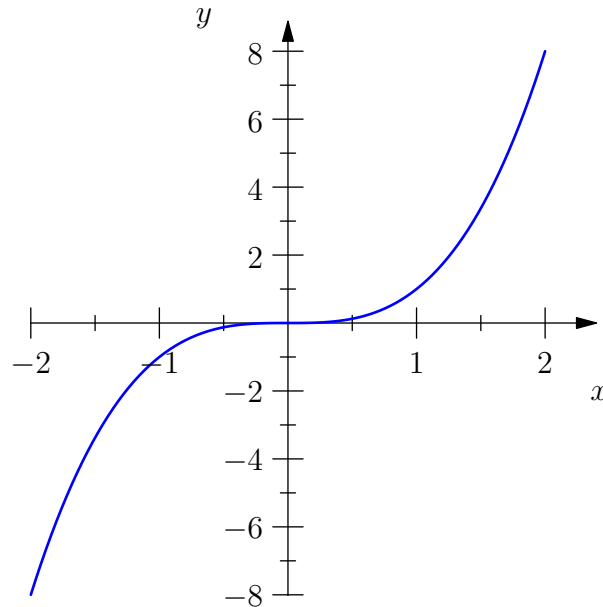


FIGURE 3.4 – Graphe de la fonction  $x \mapsto x^3$

## 3.5 Périodicité d'une fonction

**Définition 3.16** (Fonction périodique). Soient  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle et  $T \in \mathbf{R}$ . On dit que  $f$  est une fonction périodique de période  $T$  si :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

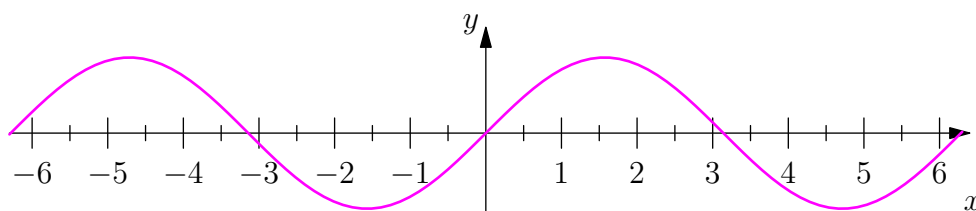
**Exemple 3.17.** La fonction réelle :

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

est  $2\pi$ -périodique (voir la figure 3.5).

**Remarque 3.18.** Dans la définition 3.16,  $T$  doit être le plus petit réel qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

FIGURE 3.5 – Graphe de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$ 

### 3.6 Opérations sur les fonctions

**Définition 3.19** (Addition de deux fonctions). Soient  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g: U \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions réelles définies sur  $U$ . Alors la fonction  $f + g$  est une addition de deux fonctions :

$$\begin{aligned} f + g &: U \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

**Définition 3.20** (Multiplication de deux fonctions). Soient  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g: U \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions réelles définies sur  $U$ . Alors la fonction  $f \cdot g$  est une multiplication de deux fonctions :

$$\begin{aligned} f \cdot g &: U \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

**Définition 3.21** (Multiplication d'une fonction par un scalaire). Soient  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  et une fonction réelle définie sur  $U$  et  $k \in \mathbf{R}$ . Alors la fonction  $k \cdot f$  est une multiplication par un scalaire de la fonction  $f$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} k \cdot f &: U \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \end{aligned}$$

**Définition 3.22** (Composition de deux fonctions). Soient  $f: U \rightarrow V$  et  $g: V \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions réelles. Alors la fonction  $g \circ f$  est la fonction composition des fonctions  $f$  par  $g$ .

$$\begin{aligned} g \circ f &: U \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

**Exemple 3.23.** Soient les deux fonctions réelles :

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} & \text{et} & & g &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 - x + 1 & & & x &\mapsto g(x) = \cos(e^x) \end{aligned}$$

Alors la fonction  $g \circ f$  s'obtient de la manière suivante :

$$g(f(x)) = g(x^2 - x + 1) = \cos(e^{x^2 - x + 1}).$$

## 3.7 Exercices

**Exercice 3.1.** Soient les fonctions  $f : x \mapsto x^2 + 1$ ,  $g : x \mapsto \cos^2(x)$  et  $h : x \mapsto e^{-x^2+1}$ . Calculer la fonction  $g \circ f$ ,  $h \circ g$ ,  $h \circ g \circ f$ .



# Chapitre 4

## Limites et continuité des fonctions réelles

### 4.1 Limites

#### 4.1.1 Définitions

##### Limite finie

**Définition 4.1** (Limite finie). Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $U$  un intervalle ouvert contenant  $a$  et  $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction définie sur  $U \setminus \{a\}$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell \in \mathbf{R}$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si «  $f(x)$  est aussi proche de  $\ell$  que l'on veut, pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ . En d'autres termes :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon, \quad \forall x \in U, (0 < |x - a| < \alpha_\varepsilon) \Rightarrow (|f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

La limite de  $f(x)$  en  $a$  est noté :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

##### Limite infinie

**Définition 4.2** (Limite infinie). Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $U$  un intervalle ouvert contenant  $a$  et  $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction définie sur  $U \setminus \{a\}$ .

1. On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , si :

$$\forall A > 0, \exists \alpha_A > 0, \quad \forall x \in U, (0 < |x - a| < \alpha_A) \Rightarrow (f(x) > A).$$

## 40 CHAPITRE 4. LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS RÉELLES

2. On dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , si :

$$\forall A > 0, \exists \alpha_A > 0, \quad \forall x \in U, (0 < |x - a| < \alpha_A) \Rightarrow (f(x) < -A).$$

### Limite à droite, limite à gauche

**Définition 4.3** (Limite à gauche finie). Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $I$  un intervalle ouvert contenant  $a$  et  $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. On dit que  $f$  admet  $\ell$  pour limite quand  $x$  tend vers  $a$  à gauche si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, (a - \alpha_\varepsilon < x < a) \Rightarrow (|f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Si  $f$  admet  $\ell$  pour limite quand  $x$  tend vers  $a$  à gauche, on le note :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell.$$

**Définition 4.4** (Limite à droite finie). Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $I$  un intervalle ouvert contenant  $a$  et  $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. On dit que  $f$  admet  $\ell$  pour limite quand  $x$  tend vers  $a$  à droite si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, (a < x < a + \alpha_\varepsilon) \Rightarrow (|f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Si  $f$  admet  $\ell$  pour limite quand  $x$  tend vers  $a$  à droite, on le note :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

**Définition 4.5** (Limite infinie à gauche). Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $U$  un intervalle ouvert contenant  $a$  et  $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction définie sur  $U \setminus \{a\}$ .

1. On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à gauche et on note

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty,$$

si :

$$\forall A > 0, \exists \alpha_A > 0, \quad \forall x \in U, (a - \alpha_A < x < a) \Rightarrow (f(x) > A).$$

2. On dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à gauche et on note

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty,$$

si :

$$\forall A > 0, \exists \alpha_A > 0, \quad \forall x \in U, (a - \alpha_A < x < a) \Rightarrow (f(x) < -A).$$



**Définition 4.6** (Limite infinie à droite). Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $U$  un intervalle ouvert contenant  $a$  et  $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction définie sur  $U \setminus \{a\}$ .

1. On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à droite et on note  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ , si :

$$\forall A > 0, \exists \alpha_A > 0, \quad \forall x \in U, (a < x < a + \alpha_A) \Rightarrow (f(x) > A).$$

2. On dit que  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à droite et on note  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ , si :

$$\forall A > 0, \exists \alpha_A > 0, \quad \forall x \in U, (a < x < a + \alpha_A) \Rightarrow (f(x) < -A).$$

### Limites en l'infini

**Définition 4.7** (Limite finie en l'infini). Soient  $I = ]a, +\infty[$ ,  $a \in \mathbf{R}$ , et  $f$  une fonction réelle définie sur  $I$ .

1. On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  (avec  $\ell \in \mathbf{R}$ ) lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  (noté  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon, \quad (x > A_\varepsilon) \Rightarrow (|f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

2. On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  (avec  $\ell \in \mathbf{R}$ ) lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  (noté  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon, \quad (x > -A_\varepsilon) \Rightarrow (|f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

**Définition 4.8** (Limite infinie en l'infini). Soient  $I = ]a, +\infty[$ ,  $a \in \mathbf{R}$ , et  $f$  une fonction réelle définie sur  $I$ .

1. On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  (noté  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ) si :

$$\forall A > 0, \exists B_A, \quad (x > B_A) \Rightarrow (f(x) > A).$$

2. On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  (noté  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ) si :

$$\forall A > 0, \exists B_A, \quad (x > -B_A) \Rightarrow (f(x) > A).$$

3. On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  (noté  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ) si :

$$\forall A > 0, \exists B_A, \quad (x > B_A) \Rightarrow (f(x) < -A).$$

4. On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  (noté  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ) si :

$$\forall A > 0, \exists B_A, \quad (x > -B_A) \Rightarrow (f(x) < -A).$$

### 4.1.2 Propriétés

**Propriété 4.9** (Unicité de la limite). Soient  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  où  $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  et  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. Si  $f$  admet une limite finie ou infinie en un point fini ou infini alors cette limite est unique.

**Propriété 4.10** (Opérations sur les limites). Soient  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  où  $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  et  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle. Soient  $\ell, \ell' \in \mathbf{R}$  tels que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ . Alors

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \ell + \ell'$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \ell \cdot \ell'$ ,
3. si  $\ell \neq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$ ,
4. si  $\ell > 0$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f \cdot g(x) = +\infty$ ,
5. si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ ,
6. Composée : si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  et si  $\lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = \ell'$  alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell'.$$

### 4.1.3 Formes indéterminées

Les formes indéterminées sont les suivantes :

1.  $+\infty - \infty$ ,
2.  $0 \times \infty$ ,
3.  $\frac{0}{0}$ ,
4.  $\frac{+\infty}{+\infty}$ ,
5.  $1^\infty$ ,
6.  $0^\infty$ ,
7.  $\infty^0$ .

### 4.1.4 Passage à la limite dans les inégalités

**Propriété 4.11** (Passage à la limite dans les inégalités). Soient  $\ell, \ell' \in \mathbf{R}$ ,  $a \in \overline{\mathbf{R}}$  et  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g: U \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions réelles telles que  $f \leq g$  dans un voisinage de  $a$ .

1. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$  alors  $\ell \leq \ell'$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .
3. Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

### 4.1.5 Théorème des gendarmes

**Théorème 4.12** (Théorème des gendarmes). Soient  $a, \ell \in \overline{\mathbf{R}}$  et  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g: U \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h: U \rightarrow \mathbf{R}$  trois fonctions réelles tels que  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  dans un voisinage de  $a$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$  alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell.$$

## 4.2 Continuité

### 4.2.1 Définition

**Définition 4.13** (Continuité). Soient  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim f(x) = f(a)$ . On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en chaque point de  $I$ . Si  $f$  n'est pas continue dans  $I$ , on dit que  $f$  est discontinue.

**Remarque 4.14.** Quand une fonction  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  est continue en  $I$ , on dit aussi qu'elle est de classe 0 sur  $I$  (ou en abrégé  $\mathcal{C}^0$ ).

### 4.2.2 Propriétés

**Proposition 4.15.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue en un point  $a \in I$  où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ . Si  $f(a) \neq 0$  alors il existe un voisinage de  $a$  (disons  $V = ]\alpha, \beta]$  avec  $\alpha < a < \beta \in \mathbf{R}$  tel que

$$\forall x \in V, f(x) \neq 0.$$

*Démonstration.* Supposons  $f(a) > 0$  et prenons  $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ . Comme  $f$  est continue en  $a$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

c'est-à-dire il existe un  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in ]a - \alpha, a + \alpha]$ , on a :

$$f(x) \in ]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon],$$

autrement dit :

$$f(a) - \varepsilon < f(x) \Rightarrow f(a) - \frac{f(a)}{2} < f(x).$$

Si on pose  $V = ]a - \alpha, a + \alpha]$  alors pour tout  $x \in V$ ,  $f(x) > 0$ , d'où  $f(x) \neq 0$ . On peut aussi voir, figure 4.1, une illustration de la proposition.  $\square$

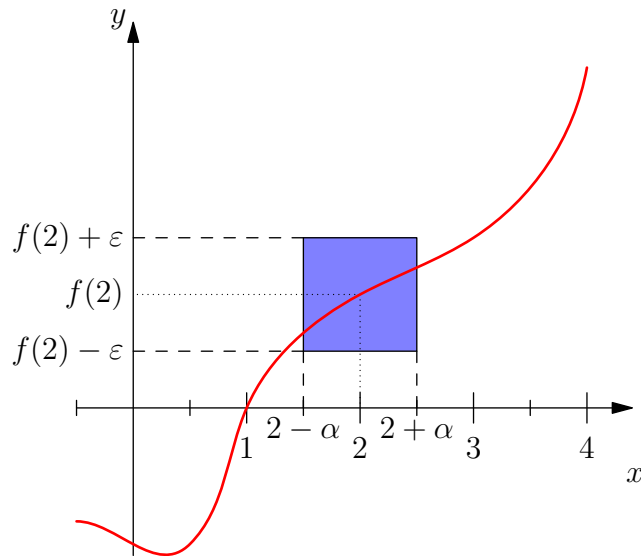


FIGURE 4.1 – Si  $f(a) \neq 0$  alors dans un voisinage de  $a$ , la fonction est non nulle

**Proposition 4.16.** Soient  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g: I \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions continues en un point  $a$  de  $I$ .

- (i) La fonction  $f + g$  est continue en  $a$ .
- (ii) Pour  $\lambda \in \mathbf{R}$ , la fonction  $\lambda \cdot f$  est continue en  $a$ .
- (iii) La fonction  $f \cdot g$  est continue en  $a$ .
- (iv) Si  $g(a) \neq 0$ , alors  $\frac{1}{g}$  est une fonction continue en  $a$ .
- (v) Si  $g(a) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  est une fonction continue en  $a$ .

*Démonstration de l'assertion (i).* On a  $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)).$$

Or  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

et la fonction  $f + g$  est continue en  $a$ . □

*Démonstration de l'assertion (ii).* Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Comme  $f$  est continue en  $a$ , il existe un  $\eta \in \mathbf{R}_+^*$  tel que pour tout  $x \in I$ .

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

On a alors :

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |\lambda f(x) - \lambda f(a)| \leq \frac{|\lambda| \varepsilon}{|\lambda| + 1} \varepsilon.$$

D'où la continuité de  $\lambda f$  en  $a$ . Comme ceci est valable pour tout  $a$  de  $I$ ,  $\lambda f$  est continue sur  $I$ .  $\square$

Avant de démontrer que le produit de deux fonctions continues est continue, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.17.** *Si  $g$  est continue en  $a$  alors il existe un voisinage  $K$  de  $a$  sur lequel  $g$  est bornée.*

*Démonstration du lemme 4.17.* Choisissons  $\varepsilon = 1$ . Comme  $g$  est continue en  $a$ , il existe  $\eta_0 \in \mathbf{R}_+^*$  tel que :

$$|x - a| < \eta_0 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < 1.$$

Ainsi, pour tout  $x \in K = [a - \eta_0, a + \eta_0]$ , on a :

$$g(a) - 1 < g(x) < g(a) + 1$$

Donc  $g$  est bien bornée sur  $K$ .  $\square$

Dans la démonstration qui suit, on notera :

$$M = \max(|g(a) - 1|, |g(a) + 1|).$$

*Démonstration de l'assertion (iii).* Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est continue en  $a$ , il existe un  $\eta_1 \in \mathbf{R}_+^*$  tel que pour tout  $x \in I$

$$|x - a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Comme  $g$  est continue en  $a$ , il existe un  $\eta_2 \in \mathbf{R}_+^*$  tel que, pour tout  $x \in I$  :

$$|x - a| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

On note  $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ , on écrit :

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a)) \cdot g(x) + (g(x) - g(a))f(a).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x)g(x) - f(a)g(a)| &\leq |f(x) - f(a)| \cdot |g(x)| + |g(x) - g(a)| \cdot |f(a)| \\ &\leq \varepsilon(M + |f(a)|). \end{aligned}$$

Ce qui prouve la continuité de  $f \cdot g$  en tout  $a$  de  $I$  et donc sur  $I$ .  $\square$

*Démonstration de l'assertion (iv).* On se sert de la proposition 4.15 pour démontrer l'assertion (iv). Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $g$  est continue en  $a$  et  $g(a) \neq 0$ , il existe  $\eta \in \mathbf{R}_+^*$  tel que pour tout  $x \in I$  :

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad g(x) \neq 0.$$

On a ainsi :

$$|x - a| < \eta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} \right| \leq \frac{|g(x) - g(a)|}{|g(x)||g(a)|} \leq \frac{2\varepsilon}{|g(a)|^2},$$

ce qui prouve la continuité de  $\frac{1}{g}$  sur  $I$ . □

*Démonstration de l'assertion (v).* Elle découle de celle de l'inverse combinée avec celle du produit. □

**Proposition 4.18** (Continuité de fonctions composées). *Soient  $I, J$  des intervalles de  $\mathbf{R}$  et soit  $a \in I$ . Soient  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g: J \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions réelles telles que  $f(I) \subset J$ . Si  $f$  est continue en  $a$  et si  $g$  est continue en  $f(a)$  alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $g$  est continue en  $f(a)$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $y \in J$  :

$$|y - f(a)| \leq \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Comme  $f$  est continue en  $a$ , il existe  $\eta' > 0$  tel que pour tout  $x \in I$  :

$$|x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta.$$

D'où

$$|x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

D'où la continuité de  $g \circ f$  sur  $I$ . □

**Proposition 4.19.** *Soient  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  est continue si et seulement si pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $f(a)$ .*

*Démonstration.*  $(\Rightarrow)$  On suppose que  $f$  est continue en  $a$  et  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $a$ . On veut démontrer que  $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $f(a)$ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, \quad |f(u_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

On sait que  $f$  est continue en  $a$  donc  $f(x) \rightarrow f(a)$ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in ]a - \alpha, a + \alpha[, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (4.1)$$

On sait aussi que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a$ , d'où

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| < \varepsilon'. \quad (4.2)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on prend  $\alpha > 0$  donné par (4.1). Dans (4.2), on prend  $\varepsilon' = \alpha$  alors

$$\exists N, \forall n \geq N, (|u_n - a| < \alpha \Rightarrow |f(u_n) - f(a)| < \varepsilon).$$

( $\Leftarrow$ ) On démontre par contraposée la proposition, c'est-à-dire on montre que si  $f$  n'est pas continue alors il existe  $u_n$  qui converge vers  $a$  mais  $f(u_n)$  ne converge pas vers  $f(a)$ . En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on peut prendre  $\alpha = \frac{1}{n} > 0$ , Donc :

$$\exists x_n \in I, |x_n - a| < \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire la suite  $x_n$  tend vers  $a$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ , d'où la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers  $a$ . □

On peut appliquer la théorie des fonctions continues aux suites récurrentes. Cela donne la proposition suivante :

**Proposition 4.20.** *Soit  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction réelle continue sur  $[a, b]$  et soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 \in [a, b]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  alors :*

- (i) *Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in [a, b]$  alors  $\ell = f(\ell)$ .*
- (ii) *Si  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et bornée donc convergente.*
- (iii) *Si  $f$  est décroissante sur  $[a, b]$ , alors  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes.*

*Démonstration de l'assertion (i).* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [a, b]$  (on peut montrer cela par récurrence), d'où la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors sa limite vérifie  $a \leq \ell \leq b$  avec  $\ell \in [a, b]$ . Donc  $f$  est continue en  $\ell$ . D'après la proposition 4.19, comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \ell$ , on a :

$$f(u_n) \rightarrow f(\ell) \Rightarrow u_{n+1} \rightarrow f(\ell) \Rightarrow \ell = f(\ell).$$

□

### 4.2.3 Prolongement par continuité

**Définition 4.21** (Prolongement par continuité). Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $I$  un intervalle contenant  $a$  et soit  $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. On dit que  $f$  admet un prolongement par continuité en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  est finie.

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  avec  $\ell \in \mathbf{R}$ . Soit  $\tilde{f}$  la fonction définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a, \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Elle est définie sur  $I$  tout entier et, par construction  $\tilde{f}$  est continue en  $a$ .

**Définition 4.22.** La fonction  $\tilde{f}$  est appelé le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$ .

**Exemple 4.23.** Soit  $x \mapsto f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ . On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

$f$  est donc prolongeable par continuité en 0. Son prolongement par continuité en 0 est la fonction :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La figure 4.2 donne une représentation graphique que  $\tilde{f}$ .

### 4.2.4 Image d'un intervalle par une application continue

**Théorème 4.24.** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes dans  $[a, b]$ .

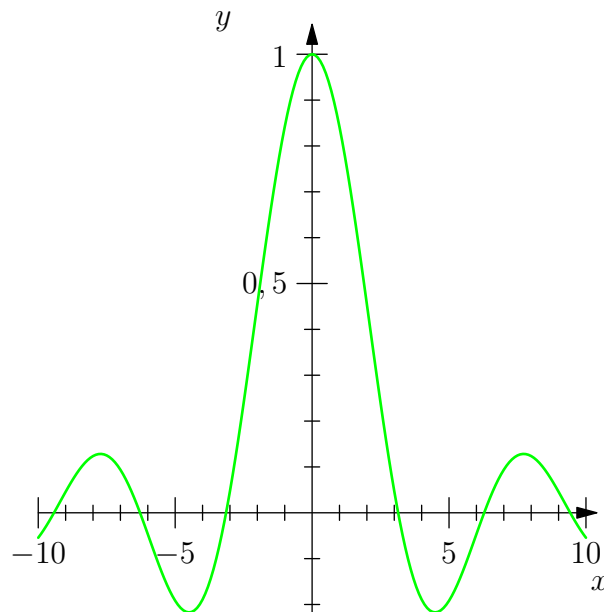
*Démonstration.* Si  $f$  n'est pas majorée, on a :

$$\forall A > 0, \exists x_A \in [a, b], \quad f(x_A) > A.$$

Avec  $A = n$ , on a :

$$\forall n > 0, \exists x_n \in [a, b], \quad f(x_n) > n.$$



FIGURE 4.2 – Prolongement par continuité de la fonction  $f : x \mapsto \sin(x)/x$ 

Donc  $\lim f(x_n) = +\infty$  et pour tout  $n$ ,  $x_n \in [a, b]$ , c'est-à-dire  $a \leq x_n \leq b$ , d'où la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite  $x_{\varphi(n)}$  qui converge. Soit  $\ell$  sa limite, d'où pour tout  $n$ ,  $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$  et  $a \leq \ell$ . Donc  $f$  est continue en  $\ell$ . Résumons : on a  $x_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$  et  $f$  est continue en  $\ell$  donc  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\ell)$ . On aboutit donc à une contradiction,  $f$  est donc majorée. On montre de façon analogue que  $f$  est minorée.  $f$  est donc bornée. On note :

$$A = \{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Cet ensemble est non vide et bornée donc on peut noter  $M = \sup A$  et  $m = \inf A$ . On veut démontrer qu'il existe  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) = M$  et qu'il existe  $x' \in [a, b]$ ,  $f(x') = m$ . On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in [a, b], \quad |M - \varepsilon| \leq f(x_\varepsilon) \leq M.$$

On pose  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in [a, b], \quad M - \frac{1}{m} \leq f(x_n) \leq M.$$

Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\lim f(x_n) = M$ . On a, pour tout  $n$ ,  $f(x_n) \in A$ , c'est-à-dire  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée (pour tout  $n$ ,  $a \leq x_n \leq b$ ). Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous dit qu'il existe une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  une sous-suite de  $x_n$  qui converge. On note  $\ell$  sa limite,  $\ell$  est dans l'intervalle  $[a, b]$ . Donc

comme  $f$  est continue en  $\ell$  et  $x_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$ , on a  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\ell)$ . Or,  $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $M$  donc  $\lim(x_{\varphi(n)}) = M$ . Donc  $M = f(\ell)$ .  $\square$

**Théorème 4.25** (Théorème des valeurs intermédiaires, cas où  $\lambda = 0$ ). Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue. Si  $f(a) \cdot f(b) < 0$  alors il existe  $c \in ]a, b[$ ,  $f(c) = 0$ .

*Démonstration, [1].* On suppose que  $f(a) \leq f(b)$  (le cas  $f(a) \geq f(b)$  est semblable). On suppose que 0 est dans l'intervalle  $[f(a), f(b)]$ . On pose :

$$A = \{x \in [a, b], f(x) \leq 0\}.$$

L'ensemble  $A$  est non vide (car il contient  $a$ ) et est majoré par  $b$ . Il admet donc une borne supérieure qu'on note  $c$ . On a,  $a \leq c \leq b$  ( $a \in A$  et  $b$  est un majorant de  $A$ ). On va montrer que  $f(c) = 0$ . On commence par remarquer qu'il existe une suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $A$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c$ . Par continuité de  $f$  en  $c$ , on a donc  $f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n)$  et donc, comme  $f(c_n) \leq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on en déduit que  $f(c) \leq 0$ .

On suppose maintenant que  $f(c) < 0$  et on montre que ceci est impossible. On a donc  $c < b$  (car  $f(b) \geq 0$ ). Posons  $\varepsilon = -f(c) > 0$ . Par continuité de  $f$  en  $c$ , il existe donc  $\alpha > 0$  tel que :

$$x \in [a, b], |x - c| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

On a donc, en particulier, avec  $\beta = \min(\alpha, b - c) > 0$ ,

$$c \leq x \leq c + \beta \Rightarrow f(x) \leq f(c) + \varepsilon = 0.$$

Ceci prouve que  $c + \beta \in A$ , en contradiction avec la définition de  $c$  (qui est  $c = \sup A$ ). On a ainsi montré que  $f(c)$  n'est pas strictement inférieur à 0. Donc  $f(c) = 0$ .  $\square$

Il existe une généralisation de ce théorème :

**Théorème 4.26** (Théorème des valeurs intermédiaires). Soient  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et  $\alpha$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Alors il existe un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \alpha$ .

*Démonstration.* Si  $\alpha = f(a)$ , on prend  $c = a$  et si  $\alpha = f(b)$ , on prend  $c = b$ . Donc  $\alpha \neq f(a) \neq f(b)$ . Soit la fonction

$$\begin{aligned} g &: [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto g(x) = f(x) - \alpha \end{aligned}$$

La fonction  $g$  est continue sur  $[a, b]$  et  $g(a)g(b) < 0$  donc il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ . Or,

$$g(c) = f(c) - \alpha = 0 \Rightarrow f(c) = \alpha.$$

□

**Corollaire 4.27.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Alors  $f(I)$  est un intervalle.

*Démonstration.* On note  $J := f(I) = \{f(x), x \in I\}$ . Soient  $y_1, y_2 \in f(I)$  avec  $y_1 \leq y_2$  et  $\alpha \in [y_1, y_2]$ . On montre que  $\alpha \in I$ . On a  $y_1 \in f(I)$  donc il existe  $x_1 \in I$  (resp.  $x_2 \in I$ ) tel que  $y_1 = f(x_1)$  (resp.  $y_2 = f(x_2)$ ). D'après le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction  $f$  sur  $[x_1, x_2]$ , il existe  $c \in [x_1, x_2]$  tel que  $f(c) = \alpha$ . On a donc  $c \in I$  et  $[x_1, x_2] \subset I$ . □

**Corollaire 4.28.** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue. Alors  $f([a, b])$  est un intervalle fermée bornée.

**Remarque 4.29.** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle de même nature.

## 4.3 Fonctions réciproques

### 4.3.1 Théorème d'existence des fonctions réciproques

**Théorème 4.30.** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ . Alors  $f$  établit une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$ . L'application réciproque de  $f$ , notée  $f^{-1}$ , est continue sur  $J$  et a la même monotonie que  $f$ .

*Démonstration.* Soit  $f: I \rightarrow J = f(I)$  qu'on suppose strictement croissante. Par définition de  $J$ ,  $f: I \rightarrow J$  est surjective,

$$\forall y \in J, \exists x \in I, \quad y = f(x).$$

On montre que  $f$  est injective. Soient  $x, x' \in I$  tel que  $f(x) = f(x')$ . Mais comme  $f$  est strictement croissante,  $f(x) = f(x')$  implique que  $x = x'$ . Donc  $f$  est injective et surjective donc  $f$  est bijective de  $I$  sur  $J$ . Soit  $f^{-1}: J \rightarrow I$  l'application réciproque de  $f$  (si  $y = f(x)$  alors  $x = f^{-1}(y)$ ). On montre que  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $J$ . Soient  $y_1, y_2 \in J$  tel que  $y_1 < y_2$  alors il existe un unique  $x_1 \in I$  et un unique  $x_2 \in I$  tels que  $y_1 = f(x_1)$  et  $y_2 = f(x_2)$ . On a  $y_1 < y_2$  et comme  $f$  est strictement croissante, on a :

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

## 52 CHAPITRE 4. LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS RÉELLES

De plus,  $x_1 = f^{-1}(y_1)$  et  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ , d'où  $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ . Donc :  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $J$ . Maintenant, on montre que  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ . On suppose que  $f$  est strictement croissante sur  $I$  et on fixe  $y_0 \in J$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour prouver la continuité de  $f^{-1}$  en  $y_0$ , on doit montrer que :

$$\exists \eta > 0, \forall y \in f(I), \quad |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

On note  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ . On distingue deux cas :

- 1) Si  $x_0$  est à l'intérieur de  $I$  alors, dans ce cas, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \subset I$ . On note  $\varepsilon' = \min\{\alpha, \varepsilon\}$ , ainsi  $]x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'[ \subset I$ . On a les équivalences suivantes (la dernière découlant du fait que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ ) :

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \varepsilon' &\Leftrightarrow x \in [x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'] \\ &\Leftrightarrow x_0 - \varepsilon' < x < x_0 + \varepsilon' \Leftrightarrow f(x_0 - \varepsilon') < f(x) < f(x_0 + \varepsilon'). \end{aligned}$$

On note  $y = f(x)$ ,  $\eta_1 = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon')$  et  $\eta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$ . On remarque que  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont strictement positifs car  $f$  est strictement croissante sur  $I$ . Ainsi :

$$|x - x_0| < \varepsilon' \Leftrightarrow y_0 - \eta_1 < y < y_0 + \eta_2.$$

On sait que  $y_0 - \eta_1$  et  $y_0 + \eta_2$  sont dans  $f(I)$ . Comme  $f$  est continue sur  $I$ ,  $f(I)$  est un intervalle donc  $]y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2[ \subset f(I)$ . On note  $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ . On a donc également  $]y_0 - \eta, y_0 + \eta[ \subset f(I)$ . On remarque que  $\eta_1$  et  $\eta_2$  (et donc  $\eta$ ) ne dépendent pas de  $y_0$ . Ainsi, on a, pour tout  $y \in f(I)$  :

$$\begin{aligned} |y - y_0| < \eta &\Rightarrow y_0 - \eta < y < y_0 + \eta \Rightarrow y_0 - \eta_1 < y < y_0 + \eta_2 \\ &\Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon' \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

- 2) On se place dans le cas où  $x_0$  est une borne de  $I$  (on supposera que  $x_0$  est la borne inférieure de  $I$ , l'autre cas s'adapte facilement à celui-ci). Comme  $f$  est strictement croissante sur  $I$ ,  $y_0$  est la borne inférieure de  $f(I)$ . Dans ce cas, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $]x_0, x_0 + \alpha[ \subset I$ . On note  $\varepsilon' = \min\{\alpha, \varepsilon\}$ , ainsi :  $]x_0, x_0 + \varepsilon'[ \subset I$ . On a, comme avant, les équivalences suivantes (la dernière découlant du fait que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ )

$$x \in [x_0, x_0 + \varepsilon'[ \Leftrightarrow x_0 < x < x_0 + \varepsilon' \Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x) < f(x_0 + \varepsilon').$$

On note  $y = f(x)$ ,  $\eta = y_0 - f(x_0 - \varepsilon') = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon') > 0$ . Ainsi :

$$x \in [x_0, x_0 + \varepsilon'[ \Leftrightarrow y_0 \leq y < y_0 + \eta.$$

On sait que  $y_0 + \eta$  est dans  $f(I)$ . Comme  $f$  est continue sur  $I$ ,  $f(I)$  est un intervalle donc  $[y_0, y_0 + \eta[ \subset f(I)$ . Ainsi, on a, pour tout  $y \in f(I)$  :

$$\begin{aligned} |y - y_0| < \eta &\Rightarrow y_0 \leq y < y_0 + \eta \Rightarrow x_0 \leq x < x_0 + \varepsilon' \\ &\Rightarrow x_0 \leq x < x_0 + \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

On conclut que dans tous les cas, il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall y \in f(I), \quad |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

Ce raisonnement étant valable pour tout  $y_0 \in f(I)$ , la fonction réciproque  $f^{-1}$  est donc continue sur  $f(I)$ .  $\square$

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de  $f^{-1}$  est obtenue en faisant une symétrie de  $f$  par rapport à la première bissectrice du repère.

### 4.3.2 Fonctions réciproques usuelles

#### La fonction exponentielle

La fonction logarithme (qu'on note  $\ln: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ ) est continue et strictement croissante. On a  $\ln(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R}$ , donc elle établit une bijection de  $\mathbf{R}_+$  sur  $\mathbf{R}$  et sa fonction réciproque est la fonction *exponentielle* (notée  $e^x$  ou  $\exp(x)$ ) :

$$\begin{aligned} \exp &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned}$$

Si  $x > 0$ , on a :

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y.$$

Les courbes représentatives de  $\exp$  et  $\ln$  sont dessinées en figure 4.3.

#### La fonction racine $n^e$

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , la fonction puissance  $n$  définie de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  par  $x \mapsto x^n$  est continue sur  $\mathbf{R}$ .

- Si  $n$  est impair, elle est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$  donc elle est bijective sur  $\mathbf{R}$ .
- Si  $n$  est pair, elle est strictement croissante sur  $\mathbf{R}_+$  donc elle est bijective sur  $\mathbf{R}_+$ .

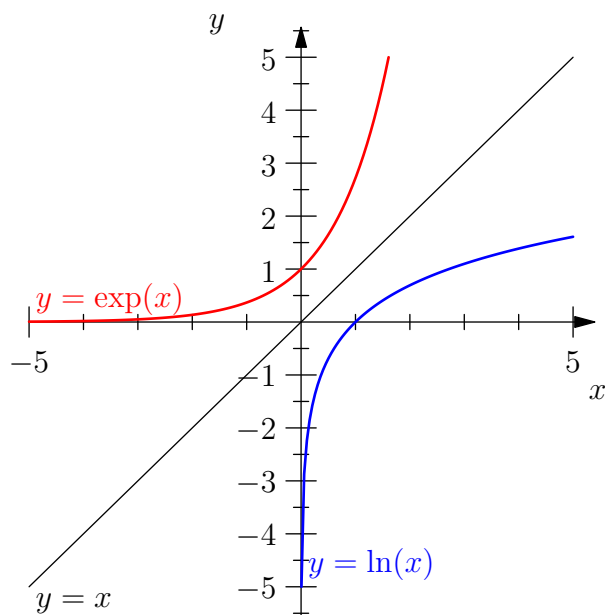


FIGURE 4.3 – Courbes représentatives des fonctions logarithme et exponentielle

Elle admet donc une fonction réciproque appelée « *racine  $n^e$*  » et notée  $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ .

– Si  $n$  est impair alors pour tout  $x, y \in \mathbf{R}$ ,

$$y = x^{2k+1} \Leftrightarrow x = \sqrt[2k+1]{y}.$$

– Si  $n$  est pair alors pour tout  $x, y \in \mathbf{R}_+$ ,

$$y = x^{2k} \Leftrightarrow x = \sqrt[2k]{y}.$$

Les courbes représentatives de  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $x^3$  et  $\sqrt[3]{x}$  sont dessinées à la figure 4.4.

### La fonction arccosinus

La fonction cosinus est continue, strictement croissante sur  $[0, \pi]$ . Elle établit donc une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ . Sa fonction réciproque « *arccosinus* » et se note

$$\begin{aligned} \arccos &: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}.$$

On a, pour tout  $x \in [0, \pi]$  et  $y \in [-1, 1]$  ::

$$y = \cos x \Leftrightarrow \arccos y = x.$$

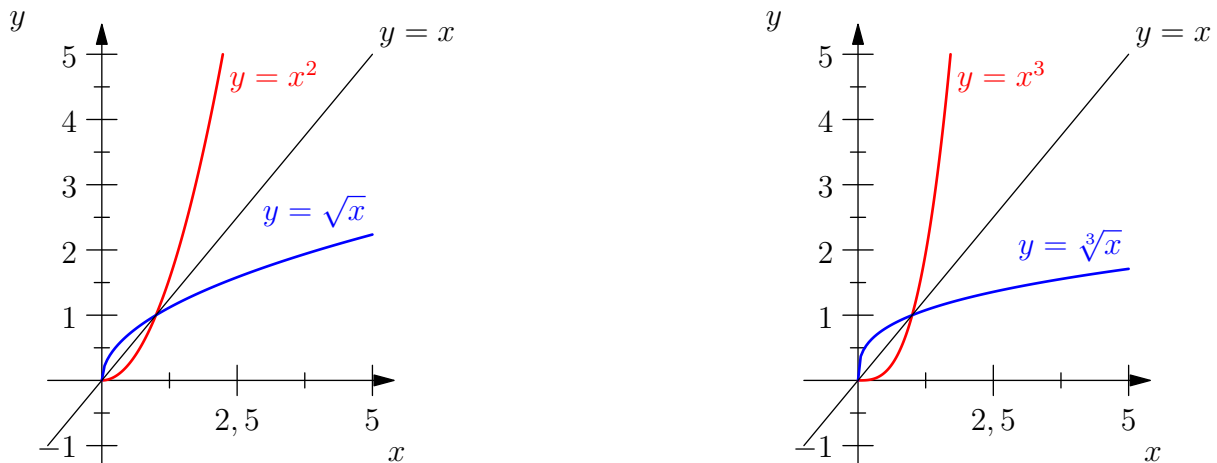


FIGURE 4.4 – À gauche, les courbes représentatives de la fonction carré et racine carré et à droite, les courbes représentatives de la fonction cube et racine cubique

Les courbes représentatives de  $\cos$  et  $\arccos$  sont dessinés à la figure 4.5. La fonction  $\arccos$  est continue et strictement décroissante sur  $[-1, 1]$ .

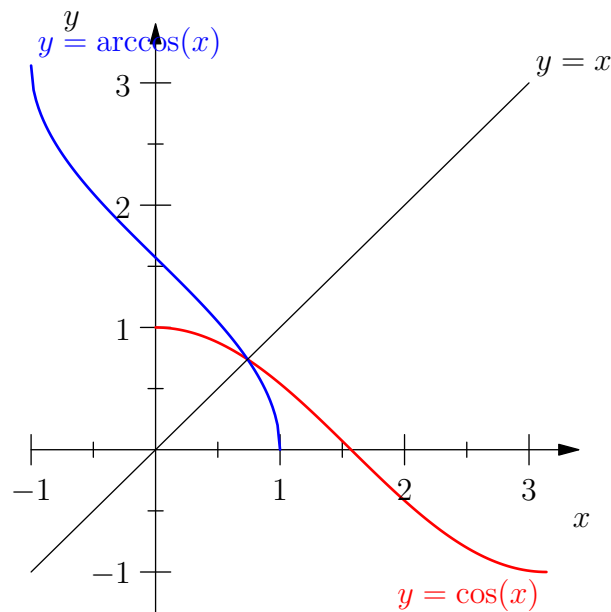


FIGURE 4.5 – Courbes représentatives des fonctions logarithme et exponentielle

**Exemples 4.31.** 1.  $\arccos(0) = x \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ,

$$2. \arccos(\cos \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6},$$

$$3. \arccos(\cos -\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}.$$

**Remarque 4.32.** On a les relations suivantes :

- $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ ,
- Pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $\cos(\arccos(x)) = x$ ,
- Pour tout  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$ , mais cette relation est fausse si  $\theta$  appartient à un autre intervalle comme le montre l'exemple 4.31-2 et 4.31-3.

### La fonction arcsinus

La fonction sinus est continue sur  $\mathbf{R}$  et strictement croissante sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Elle établit une bijection sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$ . Sa fonction réciproque s'appelle arcsinus, elle est aussi continue, strictement croissante sur  $[-1, 1]$ . Elle est aussi impaire.

$$\begin{aligned} \arcsin &: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ y &\mapsto \arcsin(y) \end{aligned}$$

Si  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  et  $-1 \leq y \leq 1$ , on a :

$$\sin(x) = y \Leftrightarrow \arcsin(y) = x.$$

La figure 4.6 donne la courbe représentative des fonctions sinus et arcsinus.

### La fonction arctangente

La fonction tangente est définie sur  $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ , elle est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Elle établit donc une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $]-\infty, +\infty[$ . Sa fonction réciproque s'appelle arctangente, elle est aussi continue et strictement croissante sur  $\mathbf{R}$  :

$$\begin{aligned} \arctan &: \mathbf{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ y &\mapsto \arctan(y) \end{aligned}$$

et on a, pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $y \in \mathbf{R}$  :

$$\tan x = y \Leftrightarrow \arctan(y) = x.$$

La figure 4.7 donne la courbe représentative des fonctions tangente et arctangente.



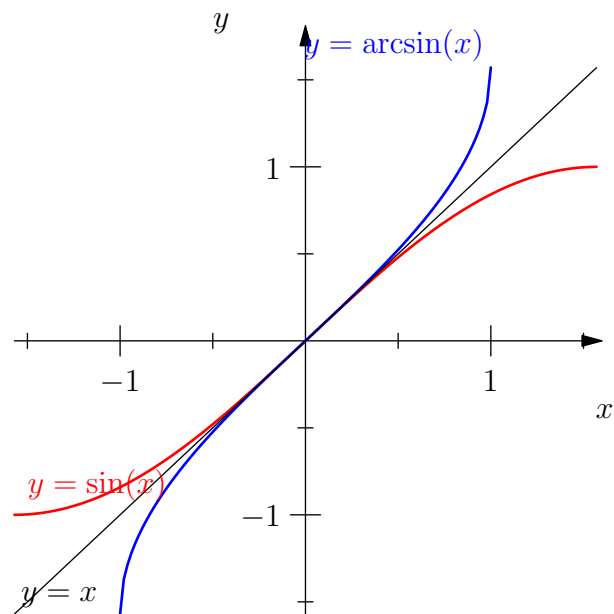


FIGURE 4.6 – Courbes représentatives des fonctions sinus et arcsinus

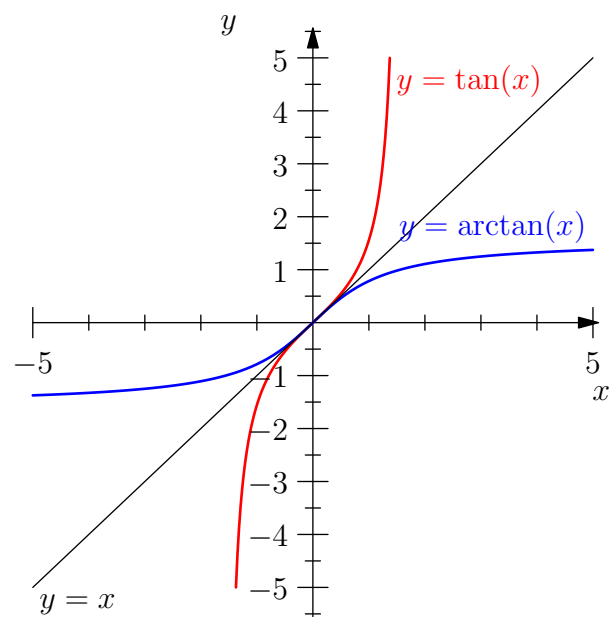


FIGURE 4.7 – Courbes représentatives des fonctions tangente et arctangente

**Les fonctions trigonométriques hyperboliques et leur réciproque**

**Définition 4.33** (Sinus hyperbolique). *La fonction sinus hyperbolique est définie par :*

$$\begin{aligned} \sinh &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

*Le sinus hyperbolique est une bijection de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  strictement croissante, et impaire. Sa dérivée est le cosinus hyperbolique. Son application réciproque s'appelle argument sinus hyperbolique et est notée  $\operatorname{argsinh}$ .*

**Définition 4.34** (Cosinus hyperbolique). *La fonction cosinus hyperbolique est définie par :*

$$\begin{aligned} \cosh &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

*Le cosinus hyperbolique est une bijection de  $\mathbf{R}$  dans  $[1, +\infty[$  strictement croissante sur  $\mathbf{R}_+$ , et paire. Sa dérivée est le sinus hyperbolique. Son application réciproque s'appelle argument cosinus hyperbolique et est notée  $\operatorname{argcosh}$ .*

**Définition 4.35** (Tagente hyperbolique). *La fonction tangente hyperbolique est définie par :*

$$\begin{aligned} \tanh &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \end{aligned}$$

*La tangente hyperbolique est une bijection de  $\mathbf{R}$  dans  $] -1, 1[$  strictement croissante, et impaire. Sa dérivée est*

$$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x).$$

*Son application réciproque s'appelle argument tangente hyperbolique et est notée  $\operatorname{argtanh}$ .*

**Proposition 4.36** (Expression en fonction de la fonction logarithme). *On a :*

$$\begin{aligned} \forall x \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{argcosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{argsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \\ \forall x \in ] -1, 1[, \quad \operatorname{argtanh}(x) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

Pour terminer ce chapitre, on pourra regarder les courbes représentatives des fonctions hyperboliques et leur réciproque à la figure 4.8.

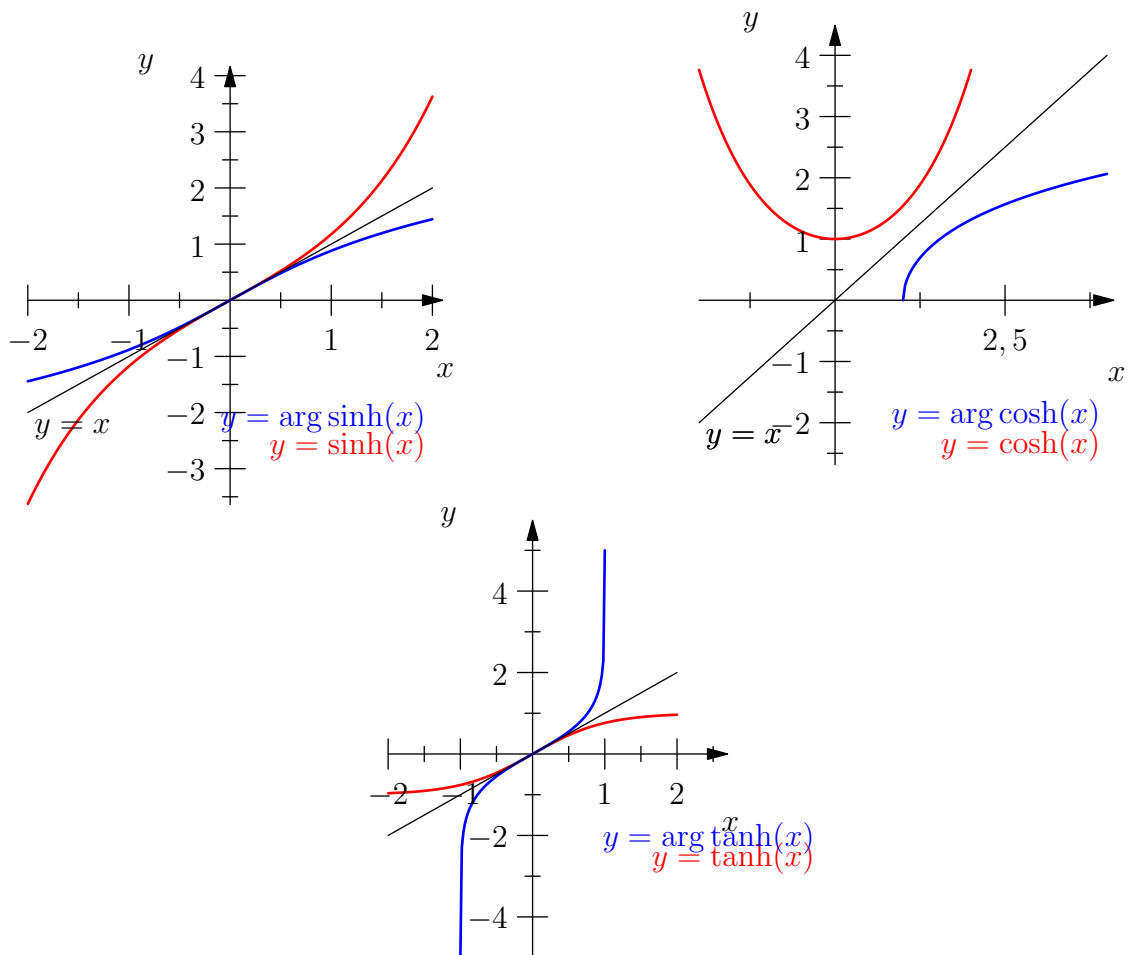


FIGURE 4.8 – Courbes représentatives des fonctions hyperboliques et leur réciproque

## 4.4 Exercices

**Exercice 4.1.** En utilisant la définition d'une limite, montrer que :

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$  ;
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} (3x + 2) \sin\left(\frac{1}{3x+2}\right) = 0$  ;
4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = 2$  ;
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  ;
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} = +\infty$ .

**Exercice 4.2.** 1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en  $+\infty$ .

**Exercice 4.3.** On rappelle les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Calculer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ,
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ ,
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ ,
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2}$ ,
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\cos^2 x - 1}$ ,
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(x/2)}$ .

**Exercice 4.4.** Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xE\left(\frac{1}{x}\right)$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}E\left(\frac{1}{x}\right)$ ,
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$ .

**Exercice 4.5.** Étudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  des fonctions suivantes :

1.  $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f_1(0) = 0$  ;

2.  $f_2(x) = \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $f_2(0) = 0$  ;
3.  $f_3(x) = xE(x)$  ;
4.  $f_4(x) = E(x) \sin(\pi x)$ .

**Exercice 4.6.** Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur  $\mathbf{R}$  ?

- a)  $f(x) = \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  ;
- b)  $g(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$  ;
- c)  $h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ .

**Exercice 4.7.** Soient  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $d \in \mathbf{R}_+$ . Démontrer, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme  $P(X) = X^n - d$  a au moins une racine dans  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 4.8.** Soit  $f$  la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

**Exercice 4.9.** Existe-il une bijection continue de  $]0, 1]$  sur  $\mathbf{R}$  ?

**Exercice 4.10.** Écrire sous forme d'expression algébrique :

1.  $\sin(\arccos(x))$ ,
2.  $\cos(\arcsin(x))$ ,
3.  $\sin(3 \arctan(x))$ .

**Exercice 4.11.** Résoudre dans  $\mathbf{R}$ , l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

**Exercice 4.12.** Vérifier que :

1.  $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ ,
2.  $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \text{sign}(x) \cdot \frac{\pi}{2}$  où la fonction  $\text{sign}(x)$  est définie de la manière suivante :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



# Chapitre 5

## Fonctions dérivables

### 5.1 Dérivabilité

#### 5.1.1 Dérivée en un point et en un intervalle

**Définition 5.1** (Dérivée en un point). Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est dérivable en un point  $x_0 \in I$  si la limite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Si c'est le cas, on note  $f'(x_0)$  et on appelle nombre dérivée de  $f$  en  $x_0$  cette limite.

**Définition 5.2** (Dérivée en un intervalle). Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si  $f$  est dérivable en chaque point de  $I$ . On obtient alors une fonction

$$\begin{aligned} f' &: I \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

dérivée de  $f$  sur  $I$ .

On a une définition équivalente à la définition 5.1.

**Proposition 5.3.** Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est dérivable en un point  $x_0 \in I$ . La fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si il existe un réel  $\ell$  et une fonction  $\varepsilon$  tels que pour tout  $h$  tel que  $x_0 + h \in I$  :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell h + h\varepsilon(h)$$

où  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

*Démonstration, [19].* (Def. 5.1  $\Rightarrow$  Prop. 5.3) On suppose la définition 5.1 : il existe donc  $\ell \in \mathbf{R}$  tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell.$$

On pose, pour  $h \neq 0$ ,

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \ell.$$

Par hypothèse, on a ainsi  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ . De plus :

$$h\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \ell h,$$

d'où la proposition 5.3.

(Prop. 5.3  $\Rightarrow$  Def. 5.1) Il existe  $\ell \in \mathbf{R}$  et une fonction  $\varepsilon$  tel que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell h + h\varepsilon(h)$$

où  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ . Pour  $h \neq 0$ , on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell + \varepsilon(h),$$

et comme  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ , il vient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell,$$

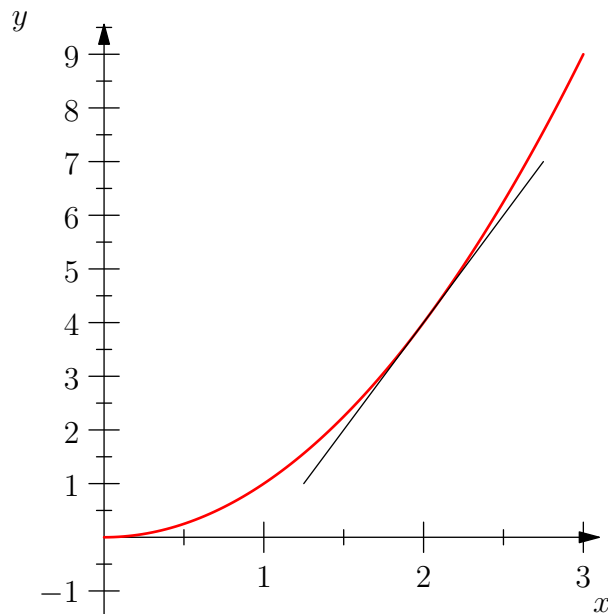
d'où la définition 5.1. □

## 5.1.2 Tangente en un point

**Définition 5.4** (Tangente en un point, [20]). Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction qu'on suppose dérivable en un point  $M$  de la courbe et  $M_0$  un autre point de la courbe. La tangente à la courbe en un point  $M$  est la droite « limite » prise par les droites  $(MM_0)$  lorsque le point  $M_0$  se rapproche indéfiniment du point  $M$  tout en restant sur ladite courbe.

**Proposition 5.5.** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction qu'on suppose dérivable en un point  $x_0$  de  $I$ . Alors le nombre dérivée de  $f$  en  $x_0$  représente le coefficient directeur de la tangente de  $f$  en  $x_0$ .



FIGURE 5.1 – Tangente à la courbe de  $x^2$  en 2

**Proposition 5.6** (Équation de la tangente). *Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction dérivable en  $x_0$  et  $M = (x_0, y_0)$  sur la courbe de  $f$ . L'équation de la tangente  $T$  au point  $M_0$  est :*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

*Démonstration.* Une tangente a nécessairement une équation du type  $ax + b$  car c'est une droite. La proposition 5.5 nous dévoile que  $a = f'(x_0)$ . Or, d'après la définition de la dérivabilité d'une fonction :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)(x - x_0) = f(x) - f(x_0).$$

On note  $y = f(x_0)$  et on obtient bien l'équation de la tangente au point  $M_0$  :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

□

### 5.1.3 Rapport avec la continuité

**Proposition 5.7.** *Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$ .*

*Démonstration.* Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors, d'après la proposition 5.3, il existe une fonction  $\varepsilon$  tel que :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

On fait tendre  $x$  vers  $x_0$ , on obtient donc :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0),$$

d'où  $f$  est continue en  $x_0$ . □

**Remarque 5.8.** La réciproque est fautive. Prenons, par exemple, la fonction :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto |x|.$$

La fonction est bien continue en 0 (le lecteur pourra le montrer très facilement). On étudie sa dérivabilité en 0. On a, pour  $x \neq 0$ ,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x|}{x}.$$

Pour  $x > 0$ , on obtient  $\frac{|x|}{x} = 1$  et  $x < 0$ ,  $\frac{|x|}{x} = -1$ . Donc, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1.$$

$f$  n'est donc pas dérivable en 0. Par contre, on peut dire que  $f$  est dérivable à droite en 0 (avec  $f'_d(0) = 1$ ) et dérivable à gauche en 0 (avec  $f'_g(0) = -1$ ).

## 5.2 Propriétés

### 5.2.1 Somme et produit de deux fonctions dérivables

**Proposition 5.9** (Somme de deux fonctions dérivables). Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g: I \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions dérivables en un point  $x_0 \in I$ . Alors  $f + g$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

**Proposition 5.10** (Produit de deux fonctions dérivables). Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g: I \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions dérivables en un point  $x_0 \in I$ . Alors  $f \cdot g$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

**Proposition 5.11** (Produit d'une fonction dérivable avec un scalaire). Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ , un réel  $\lambda \in \mathbf{R}$  et une fonction  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable en  $x_0 \in I$ . Alors  $\lambda \cdot f$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0).$$

### 5.2.2 Dérivée de l'inverse et du quotient

**Proposition 5.12** (Inverse d'une fonction dérivable). Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ , une fonction  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable en  $x_0 \in I$ . Si  $f(x_0) \neq 0$  alors  $\frac{1}{f}$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

**Proposition 5.13** (Quotient de deux fonctions dérivables). Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g: I \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions dérivables en un point  $x_0 \in I$  tels que  $g(x_0) \neq 0$ . Alors  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

### 5.2.3 Dérivée de la composée

**Proposition 5.14.** Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles ouverts de  $\mathbf{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g: I \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions telle que  $f(I) \subset J$ . On considère la composée  $g \circ f: I \rightarrow \mathbf{R}$ . Si  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  et si  $g$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0) \in J$  alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

**Conséquence 5.15** (Dérivée d'une puissance). Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ , une fonction  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable en  $x_0 \in I$ . Soit  $n \in \mathbf{Z}^*$ , on considère :

$$\begin{aligned} f^n &: I \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f^n(x) = f(x)^n. \end{aligned}$$

Alors  $f^n$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$(f^n)'(x_0) = n f^{n-1}(x_0) \cdot f'(x_0).$$

**Exemple 5.16.** Soit la fonction :

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cos(2e^{x^2} + x) . \end{aligned}$$

On décompose la fonction  $f$  de la manière suivante :

$$x \mapsto x^2 \mapsto e^{x^2} \mapsto 2e^{x^2} \mapsto 2e^{x^2} + x \mapsto \cos(2e^{x^2} + x).$$

On pose, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $g(x) = \cos(x)$  et  $h(x) = 2e^{x^2} + x$  et on constate que  $f = g \circ h$ . On a donc :

$$f'(x) = -\sin(h(x)) \times h'(x) = -\sin(2e^{x^2} + x) \times h'(x) = \sin(2e^{x^2} + x) \cdot (4e^{x^2} + 1).$$

### 5.2.4 Dérivée d'une fonction réciproque

**Proposition 5.17.** Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ . On pose  $J = f(I)$ .  $f$  établit donc une bijection entre  $I$  et  $f(I) = J$ . On note  $f^{-1}: J \rightarrow I$  sa fonction réciproque. Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  tel que  $f'(x_0) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

*Démonstration,*[19]. On note  $x = f^{-1}(y)$ , on a donc :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Or,  $f^{-1}$  est continue en  $y_0$  donc

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \quad \text{ou} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} x = x_0,$$

autrement dit, lorsque  $y$  tend vers  $y_0$ ,  $x$  tend vers  $x_0$ , ce qui permet d'écrire :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

puisque  $f$  est dérivable en  $x_0$  avec  $f'(x_0) \neq 0$ . On a donc prouvé que la fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0$  et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

Fonction $f$	Fonction dérivée $f'$	Domaine de déf. de $f'$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbf{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbf{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbf{R}$
$f(x) = x^n$ (pour $n \in \mathbf{Z}^*$ )	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$ si $n > 0$ , $\mathbf{R}^*$ si $n < 0$ .
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = x^\alpha$ (pour $\alpha \geq 1$ )	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbf{R}_+$
$f(x) = x^\alpha$ (pour $0 < \alpha < 1$ )	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbf{R}_+^*$
$f(x) = x^\alpha$ (pour $\alpha < 0$ )	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbf{R}_+^*$

TABLE 5.1 – Dérivation des fonctions constantes, identité et puissances, [22, 19]

Fonction $f$	Fonction dérivée $f'$	Domaine de déf. de $f'$
$f(x) = \ln( x )$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbf{R}$
$f(x) = a^x$ (pour $a > 0$ )	$f'(x) = a^x \ln(a)$	$\mathbf{R}$

TABLE 5.2 – Dérivation des fonctions exponentielles et logarithmes, [22, 19]

Fonction $f$	Fonction dérivée $f'$	Domaine de déf. de $f'$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \sinh(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \sinh(x)$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \operatorname{argsinh}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbf{R}$
$f(x) = \operatorname{argcosh}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$] 1, +\infty[$
$f(x) = \operatorname{argtanh}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$] -1, 1[$

TABLE 5.3 – Dérivation des fonctions trigonométriques, hyperboliques, [22, 19]

## 5.3 Dérivées des fonctions usuelles

Les tables 5.1–5.3 nous donnent les dérivées des fonctions usuelles.

## 5.4 Extremum local

**Définition 5.18** (Extremum local). Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbf{R}$ . On dit que  $f$  admet un maximum (resp. un minimum) local en un point  $x_0$  en  $I$  s'il existe un intervalle  $J$  contenant  $x_0$  tel que  $J \subset I$  et pour tout  $x \in J$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$  (resp.  $f(x) \geq f(x_0)$ ). Un extremum local est un minimum ou un maximum local.

**Proposition 5.19.** Soit  $f$  une fonction dérivable définie sur un intervalle ouvert  $I$ . Si  $f$  admet un extremum local en un point  $x_0$  de  $I$  alors  $f'(x_0) = 0$ .

*Démonstration.* On suppose, par exemple, que  $x_0 \in I$  est un maximum local de  $f$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  donc, en particulier, en  $x_0$  :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Comme  $x_0 \in I$  est un maximum local de  $f$ , il existe un intervalle  $J$  voisinage de  $x_0$  tel que  $f(x) - f(x_0) < 0$ . De plus, quand  $x < x_0$ , on a  $x - x_0 < 0$  et quand  $x > x_0$ ,  $x - x_0 > 0$ . D'où :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (5.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (5.2)$$

En combinant (5.1) et (5.2), on a bien :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

□

**Remarque 5.20. Attention !** La réciproque est fautive. Considérons, par exemple, la fonction suivante :

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto x^3.$$

Sa dérivée est  $f'(x) = 3x^2$ . D'où  $f'(0) = 0$  mais n'est pas un extremum local.

## 5.5 Théorème des accroissements finis

### 5.5.1 Théorème de Rolle

**Théorème 5.21** (Théorème de Rolle). *Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction qui est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Si  $f(a) = f(b)$  alors il existe  $c \in ]a, b[$ ,  $f'(c) = 0$ .*

*Démonstration.* 1. Si  $f$  est constante sur  $[a, b]$  alors, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) = f(a)$ . Soit  $x_0$  un point quelconque de  $[a, b]$  et soit  $x \neq x_0$ , on a :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(b) - f(a)}{x - x_0} = 0.$$

D'où,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 = f'(x_0).$$

2. On suppose maintenant que  $f$  n'est pas constante.  $f$  est continue sur  $[a, b]$  donc  $f$  est bornée et atteint ses bornes, elle admet un minimum (en  $c_1$ ) et un maximum (en  $c_2$ ) sur  $[a, b]$ . La fonction  $f$  est supposé non constante donc  $f(c_1) \neq f(c_2)$ . On a donc  $c_1 \neq a$ ,  $c_1 \neq b$  donc  $c_1 \in ]a, b[$ . Comme  $f$  est dérivable dans l'intervalle  $]a, b[$ ,  $f'(c_1) = 0$ . On fait le même raisonnement pour  $c_2$  et on obtient  $f'(c_2) = 0$ .
3. Une représentation du théorème est donnée figure 5.2

□

### 5.5.2 Théorème des accroissements finies

**Théorème 5.22** (Théorème des accroissements finies (TAF)). *Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ .*

*Démonstration.* On pose la fonction :

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) .$$

La fonction  $g$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . On a :  $g(a) = 0$  et

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0.$$



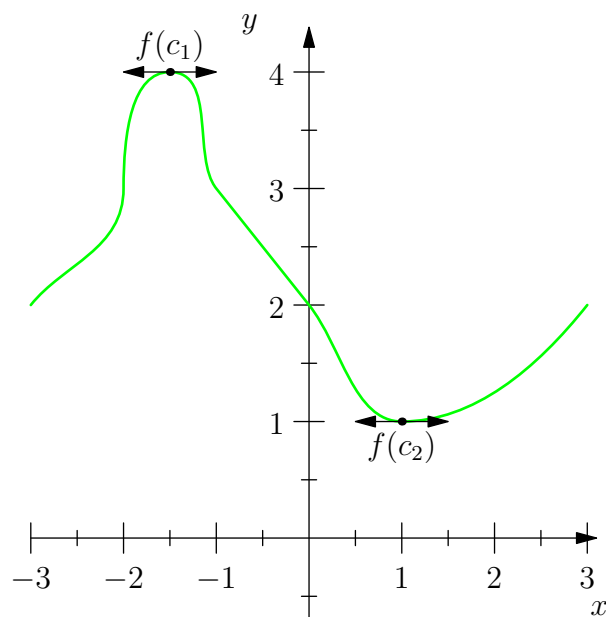


FIGURE 5.2 – Théorème de Rolle

On est donc dans les conditions du théorème de Rolle, il existe donc un  $c \in [a, b]$  tel que  $g'(c) = 0$ . On a :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

d'où :

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

**Corollaire 5.23.** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors :

- (i)  $f$  est constante sur  $[a, b]$  si et seulement si, pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $f'(x) = 0$ ;
- (ii)  $f$  est croissante (resp. décroissante) si et seulement si, pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $f'(x) \geq 0$  (resp.  $f'(x) \leq 0$ );
- (iii) Si, pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $f'(x) > 0$  alors  $f$  est strictement croissante. Si, pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $f'(x) < 0$  alors  $f$  est strictement décroissante.

*Démonstration.* ((i)) L'implication directe a été déjà abordé dans la démonstration du théorème de Rolle, on s'occupe donc de montrer la réciproque. Soit  $x \in ]a, b[$ ,  $f$  est continue sur  $[a, x]$  et  $f$  est dérivable sur

l'ouvert  $]a, x[$  donc on peut appliquer le TAF à  $f$  sur  $]a, x[$ . Il existe donc  $c \in [a, x]$  tel que :

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(c).$$

Mais  $f'(c) = 0$ , d'où  $f(x) = f(a)$ , la fonction est donc constante sur  $[a, b]$ .

**(ii)** On suppose que  $f$  est croissante (on peut faire la même démonstration pour  $f$  décroissante).

( $\Rightarrow$ ) Soit  $x_0 \in ]a, b[$ , on a :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Soient  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tels que  $x_1 < x_2$ . On applique le TAF à  $f$  sur  $[x_1, x_2]$  : il existe  $c \in ]x_1, x_2[$  tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c),$$

ce qui implique que  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$  et donc  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ .

**(iii)** On fait un raisonnement analogue que pour **(ii)**. Si  $f'(c) > 0$  alors  $f(x_2) > f(x_1)$  et  $f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$ .

□

**Remarque 5.24. Attention !** La réciproque de l'assertion **(iii)** du corollaire **5.23** est fautive. Si on considère, par exemple, la fonction  $f(x) = x^3$ ,  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et pourtant  $f'(0) = 0$ . D'où, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \not\geq 0$ .

**Corollaire 5.25** (Inégalité des accroissements finies). Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . On suppose qu'il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $x \in I$ ,  $|f'(x)| \leq M$ . Alors, pour tout  $x, y \in I$ , on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

*Démonstration.* Soient  $x, y \in I$  avec  $x < y$ . La fonction  $f$  est continue sur  $[x, y]$ , dérivable sur  $I$  donc sur  $[x, y]$ . On peut donc appliquer le TAF à  $f$  sur  $[x, y]$  : il existe un  $c \in ]x, y[$  tel que :

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(c). \tag{5.3}$$

On applique la valeur absolue à chaque membre de l'équation **(5.3)**, cela donne :

$$|f(x) - f(y)| = |(x - y)f'(c)|,$$

et on utilise l'inégalité triangulaire pour conclure que :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \cdot |f'(c)|$$

Or, on a supposé que  $|f'(c)| \leq M$ , donc :

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|.$$

□

**Remarque 5.26.** Le corollaire 5.25 s'utilise souvent en prenant  $x = u_n$  et  $y = \ell$  (où  $\ell$  est un point fixe de  $f$ ).

**Corollaire 5.27** (Règle de l'Hospital). *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbf{R}$  et  $x_0 \in I$ . On suppose que  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  et que, pour tout  $x \in I \setminus \{x_0\}$ ,  $g'(x) \neq 0$  et  $g(x) \neq 0$ . On a :*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

## 5.6 Dérivées successives

**Définition 5.28** (Fonction dérivée). *Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbf{R}$ . Alors il existe une fonction dérivée de  $f$  qu'on note :*

$$\begin{aligned} f' &: I \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Il peut arriver que  $f'$  soit elle-même dérivable sur  $I$ . On note donc  $f'' : I \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction dérivée de la fonction dérivée de  $f$  (qu'on appelle aussi la dérivée seconde). Ainsi, on a une notion de dérivée  $n^e$  de la fonction  $f$ .

**Définition 5.29** (Dérivée  $n^e$  d'une fonction). *Soit  $f$  une fonction  $(n - 1)$  fois dérivable sur l'intervalle  $I$ . Si  $f^{(n-1)}$  (la  $(n - 1)^e$  dérivée de  $f$ ) est dérivable sur  $I$  alors il existe une fonction dérivée  $n^e$  notée :*

$$\begin{aligned} f^{(n)} &: I \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

**Définition 5.30** (Fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ ). *On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  si  $f$  est  $n$  fois dérivable et si sa fonction dérivée  $f^{(n)}$  est continue.*

**Définition 5.31** (Fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ). *On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  est infiniment dérivable.*

**Proposition 5.32** (Formule de Leibniz). Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $n$  fois dérivables sur un intervalle  $I$  alors  $f \cdot g$  est  $n$  fois dérivable sur l'intervalle  $I$  et :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence sur  $n$  (voir la démonstration du binôme de Newton dans [3]).  $\square$

## 5.7 Exercices

**Exercice 5.1.** Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1.  $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f_1(0) = 0$ .
2.  $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f_2(0) = 0$ ,
3.  $f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$  si  $x \neq 1$  et  $f_3(1) = 1$ .

**Exercice 5.2.** Calculer les dérivées des fonctions :

1.  $x \mapsto \sqrt{1+x^2} \sin^2(x)$ ,
2.  $x \mapsto \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$ ,
3.  $x \mapsto \log \left( \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \right)$ ,
4.  $x \mapsto (x(x-2))^{1/3}$ .

**Exercice 5.3.** Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de :

1.  $f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$ ,
2.  $g(x) = e^x - \sqrt{1}\sqrt{x}$ .

**Exercice 5.4.** Soit  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ) dérivables sur  $]a, b[$ . On suppose que  $g'(x) \neq 0$ , pour tout  $x \in ]a, b[$ .

1. Montrer que  $g(x) \neq g(a)$ , pour tout  $x \in ]a, b[$  (*Indications : raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.*)
2. Posons

$$p = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

et considérons la fonction  $h(x) = f(x) - p \cdot g(x)$ , pour  $x \in [a, b]$ . Montrer que  $h$  vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , où  $\ell$  est un nombre réel. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$

4. Application : calculer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Exercice 5.5.** En appliquant le théorème des accroissements finies, montrer que :

1. pour tout  $x > 0$ ,  $e^x > 1 + x$ . A-t-on la même inégalité si  $x < 0$  ?
2. pour tout  $x > 0$ ,  $\sin x < x$ .

**Exercice 5.6.** Appliquer la règle de l'Hospital aux calculs des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

**Exercice 5.7.** Calculer la fonction dérivée d'ordre  $n$  des fonctions  $f, g, h$  définies par :

$$f(x) = \sin(x) ; g(x) = \sin^2(x) ; h(x) = \sin^3(x) + \cos^3(x).$$

**Exercice 5.8.** En utilisant la formule de Leibniz, calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto x^2 e^x$ ,
2.  $x \mapsto x^2(1+x)^n$ ,
3.  $x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$ ,
4.  $x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$ .



# Bibliographie

- [1] T. GALLOUËT, A. BENABDALLAH, *Analyse (2ème semestre)*, Université de Marseille, Licence de Mathématiques, 1ère année.
- [2] WIKIPÉDIA, *Nombres réels*.
- [3] C. BOULONNE, *Notes de cours M101 : Fondements de l'algèbre*, Licence de Mathématiques, Semestre 1.
- [4] C. BOULONNE, *Notes de cours M105 : Compléments d'algèbre et d'analyse*, Licence de Mathématiques, Semestre 2.
- [5] C. BOULONNE, *Notes de cours MAN : Axiomes et Nombres*, Licence de Mathématiques.
- [6] EXO7, *Propriétés de  $\mathbb{R}$* .
- [7] WIKIPÉDIA, *Intervalle (mathématiques)*
- [8] G. CONSTANTINI, *Suites de nombres réels*, URL : <http://pagespers-orange.fr/gilles.constantini>.
- [9] EXO7, *Suites*.
- [10] WIKIPÉDIA, *Règle de d'Alembert*.
- [11] C. BERTAULT, *Limite d'une suite*, URL : <http://bkristof.free.fr>
- [12] WIKIPÉDIA, *Fonction numérique*.
- [13] G. CONSTANTINI, *Continuité d'une fonction*, URL : <http://pagespers-orange.fr/gilles.constantini>.
- [14] C. BERTAULT, *Limite d'une fonction*.
- [15] EXO7, *Limites de fonctions*, URL : <http://exo7.emath.fr>
- [16] C. BERTAULT, *Continuité*.
- [17] EXO7, *Continuité*.
- [18] EXO7, *Fonctions circulaires et hyperboliques inverses*.
- [19] G. CONSTANTINI, *Dérivabilité d'une fonction*, URL : <http://pagespers-orange.fr/gilles.constantini>.

- [20] MATHILDE AU DELA DE LA SECONDE, *D'une tangente à la dérive...*,  
URL : <http://tanopah.jo.free.fr/ADS/bloc4/derive3.html>
- [21] EXO7, *Dérivabilité*.
- [22] WIKIPÉDIA, *Dérivées usuelles*.



# Index

- addition
  - des nombres réels, 2
- application
  - réciproque, 47
- borne
  - inférieure, 9
    - caractérisation, 9
  - supérieure, 8
    - caractérisation, 9
- critère
  - de Cauchy, 19
  - de d'Alembert, 19
- dérivée
  - composée, 58
  - en un intervalle, 55
  - en un point, 55
  - inverse, 58
  - produit, 58
  - produit avec un scalaire, 58
  - quotient, 58
  - réciproque, 59
  - somme, 58
- dense, 7
- droite
  - réelle achevée, 7
- ensemble
  - archimédien, 5
  - inclusion, 4
  - totalément ordonné, 4
- extremum
  - local, 62
- fonction
  - décroissante, 30
  - addition, 34
  - arccosinus, 51
  - argument cosinus hyperbolique, 53
  - argument sinus hyperbolique, 53
  - argument tangente hyperbolique, 54
  - composition, 34
  - continue, 39
    - composée, 42
    - opérations, 40
  - cosinus hyperbolique, 53
  - croissante, 30
  - de classe 0, 39
  - discontinue, 39
  - exponentielle, 49
  - graphe, 29
  - image, 29
  - impaire, 32
  - limite
    - composée, 38
    - finie, 35
    - finie en l'infini, 37
    - formes indéterminées, 38
    - infinie, 35
    - infinie à droite, 36
    - infinie à gauche, 36
    - infinie en l'infini, 37
    - opérations, 38
    - unicité, 38
  - limite à droite
    - finie, 36

- limite à gauche
  - finie, 36
- majorée, 31
- minorée, 31
- multiplication, 34
- multiplication par un scalaire, 34
- nornée, 31
- périodique, 33
- paire, 32
- réelle, 29
- racine  $n^e$ , 49
- sinus hyperbolique, 53
- strictement croissante, 30
- strictement décroissante, 30
- tagente hyperbolique, 53
- forme
  - indeterminée, 16
- groupe, 2
  - abélien, 2
  - commutatif, 2
- inégalité
  - passage à la limite, 38
  - triangulaire, 6
- indétermination, 16
- intervalle, 6
  - caractérisation, 7
  - fermé, 6
  - ouvert, 6
  - semi-ouvert, 6
  - stable, 25
- inverse, 3
- majorant, 8
- maximum, 8
  - local, 62
- minimum, 8
  - local, 62
- minorant, 8
- multiplication
  - des nombres réels, 3
- nombre
  - dérivée, 55
- opposé, 2
- partie
  - entière, 5
  - majorée, 8
  - minorée, 8
- point
  - fixe, 25
- prolongement
  - par continuité, 44
- $\bar{\mathbb{R}}$ , 7
- $\mathbb{R}^*$ , 3
- relation, 3
  - d'ordre, 3
  - totale, 4
- série
  - géométrique, 18
  - raison, 18
- sous-suite, 23
- suite, 11
  - arithmétique, 17
  - raison, 17
  - bornée, 11
  - convergence, 13
  - croissante, 11
  - décroissante, 11
  - divergence, 13
  - extraite, 23
  - géométrique, 18
  - raison, 18
- limite
  - finie, 12
  - infinie, 12
- majorée, 11
- minorée, 11
- monotone, 11
- récurrente, 25

- réelle, 11
- strictement croissante, 11
- strictement décroissante, 11
- strictement monotone, 11
- suites
  - adjacentes, 21
- tangente
  - équation, 57
  - en un point, 56
- théorème
  - de Bolzano-Weirestrass, 24
  - de Pythagore, 1
  - de Rolle, 62
  - des gendarmes, 14
  - des segments emboîtés, 22
  - des suites adjacentes, 21
  - des valeurs intermédiaires, 46
- valeur
  - absolue, 5