CAPES

Préparation à l'écrit du CAPES de Mathématiques

Clément Boulonne
http://cbmaths.fr

Préparation à l'écrit du CAPES de Mathématiques

Recueil compilé par Clément Boulonne

Année scolaire 2011-2012

Table des matières

Note de l'auteur du document

Dans ce livre, vous retrouvez une compilation de documents qui ont été utilisé pour la préparation des épreuves écrites du CAPES de Mathématiques du Master 2 MEEF (Master mathématiques spécialité métiers de l'enseignement et de la formation en mathématiques) session 2011-2012 de l'Université Lille 1.

Cette formation couvre les modules :

— Algèbre - Préparation aux écrits
— Analyse - Préparation aux écrits
— Epreuves blanches écrites du CAPES de Mathématiques

Un petit mot sur les épreuves blanches (dernière partie du document) : tous les mercredis de 8h à 13h, les étudiants suivant cette formation planchaient sur les épreuves présentés en dernière partie. Il y a eu alternance entre des épreuves type Algèbre et Analyse. Les enseignants qui étaient en charge des modules Algèbre (première partie du document) et analyse (deuxième partie du document) corrigaient les copies et nous donnaient une note sur 20. La moyenne des 5 meilleures notes étaient la note finale pour les 3 modules de préparation aux écrits du CAPES.

Note importante : je ne dispose pas des corrigés des exercices présentés dans ce document. Ne me les demandez pas par mail !

Si vous souhaitez les sources de ce document, je suis prêt à vous fournir (par mail) le premier chapitre d'Algèbre et la structure du document.

Bonne lecture, bon courage pour la préparation aux épreuves

Clement BOULONNE

Première partie

Algèbre

Séquence n° 1

Algèbre linéaire élémentaire

Fiche créée par D. TANRÉ pour la formation CAPES Lille I, année 2009-2010.
`http://algmod.free.fr/capes/fiches.html`

1.1 Espaces vectoriels, matrices

Dans la suite, le corps de référence K est égal au corps, $\mathbb{R}$, des nombres réels ou au corps, $\mathbb{C}$, des nombres complexes. Revoir les définitions et propriétés suivantes.

— *Espaces vectoriels.* Sous-espaces vectoriels. Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe de sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels. Espace vectoriel quotient $\vec{E}/\vec{F}$ d'un espace vectoriel $\vec{E}$ par un sous-espace vectoriel $\vec{F}$.

— *Famille libre. Système de générateurs. Base.* Si $\vec{E}$ est de dimension n, toute famille libre de r vecteurs peut être complétée en une base de $\vec{E}$, les éléments ajoutés pouvant être choisis dans une base arbitraire de $\vec{E}$. L'espace quotient vérifie $\dim \vec{E}/\vec{F} = \dim \vec{E} - \dim \vec{F}$.

— *Applications linéaires.* Noyau et image d'une application linéaire. Le rang d'une application linéaire $\vec{f}$ est la dimension de l'espace vectoriel image de $\vec{f}$. Une application linéaire est injective si, et seulement si, son noyau est réduit à $\{0\}$. l'espace vectoriel image de $\vec{f}$ s'identifie à l'espace vectoriel quotient par le noyau de $\vec{f}$: $\operatorname{Im}\vec{f} \simeq \vec{E}/\operatorname{Ker}\vec{f}$.

— Si $\vec{f}\colon \vec{E} \to \vec{F}$ est une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension, finie, alors $\vec{f}$ est injective si, et seulement si, $\vec{f}$ est surjective si, est seulement si $\vec{f}$ est bijective.

— *Espace vectoriel dual $\vec{E}^*$ d'un espace vectoriel $\vec{E}$.* Base dual $\mathscr{E}^*$ d'une base $\mathscr{E}$ de $\vec{E}$. Transposé $\vec{f}^T\colon \vec{F}^* \to \vec{E}^*$ d'un homomorphisme $\vec{f}\colon \vec{E} \to \vec{F}$.

— Un sous-espace vectoriel $\vec{H}$ de $\vec{E}$ est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire non nulle de $\vec{E}$ dont $\vec{H}$ est le noyau.

— Orthogonal $\vec{V}^o \subset \vec{E}^*$ d'un sous-espace $\vec{V}$ de $\vec{E}$. En dimension finie, $\dim \vec{V} + \dim \vec{V}^o = \dim \vec{E}$.

— Si $\vec{f}\colon \vec{E} \to \vec{F}$ est une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, alors $\operatorname{Ker}\vec{f}^T = (\operatorname{Im}\vec{f})^o$ et $\operatorname{Im}\vec{f}^T = (\operatorname{Ker}\vec{f})^o$.

— Matrice $\mathscr{M}(f)_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}$ d'un homomorphisme $\vec{f}\colon \vec{E} \to \vec{F}$ relativement à deux bases données $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ de $\vec{E}$ et de $\vec{F}$ respectivement. La matrice de la transposée de $\vec{f}$ relativement aux bases duales est la transposée $\mathscr{M}(f)_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}$.

— Si $\mathscr{E} = (\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ et $\mathscr{E}' = (\vec{e'_1},\dots,\vec{e'_n})$ sont deux bases de $\vec{E}$, la *matrice de passage de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{E}'$* est la matrice $P = (a_{ij})$ définie par :

$$\vec{e'_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e_i}, \quad \text{pour tout } j = 1,\dots,n.$$

— Soit $\vec{v} \in \vec{E}$. La matrice colonne, X, des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{E}$ est la matrice colonne, X', des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{E}'$ sont reliées par : $X = PX'$, où P est la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$.

— Soit $\vec{f}\colon \vec{E} \to \vec{E}$ un endomorphisme de $\vec{E}$, P la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$, A la matrice de $\vec{f}$ dans la base $\mathscr{E}$ et A' la matrice de $\vec{f}$ dans la base $\mathscr{E}'$. Ces matrices satisfont l'égalité $A' = P^{-1}AP$.

1.2 Déterminants

Une *forme n-linéaire* sur un K-espace vectoriel $\vec{E}$ est une application $f : \vec{E}^n \to K$ linéaire par rapport à chaque variable. Elle est *symétrique* si $f(\overrightarrow{v_{\tau(1)}},\ldots,\overrightarrow{v_{\tau(n)}}) = f(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ pour tout $(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}) \in \vec{E}^n$ et toute transposition $\tau \in \mathscr{S}_n$, où $\mathscr{S}_n$ est le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments. Dans ce cas, on a $f(\overrightarrow{v_{\sigma(1)}},\ldots,\overrightarrow{v_{\sigma(n)}}) = f(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$.

La forme n-linéaire f est *antisymétrique* si

$$f(\overrightarrow{\tau(1)},\ldots,\overrightarrow{\tau(n)}) = -f(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$$

pour tout $(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}) \in \vec{E}^n$ et toute transposition $\tau \in \mathscr{S}_n$. Cette dernière propriété équivaut à être *alternée*, c'est-à-dire être telle que $f(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}) = 0$ dès que deux composantes $\overrightarrow{v_i}$ et $\overrightarrow{v_j}$, avec $i \neq j$, sont égales. Une forme antisymétrique, f, vérifie $f(\overrightarrow{v_{\sigma(1)}},\ldots,\overrightarrow{v_{\sigma(n)}}) = \varepsilon(\sigma) f(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$ de signature $\varepsilon(\sigma)$.

L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur un K-espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension n est de dimension 1. Soit $(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}) \in \vec{E}^n$. Si $\mathscr{E} = (\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ est une base de $\vec{E}$ et $\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^n a_{ij}\overrightarrow{e_i}$, l'expression

$$\det_{\mathscr{E}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}) = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

définit une forme n-linéaire alternée sur $\vec{E}$, appelée *déterminant dans la base* $\mathscr{E}$.

Les déterminants dont deux bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ vérifient

$$\det_{\mathscr{E}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}) = (\det_{\mathscr{E}}\mathscr{E}')\det_{\mathscr{E}'}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}).$$

Une famille de vecteurs $(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ d'un espace vectoriel $\vec{E}$, de dimension n, forme une base si, et seulement si, $\det_{\mathscr{E}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}) \neq 0$. Le déterminant d'une matrice carrée est défini comme le déterminant des vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n ; il vérifie $\det A = \det A^T$. Soit A une matrice carrée $n\times n$ de vecteurs colonne A_i et X un vecteur colonne défini par $X^T = (x_1,\ldots,x_n)$. Pour tout $k = 1,\ldots,n$, les matrices A, X et $B = AX$ vérifient les *formules de Cramer* :

$$(\det A)x_k = \det(A_1,\ldots,A_{k-1},B,A_{k+1},\ldots,A_n).$$

Dans la pratique, un déterminant se calcule en développant suivant une ligne ou une colonne. Si $A = (a_{ij})$ est une matrice $n\times n$, nous notons A_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne et Δ_{ij} le déterminant de A_{ij}. Le déterminant de la matrice A est relié à ceux des matrices A_{ij} par

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}.$$

La *matrice des cofacteurs* est la matrice $\tilde{A}$ ayant pour élément en position (i,j) le terme $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$. Elle vérifie $A\tilde{A}^T = \tilde{A}^T A = (\det A)I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Si $\vec{u} : \vec{E} \to \vec{E}$ est un endomorphisme de $\vec{E}$, il existe une constante $C_{\vec{u}} \in K$ unique vérifiant

$$\det_{\mathscr{E}}(\vec{u}(\overrightarrow{v_1}),\ldots,\vec{u}(\overrightarrow{v_n})) = C_{\vec{u}}\det_{\mathscr{E}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}),$$

pour toute base $\mathscr{E}$ de $\vec{E}$ et toute famille $(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ de $\vec{E}$. Cette constante s'appelle le *déterminant de l'endomorphisme* $\vec{u}$ et se note $\det\vec{u}$. Si A est une matrice de $\vec{u}$ relativement à une base quelconque $\mathscr{E}$, alors $\det\vec{u} = \det A$. Ce déterminant vérifie :

$$\det(\vec{u}\circ\vec{v}) = (\det\vec{u})(\det\vec{v}),$$

pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ d'endomorphismes de $\vec{E}$. Il en découle $\det AB = (\det A)(\det B)$, pour tout couple (A,B) de matrices $n\times n$.

1.3 Valeur propre, vecteur propre

Soit $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension finie n. Le scalaire λ est une *valeur propre* de $\vec{f}$ s'il existe un vecteur $\vec{v} \in E$, non nul, tel que $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Dans ce cas, le vecteur $\vec{v}$ est appelé *vecteur propre* de $\vec{f}$, associé à la valeur propre λ.

Le *polynôme caractéristique de* $\overrightarrow{f}$ est le polynôme $P_{\overrightarrow{f}}(X) = \det(\overrightarrow{f} - X \cdot \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$. Il est de degré n et s'écrit

$$P_{\overrightarrow{f}}(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}(\overrightarrow{f}))X^{n-1} + \cdot + \det(\overrightarrow{f}).$$

Les valeurs propres de $\overrightarrow{f}$ sont les racines du polynôme caractéristique de $\overrightarrow{f}$. Il y en a donc au plus n.

Si λ est une valeur propre de $\overrightarrow{f}$, le sous-espace $\overrightarrow{V}_\lambda(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \lambda\,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$, aussi noté $\overrightarrow{V}_\lambda$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, est appelé *sous-espace propre* associé à la valeur propre λ. Si les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont distinctes deux à deux, le sous-espace $\overrightarrow{V}_{\lambda_1} + \cdots + \overrightarrow{V}_{\lambda_m}$ est somme directe des sous-espaces $\overrightarrow{V}_{\lambda_1}, \ldots, \overrightarrow{V}_{\lambda_m}$.

La *multiplicité d'une valeur propre* λ *est l'entier* $m(\lambda)$ *défini par*

$$P_{\overrightarrow{f}}(X) = (X - \lambda)^{m(\lambda)} Q(X)$$

avec $Q(\lambda) \neq 0$. Il vérifie $1 \leq \dim V_\lambda(f) \leq m(\lambda)$.

En rapportant K^n à sa base canonique, ces notions s'étendent aux matrices $n \times n$ en considérant l'endomorphisme de K^n défini par les vecteurs colonne.

1.4 Diagonalisation, réduction à la forme triangulaire

Un endomorphisme $\overrightarrow{f}$ est *diagonalisable* s'il existe une base de $\overrightarrow{E}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{f}$ est diagonale. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

— $\overrightarrow{f}$ est diagonalisable ;
— il existe une base de $\overrightarrow{E}$ constituée de vecteurs propres de $\overrightarrow{f}$;
— le polynôme caractéristique $P_{\overrightarrow{f}}$ a toutes les racines dans K et $\dim \overrightarrow{V}_\lambda(\overrightarrow{f}) = m(\lambda)$ pour toute racine λ de $P_{\overrightarrow{f}}$.

En particulier, un endomorphisme $\overrightarrow{f}$, ayant n valeurs propres distinctes, est diagonalisable.

Si le polynôme caractéristique de $\overrightarrow{f}$ a toutes ses racines dans K, il existe une base de $\overrightarrow{E}$ pour laquelle la matrice associée à $\overrightarrow{f}$ est triangulaire. Les éléments diagonaux sont les valeurs propres.

1.5 Polynôme annulateur

Soit $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ de dimension finie n. À tout polynôme $Q(X) = \sum_{k=0}^{l} c_k X^k \in K[X]$, est associé à l'endomorphisme $Q(\overrightarrow{f}) = \sum_{k=0}^{l} c_k \overrightarrow{f}^k$ de $\overrightarrow{E}$, où $\overrightarrow{f}^k : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ est défini par récurrence avec $\overrightarrow{f}^k = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f}^{k-1}$ et $\overrightarrow{f}^0 = \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$. Cette opération vérifie :

— $(a_1 Q_1 + a_2 Q_2)(\overrightarrow{f}) = a_1 Q_1(\overrightarrow{f}) + a_2 Q_2(\overrightarrow{f})$,
— $(Q_1 \cdot Q_2)(\overrightarrow{f}) = Q_1(\overrightarrow{f}) \circ Q_2(\overrightarrow{f})$,

pour tout Q_1, Q_2 de $K[X]$ et tout a_1, a_2 de K.

THÉORÈME 1.1 (CAYLEY-HAMILTON). Si $P_{\overrightarrow{f}}$ est le polynôme caractéristique de $\overrightarrow{f}$, alors $P_{\overrightarrow{f}}(\overrightarrow{f}) = 0$.

Si $Q_1, \ldots, Q_p$ sont des polynômes premiers deux à deux dans $K[X]$, de produit $P = Q_1 \cdots Q_p$, la somme $\mathrm{Ker}\, Q_1(\overrightarrow{f}) + \cdots + \mathrm{Ker}\, Q_p(\overrightarrow{f})$ est directe et vérifie :

$$\mathrm{Ker}\, P(\overrightarrow{f}) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, Q_i(\overrightarrow{f}).$$

(La preuve de cette dernière propriété est l'objet de l'exercice 11).

1.6 Décomposition de Dunford

Dans ce paragraphe, $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme de $\overrightarrow{E}$, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ayant pour multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$. Nous supposons également que le polynôme caractéristique de $\overrightarrow{f}$ a toutes ses racines dans K, c'est-à-dire

$$P_{\overrightarrow{f}}(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}, \quad \text{avec } \lambda_i \in K.$$

Par définition, le *sous-espace caractéristique de l'endomorphisme* $\overrightarrow{f}$*, relatif à la valeur propre* λ_i, est le noyau de $(\overrightarrow{f} - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})^{m_i}$, noté $N_i(\overrightarrow{f})$. Les sous-espaces $N_i(\overrightarrow{f})$ sont stables par $\overrightarrow{f}$, de dimension m_i, et vérifient :

$$\overrightarrow{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} N_i(\overrightarrow{f}).$$

Un endomorphisme $\overrightarrow{g}$ de $\overrightarrow{E}$ est *nilpotent* s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\overrightarrow{g}^k = 0$. Le *degré de nilpotence* est le plus petit entier p tel que $\overrightarrow{g}^p = 0$.

THÉORÈME 1.2 (DÉCOMPOSITION DE DUNFORD). L'endomorphisme $\overrightarrow{f}$ s'écrit $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{h} + \overrightarrow{g}$, où :

- $\overrightarrow{h}$ est un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ayant pour multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$.
- $\overrightarrow{g}$ est nilpotent de degré de nilpotence inférieur ou égal au maximum des nombres m_i, pour $i = 1, \ldots, p$.
- $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{h} = \overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{g}$.

L'endomorphisme diagonalisable $\overrightarrow{h}$ est défini par $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{v}) = \lambda_i \overrightarrow{v}$, pour tout $\overrightarrow{v} \in N_i(\overrightarrow{f})$, et l'endomorphisme nilpotent $\overrightarrow{g}$ par $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{h}$.

Séquence n° 2

Exercices d'algèbre linéaire élémentaire

Fiche créée par D. TANRÉ pour la formation CAPES Lille I, année 2009-2010.
`http://algmod.free.fr/capes/fiches.html`

2.1 Espaces vectoriels, matrices

1 Déterminer, suivant les valeurs de a, b et c, le rang du système suivant de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{v_1} = (0, c, -b),\ \overrightarrow{v_2} = (-c, 0, a),\ \overrightarrow{v_3} = (b, -a, 0).$$

2 Soit $\overrightarrow{E}$ un K-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer l'égalité suivante, pour tout couple $(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2})$ de sous-espaces vectoriel de $\overrightarrow{E}$,

$$\dim(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}) + \dim(\overrightarrow{E_1} \cap \overrightarrow{E_2}) = \dim(\overrightarrow{E_1}) + \dim(\overrightarrow{E_2}).$$

3 Soit $\mathbb{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel ramené à la base $(1, \mathrm{i})$, de dual

$$\mathbb{C}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R}).$$

1. Déterminer la base duale de $(1, \mathrm{i})$.
2. Soit $u = u_1 + \mathrm{i}u_2$ un nombre complexe *non nul* fixé.
   (a) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = uz$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$. Déterminer sa matrice et son déterminant.
   (b) Soit $A = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(uz) = 0\}$. Déterminer la dimension de A. En donner une base.
   (c) Soit A^o l'orthogonal A, c'est-à-dire le sous-espace de $\mathbb{C}^*$ constitué des formes linéaires qui s'annulent sur A. Déterminer une base de A^o.
   (d) L'espace vectoriel réel $\mathbb{C}^*$ est rapporté à la base duale de $(1, \mathrm{i})$. Déterminer la matrice de la transposée $f^T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ de l'application linéaire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

2.2 Déterminants

4 Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ une matrice $n \times n$, constituée d'une matrice $p \times p$ notée A, d'une matrice $(n-p) \times (n-p)$ notée B et d'une matrice $p \times (n-p)$ notée C. Montrer que $\det M = (\det A)(\det B)$.

5 Soit $(t_1, \ldots, t_n) \in K^n$. Notons $V(t_1, \ldots, t_n)$ le déterminant de la matrice :

$$A(t_1, \ldots, t_n) = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$V(t_1,\dots,t_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(t_j-t_i).$$

6 Déterminer l'inverse de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

2.3 Valeurs propres et vecteurs propres

7 Diagonaliser

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&-5\end{pmatrix}.$$

8 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes et dire si elles sont diagonalisables.

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&1&0\\5&1&3\end{pmatrix}.$$

9 Considérons l'application linéaire $\vec{f}: K^n\to K^n$ définie par $\vec{f}(x_1,\dots,x_n)=(x_2,\dots,x_n,x_1)$.

1. Déterminer la matrice A de $\vec{f}$ relativement à la base canonique de K^n. Calculer le déterminant de A.
2. Dans cette question, nous posons $K=\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres de $\vec{f}$ et leur multiplicité. Quelle conclusion peut-on en tirer sur $\vec{f}$?
3. Dans cette question, nous posons $K=\mathbb{R}$. L'application $\vec{f}$ est-elle triangulable ?

10 Soit $\vec{E}$ un K-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\vec{f}$ et $\vec{g}$ deux endomorphismes de $\vec{E}$, admettant chacun n valeurs propres distinctes deux à deux. Montrer que $\vec{f}$ et $\vec{g}$ commutent si, et seulement si, $\vec{f}$ et $\vec{g}$ ont les mêmes valeurs propres.

11 Soit $\vec{E}$ un K-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\vec{f}$ un endomorphisme de $\vec{E}$. Soit $Q_1,\dots,Q_p$ des polynômes premiers deux à deux dans $K[X]$, de produit $P=Q_1\cdots Q_p$. Montrer que

$$\operatorname{Ker}P(\vec{f})=\bigoplus_{i=1}^{p}\operatorname{Ker}Q_i(\vec{f}).$$

12 Soit $\vec{E}$ un K-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit $\vec{f}$ un endomorphisme de $\vec{E}$ tel que $\vec{f}^2-3\vec{f}+2\,\mathrm{id}_{\vec{E}}=0$. Montrer que $\vec{f}$ est diagonalisable.
2. Soit $\vec{f}$ tel que $\vec{f}^2=\mathrm{id}_{\vec{E}}$. Quelles sont les valeurs propres possibles de $\vec{f}$? Montrer que $\vec{f}$ est diagonalisable.

13 Soit $\vec{E}$ un K-espace vectoriel de dimension finie n. Rappelons qu'un *projecteur* de $\vec{E}$ est une application linéaire $\vec{p}: \vec{E}\to\vec{E}$ telle que $\vec{p}^2=\vec{p}$.

1. Soit $\vec{p}$ un projecteur de $\vec{E}$. Posons $\vec{q}=\mathrm{id}_{\vec{E}}-\vec{p}$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker}\vec{q} = \operatorname{Im}\vec{p}$.

(b) En déduire la décomposition en somme directe : $\vec{E} = \operatorname{Im}\vec{p} \oplus \operatorname{Ker}\vec{p}$.

2. Supposons $\vec{E}$ de dimension finie et soit $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ un endomorphisme de $\vec{E}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\vec{E} = \operatorname{Im}\vec{f} \oplus \operatorname{Ker}\vec{f}$,

(b) $\operatorname{Im}\vec{f} = \operatorname{Im}\vec{f}^2$.

3. Construire une application linéaire $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ telle que $\vec{E} = \operatorname{Im}\vec{f} \oplus \operatorname{Ker}\vec{f}$ et qui ne soit pas un projecteur.

14 Soit $\vec{E}$ un K-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\vec{g}$ un endomorphisme nilpotent de $\vec{E}$, c'est-à-dire qu'il existe k tel que $\vec{g}^k = 0$.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de $\vec{g}$?
2. Soit p le degré de nilpotence de $\vec{g}$, c'est-à-dire $\vec{g}^p = 0$ et $\vec{g}^{p-1} \neq 0$.

(a) Montrer qu'il existe $\vec{v} \in \vec{E}$ tel que $\mathscr{E}_{\vec{v}} = (\vec{g}^{p-1}(\vec{v}), \vec{g}^{p-2}(\vec{v}), \dots, \vec{g}(\vec{v}), \vec{v})$ soit une famille libre.

(b) On note $\vec{W}_{\vec{v}}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{E}_{\vec{v}}$. Écrire la matrice de la restriction de $\vec{g}$ à $\vec{W}_{\vec{v}}$ dans la base $\mathscr{E}_{\vec{v}}$.

(Rappelons l'existence d'une base de $\vec{E}$ dans laquelle la matrice de $\vec{g}$ a ses coefficients nuls sauf, éventuellement, les termes $a_{i,i+1}$ situés au-dessus de la diagonale et qui sont égaux à 0 ou à 1, [**Schw**] pour une preuve).

15 Soit $\vec{E}$ un K-espace vectoriel de dimension n et soit $\vec{f}$ un endomorphisme de $\vec{E}$.

1. Soit I l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(\vec{f}) = 0$. Montrer que I est un idéal de $K[X]$.
2. En déduire l'existence d'un unique polynôme unitaire, $M_{\vec{f}}(X)$, de degré minimum tel que $M_{\vec{f}}(\vec{f}) = 0$. Ce polynôme est appelé *polynôme minimal de* $\vec{f}$.
3. Soit $\vec{g} : \vec{E} \times \vec{E} \to \vec{E} \times \vec{E}$ défini par $\vec{g}(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = (\vec{u_2}, \vec{u_1})$. Déterminer le polynôme minimal de $\vec{g}$. Quel est son polynôme caractéristique ?
4. Démontrer que le polynôme minimal de $\vec{f}$ divise son polynôme caractéristique.
5. Montrer que toute valeur propre de $\vec{f}$ est racine de son polynôme minimal.
6. Montrer que $\vec{f}$ est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé et n'a que des racines simples.
7. Soit A une matrice inversible à coefficients complexes et soit p un entier strictement positif. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A^p est diagonalisable. Donner deux exemples justifiant que le résultat est faux, pour les matrices réelles d'une part, et pour les matrices complexes non inversibles d'autre part.

16 Considérons la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que ses racines et leur multiplicité.
2. Déterminer les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre.
3. Calculer A^2.
4. (a) Déterminer les sous-espaces caractéristiques associés à chaque valeur propre.

(b) En déduire la décomposition de Dunford de A.

17 Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'un endomorphisme $\vec{f}$ de $\vec{E}$ est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ possède un supplémentaire stable par $\vec{f}$.

Séquence n° 3

Espaces euclidiens

Fiche créée par D. Tanré pour la formation CAPES Lille I, année 2009-2010.
`http://algmod.free.fr/capes/fiches.html`

Le corps de référence est le corps des nombres réels, $\mathbb{R}$.

3.1 Formes bilinéaires

Dans cette section, $\overrightarrow{E}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie n, de dual

$$\overrightarrow{E}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R}).$$

3.1.1 Formes bilinéaires

L'ensemble $\mathscr{L}_2(\overrightarrow{E})$ des formes bilinéaires sur $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel de dimension n^2.

Définition 3.1 La matrice A d'une forme bilinéaire B relativement à une base $\mathscr{E} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est la matrice

$$A = (B(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})).$$

Si X et Y sont les matrices colonne des composantes de $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{y} \in \overrightarrow{E}$ respectivement, alors $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = X^T AX$. Si P est la matrice de passage de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{E}'$, alors la matrice A' de la forme bilinéaire B dans la base $\mathscr{E}'$ est donnée par $A' = P^T AP$.

Lorsque l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est rapporté à une base, les matrices servent à représenter des êtres différents comme les formes bilinéaires sur $\overrightarrow{E}$ et les endomorphismes de $\overrightarrow{E}$. Il ne faut jamais perdre de vue ce que représente la matrice et bien remarquer que le comportement à un changement de base de la matrice associée à une forme bilinéaire est différent de celui de la matrice associée à un endomorphisme.

Définition 3.2 (Définitions équivalentes du rang d'une forme bilinéaire).

1. rang de l'application linéaire $\overrightarrow{I} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}^*$, $\overrightarrow{x} \mapsto B(\overrightarrow{x}, \cdot)$,
2. rang de l'application linéaire $\overrightarrow{J} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}^*$, $\overrightarrow{x} \mapsto B(\cdot, \overrightarrow{x})$,
3. rang de la matrice associée à B dans n'importe quelle base $\mathscr{E}$ de $\overrightarrow{E}$.

3.1.2 Formes bilinéaires symétriques

L'ensemble $\mathscr{S}_2(\overrightarrow{E})$ des formes bilinéaires symétriques sur $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Soit $B \in \mathscr{S}_2(\overrightarrow{E})$. Deux éléments $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de $\overrightarrow{E}$ sont *orthogonaux* relativement à B si $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$. L'orthogonal de $\overrightarrow{X} \subset \overrightarrow{E}$ au sens de la forme bilinéaire symétrique B, est

$$X^\perp = \left\{ \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E},\ B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0 \text{ pour tout } \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{X} \right\}.$$

Par définition, le *noyau de B* est l'orthogonal de $\vec{E}$. Il est noté $\vec{N}(B) = \vec{E}^{\perp}$ et vérifie $\dim \vec{N}(B) = \dim \vec{E} - \operatorname{rg} B$. Le forme B est dite *non dégénérée* si l'application linéaire associée $\vec{I}: \vec{E} \to \vec{E}^*$ est un isomorphisme.

THÉORÈME 3.3 Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. la forme B est non dégénérée ;
2. le noyau de B est réduit à $\{\vec{0}\}$;
3. le rang de B est égal à la dimension de $\vec{E}$;
4. la matrice de B dans une base quelconque de $\vec{E}$ est inversible.

THÉORÈME 3.4 Soit B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\vec{E}$. Pour tout $\vec{X} \subset \vec{E}$, on a :

1. $\vec{I}(\vec{X}^{\perp}) = \vec{X}^0$,
2. $\dim \vec{X} + \dim \vec{X}^{\perp} = \dim \vec{E}$, si $\vec{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

En général, si $\vec{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, on n'a pas $\vec{X} \oplus \vec{X}^{\perp} = \vec{E}$ même pour une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Par *exemple*, la forme bilinéaire B définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

a les propriétés suivantes :

— elle est non dégénérée ;

— le sous-espace $\vec{X} = \{(x_1, x_2),\ x_1 = x_2\}$ vérifie $\vec{X} = \vec{X}^{\perp}$ donc l'intersection $\vec{X} \cap \vec{X}^{\perp}$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$.

Un sous-espace vectoirel $\vec{X}$ est dit *non isotrope* si $\vec{X} \cap \vec{X}^{\perp} = \{\vec{0}\}$. Si B est non dégénérée et si $\vec{X}$ est un sous-espace vectoriel non isotrope de $\vec{E}$ alors $\vec{X} \oplus \vec{X}^{\perp} = \vec{E}$.

Un vecteur $\vec{x} \in \vec{E}$ est dit *isotrope* si $B(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes pour B est un cône, noté $\vec{\Gamma}(B)$. La forme bilinéaire symétrique B est dite *définie* si $\vec{\Gamma}(B) = \{\vec{0}\}$.

On a toujours $\vec{N}(B) \subset \vec{\Gamma}(B)$. Ainsi, une forme bilinéaire définie est non dégénérée. La réciproque est fausse en général comme le montre l'exemple ci-dessus.

La forme bilinéaire symétrique B est dite *positive* si $B(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$.

THÉORÈME 3.5 (INÉGALITÉ DE SCHWARZ). Toute forme bilinéaire symétrique positive, B, vérifie

$$B(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq B(\vec{x}, \vec{x}) B(\vec{y}, \vec{y}),$$

pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, et tout $\vec{y} \in \vec{E}$.

THÉORÈME 3.6 Si la forme bilinéaire symétrique B est positive, on a $\vec{\Gamma}(B) = \vec{N}(B)$. Pour une forme bilinéaire symétrique, il y a donc équivalence entre *non dégénérée positive* et *définie positive*.

3.2 Formes quadratiques

3.2.1 Généralités

Dans cette section, $\vec{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie n, de dual

$$\vec{E}^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{E}, \mathbb{R}).$$

Une application $Q: \vec{E} \to \mathbb{R}$ est une *forme quadratique* s'il existe une forme bilinéaire symétrique B sur $\vec{E}$ telle que $Q(\vec{x}) = B(\vec{x}, \vec{x})$, pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$. La forme bilinéaire B est appelée *forme polaire* associée à Q. Elle est déterminée par :

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})).$$

Le carré d'une forme linéaire est une forme quadratique.

Une fonction $f: \vec{E} \to \mathbb{R}$ est dite *polynomiale* s'il existe une base $\mathscr{E} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ de $\vec{E}$ et un polynôme P de n variables, à coefficients réels, pour lesquels on ait $f(\vec{x}) = P(x_1, \ldots, x_n)$, pour tout $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i} \in \vec{E}$. Le degré du polynôme P, ainsi que le fait qu'il soit homogène, sont des propriétés indépendantes du choix de la base $\mathscr{E}$.

THÉORÈME 3.7 Les formes quadratiques sur l'espace vectoriel $\vec{E}$ sont les fonctions polynomiales homogènes de degré 2 sur $\vec{E}$.

Considérons une base, $\mathscr{E} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$, de $\vec{E}$ ainsi que deux éléments de $\vec{E}$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e_i}$ et $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e_i}$. Alors, si

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i),$$

on a :

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

Les définitions de rang, noyau, orthogonal, matrice... d'une forme quadratique sont celles de la forme polaire associée.

3.2.2 Réduction de Gauss

Dans ce paragraphe, Q est une forme quadratique sur $\vec{E}$, de forme polaire associée B.

Une base $\mathscr{E} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ de $\vec{E}$ est dite *orthogonale* si on a $B(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = 0$, pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$. Une base *orthonormale* est une base orthogonale telle que $B(\vec{e_i}, \vec{e_i}) = 1$, pour tout i.

Si $\mathscr{E} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ est une base orthonormale de $\vec{E}$, on a $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x_i}, \vec{e_i} \rangle \vec{e_i}$, pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$.

THÉORÈME 3.8 Pour toute forme quadratique Q sur $\vec{E}$, il existe n formes linéaires indépendants $l_1, \ldots, l_n$ et n constantes réelles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ telles que

$$Q(\vec{x}) = \alpha_1 (l_i(\vec{x}))^2 + \cdots + \alpha_n (l_n(\vec{x}))^2,$$

pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$.

THÉORÈME 3.9 Pour toute forme quadratique Q sur $\vec{E}$, il existe une base $\mathscr{E} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ de $\vec{E}$ dans laquelle la forme quadratique Q s'écrit :

$$Q(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

pour tout $\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \cdots + x_n \vec{e_n} \in \vec{E}$. La base $\mathscr{E}$ est donc une *base orthogonale* pour Q.

THÉORÈME 3.10 (LOI D'INERTIE DE SYLVESTER). Pour toute forme quadratique Q, de rang r sur $\vec{E}$, il existe un entier p ne dépendant que de Q et une base $\mathscr{E} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ de $\vec{E}$ dans laquelle la forme quadratique Q s'écrit :

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2,$$

pour tout $\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \cdots + x_n \vec{e_n} \in \vec{E}$.

Définition 3.11 Le couple $(p, r - p)$ est appelée *signature de la forme quadratique* Q.

Corollaire 3.12 La forme quadratique Q est *définie positive* si, et seulement si, elle a pour signature $(n, 0)$.

3.3 Espaces euclidiens

Un *produit scalaire sur* $\vec{E}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Un *espace (vectoriel) euclidien* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dans cette section, $(\vec{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension finie n et de *norme euclidienne* associée définie par $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$, si $\vec{x} \in \vec{E}$.

3.3.1 Généralités

Si $\vec{X}$ est un sous-espace vectoriel de $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, il vérifie $(\vec{X}^{\perp})^{\perp} = \vec{X}$ et $\vec{X} \oplus \vec{X}^{\perp} = \vec{E}$.

THÉORÈME 3.13 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ). Pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$ et tout $\vec{y} \in \vec{E}$, on a

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| .$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.

THÉORÈME 3.14 (THÉORÈME DE PYTHAGORE). Les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 .$$

Définition 3.15 (Distance d'un point à un hyperplan). Soit $\vec{H}$ un hyperplan et soit $\vec{a} \in \vec{H}^{\perp}$, $\vec{a} \neq 0$. Pour tout $\vec{y} \in \vec{E}$, on a :

$$d(\vec{y}, \vec{H}) = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{y} \rangle|}{\|\vec{a}\|} .$$

Tout espace vectoriel euclidien de dimension n est isométrique à $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 3.16 (ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT). Si $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ est une base quelconque de $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, il existe une unique base orthonormale $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n})$ de $\vec{E}$ vérifiant :

1. pour tout $i = 1, \ldots, n$, les sous-espaces engendrés par $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_i})$ et $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_i})$ coïncident ;
2. pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\langle \vec{e_i}, \vec{v_i} \rangle > 0$.

3.3.2 Endomorphismes symétriques

THÉORÈME 3.17 Si B est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace euclidien $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, il existe un unique endomorphisme $\vec{u_B}$ de $\vec{E}$ tel que

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{u_B}(\vec{x}), \vec{y} \rangle ,$$

pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$ et tout $\vec{y} \in \vec{E}$.

Un endomorphisme $\vec{u}$ de $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est *symétrique* si on a $\langle \vec{u}(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{u}(\vec{y}) \rangle$ pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in \vec{E} \times \vec{E}$.

THÉORÈME 3.18 L'endomorphisme $\vec{u}$ est symétrique si, et seulement si, il existe une forme bilinéaire symétrique B telle que $\vec{u} = \vec{u_B}$.

Un endomorphisme de $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une base *orthonormale* est symétrique. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux deux à deux.

THÉORÈME 3.19 (THÉORÈME SPECTRALE). Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

En conséquence, toute matrice réelle symétrique est diagonalisable avec une matrice de passage P vérifiant $P^T P = I$.

THÉORÈME 3.20 Si B est une forme bilinéaire symétrique sur $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, il existe une base orthogonale pour B.

Si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel $\vec{F}$, on définit *l'affinité* de base $\vec{X}$, de direction $\vec{Y}$ et de rapport λ par $\vec{v}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + \lambda \vec{y}$. Lorsque $\vec{F}$ est euclidien et $\vec{Y} = \vec{X}^{\perp}$, on parle d'*affinité orthogonale de base $\vec{X}$ et de rapport λ*.

THÉORÈME 3.21 Tout endomorphisme symétrique de $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est le produit d'au plus n affités orthogonales.

3.4 Produit vectoriel

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, rapport à sa base canonique $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, est muni du produit scalaire $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Rappelons que le *déterminant*, det: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est l'unique 3-forme linéaire alternée de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ telle que $\det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 1$.

Définition 3.22 Le *produit vectoriel* de deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ de $\mathbb{R}^3$ est l'unique vecteur $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w} \rangle$, pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$.

Si $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ sont les composantes de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ dans la base $\mathscr{B}$, le produit vectoriel $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ a pour composantes dans cette même base :

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

PROPOSITION 3.23 Pour tout triplet, $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$, de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et tout nombre λ, on a les propriétés suivantes :

1. $\overrightarrow{v_1} \wedge (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_3}$.
2. $\lambda(\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}) = \lambda \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1} \wedge \lambda \overrightarrow{v_2}$.
3. $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$.
4. Si les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont linéairement indépendants, le vecteur $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ est orthogonal au plan contenant $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
5. Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont liés si, et seulement si, $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$.
6. Si les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont linéairement indépendants, alors $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2})$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$.

THÉORÈME 3.24 Pour tout triplet, $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$, de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, le produit vectoriel les égalités suivantes.

1. $\overrightarrow{v_1} \wedge (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3} \rangle \overrightarrow{v_2} - \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \overrightarrow{v_3}$, appelée *identité de Lagrange ou formule du double produit vectoriel.*
2. $\overrightarrow{v_1} \wedge (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) + \overrightarrow{v_2} \wedge (\overrightarrow{v_3} \wedge \overrightarrow{v_1}) + \overrightarrow{v_3} \wedge (\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0}$, appelée *identité de Jacobi.*
3. $\|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\|^2 = \|\overrightarrow{v_1}\|^2 \|\overrightarrow{v_2}\|^2 - \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^2$.

PROPOSITION 3.25 Pour tout couple, $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, de vecteurs linéairement indépendants, on a $\|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\| = \|\overrightarrow{v_1}\| \|\overrightarrow{v_2}\| \sin\theta$, où $\theta \in [0, \pi]$ est défini par $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = \|\overrightarrow{v_1}\| \|\overrightarrow{v_2}\| \cos\theta$. La norme $\|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\|$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

3.5 Compléments

Pour terminer, signalons que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ peut être muni d'une loi de composition interne de la façon suivante : « chaque élément de $\mathbb{R}^4$ pouvant s'écrire comme un couple $(x, \overrightarrow{u})$ d'un nombre réel x et d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$(x, \overrightarrow{u})(y, \overrightarrow{v}) = (xy - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle, x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).$$

L'espace $\mathbb{R}^4$, muni de cette loi interne, est un corps non commutatif. La formule du double produit vectoriel (cf. théorème 3.24) permet d'établir l'associativité de cette loi.

L'existence de cette structure de corps et le lien avec les groupes orthogonaux **SO**(3) et **SO**(4) sont l'objet de la deuxième composition de Mathématiques du C.A.P.E.S. de 1984.

Séquence n° 4

Exercices sur les espaces euclidiens

Fiche créée par D. TANRÉ pour la formation CAPES Lille I, année 2009-2010.
`http://algmod.free.fr/capes/fiches.html`

1 Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$f_1(x,y,z) = x+y,$$
$$f_2(x,y,z) = x+2z,$$
$$f_3(x,y,z) = y-z.$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base dual $(\mathbb{R}^3)^*$ de $\mathbb{R}^3$. trouver la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{3})$ de $\mathbb{R}^3$ dont (f_1, f_2, f_3) est la duale.

2 Illustrer le théorème 3.8, 3.9 et 3.10 avec les formes quadratiques suivantes définies sur $\overrightarrow{E} = \mathbb{R}^3$, rapporté à sa base canonique.

1. $Q(\overrightarrow{v}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2$,
2. $Q(\overrightarrow{v}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
3. $Q(\overrightarrow{v}) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$. Déterminer son noyau $\overrightarrow{N}$. Soit $\overrightarrow{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{"}$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{e} = (1,1,1)$. Déterminer les sous-espaces orthogonaux $\overrightarrow{F}^{\perp}$ et $(\overrightarrow{F}^{\perp})^{\perp}$. Comparer $\overrightarrow{F}$ et $(\overrightarrow{F}^{\perp})^{\perp}$.

Dans le cas général d'une forme dégénérée Q de noyau $\overrightarrow{N}$, on peut montrer (cf. [**LirZis**]) le résultat suivant : *soit $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}'$ un supplémentaire de $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{N}$ dans $\overrightarrow{N}$, alors $(\overrightarrow{F}^{\perp})^{\perp} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{F}'$.*

3 Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux bases suivantes de $\mathbb{R}^3$:

1. $\overrightarrow{e_1} = (2,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (2,2,0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (2,2,2)$,
2. $\overrightarrow{f_1} = (2,2,0)$, $\overrightarrow{f_2} = (2,0,0)$ et $\overrightarrow{f_3} = (2,2,2)$.

4 C.A.P.E.S. 1995

Cet exercice est extrait de la deuxième composition de Mathématiques de C.A.P.E.S. de 1995. L'espace Rr^n sera muni de sa structure canonique d'espace euclidien, sa base canonique sera notée $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et la norme euclidienne d'un élément $\overrightarrow{x}$ sera notée $\|\overrightarrow{x}\|$. Relativement à une base fixée, un élément $\overrightarrow{x}$ (resp. $\overrightarrow{y}$, etc.) de $\mathbb{R}$ sera représenté par la matrice colonne X (resp. Y, etc.) de ses coordonnées x_i (resp. y_i, etc.).

À toute matrice symétrique réelle A, de terme général a_{ij}, on associera la forme bilinéaire symétrique Φ_A définie sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, rapporté à sa base canonique $\mathscr{B}$, par :

$$\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \Phi_A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = X^T AX = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} a_{ij}x_iy_i.$$

On notera Q_A la forme quadratique associée à Φ_A. Dans l'algèbre des matrices carrés réelles à n lignes et n colonnes, on notera $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques A telles que la forme quadratique Q_A soit définie positive.

1. **Existence d'une décomposition**

(a) Démontrer qu'une matrice A appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une matrice inversible M telle que $A = M^T M$ (On pourra diagonaliser A pour établir la condition nécessaire).

(b) Soit $\mathscr{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ la famille des vecteurs-colonnes d'une matrice inversible M. Justifier que $\mathscr{V}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{W} = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n})$ la base orthonormale obtenue par application à la base $\mathscr{V}$ du procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Démontrer que la matrice de passage T de la base $\mathscr{W}$ à la base $\mathscr{V}$ est triangulaire supérieure.

(c) Déduire de ce qui précède que toute matrice A appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $T^T T$ avec T une matrice triangulaire supérieure inversible.

2. **Algorithme de décomposition**

L'espace $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa sa base canonique. Soit A un élément de $S_n(\mathbb{R})$ de terme général a_{ij}.

(a) Démontrer qu'il est équivalent de trouver une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que $A = T^T T$ et de trouver une écriture de la forme quadratique Q_A de la forme :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad Q_A(\vec{x}) = \sum_{1 \le i \le n} \left(\sum_{1 \le j \le n} t_{ij} x_j \right)^2$$

avec $t_{ii} > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(b) Pour $n \ge 2$ on identifie $\mathbb{R}^n$ avec le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et on note $\tilde{\vec{x}}$ la projection sur $\mathbb{R}^{n-1}$ d'un élément $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que, si $a_{11} > 0$ et si on pose

$$t_{ij} = \frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}, \text{ pour } j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

il existe une unique matrice $\tilde{A}$ élément de $S_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad Q_A(\vec{x}) = \left(\sum_{1 \le j \le n} t_{ij} x_j \right)^2 + Q_{\tilde{A}}(\tilde{\vec{x}}).$$

Démontrer que, si A appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\tilde{A}$ existe et appartient à $S_{n+1}^+(\mathbb{R})$.

(c) On considère l'alogirthme suivant :

```
Entrées : Matrice A
;
initialisation A_1 := A ;
début
    for k = 1,...,n-1 do
        si le terme de la première ligne, première colonne, de A_k est strictement positif, alors
            A_{k+1} := Ã_k
```

Algorithme 1 : Algorithme de décomposition

Démontrer que A appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, l'algorithme s'arrête pour $k = n$ (dans le sens où il n'effectue plus la condition) avec l'unique terme de A_n strictement positif. Démontrer qu'on a alors déterminé une décomposition $A = T^T T$ avec T triangulaire supérieure.

5 DISTANCES À UNE DROITE ET À UN PLAN DANS L'ESPACE (AFFINE) $\mathbb{R}^3$

1. Soit (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Montrer que la distance d'un point M à la droite (Δ) est donnée par :

$$d(M, \Delta) = \frac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\vec{u}}.$$

Si la droite Δ a pour équation $ax + by + c = 0$ et le point M a pour coordonnées (x_M, y_M) dans un plan muni d'un repère orthonormé, retrouver la formule :

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$. Montrer que la distance d'un point M au plan $\mathscr{P}$ est donnée par :
$$d(M,\mathscr{P}) = \frac{\left|\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})\right|}{\|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\|}.$$
Si le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$ et le point M pour coordonneés (x_M, y_M, z_M), retrouver la formule :
$$d(M,\mathscr{P}) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

6 DÉTERMINANTS DE GRAM

La première question est extraite de la deuxième composition de Mathématiques de C.A.P.E.S. de 1993. La *matrice de Gram* d'une famille $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ de vecteurs d'un espace euclidien $\overrightarrow{E}$ de dimension finie est la matrice de terme général $(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j})$. Elle est noté $\mathscr{G}ram(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$. Le *déterminant de Gramm* est le déterminant de cette matrice ; il est noté $\mathrm{Gram}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$.

1. Dans cette questions, nous choissisons $\overrightarrow{E} = \mathbb{R}^3$. Soit $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + x_3\overrightarrow{v_3}$, nous notons X la matrice colonne constituée des x_i.
   (a) Démontrer les égalités matricelles :
      i. $\mathscr{G}ram(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})X = \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v} \rangle \\ \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v} \rangle \\ \langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v} \rangle \end{pmatrix}$
      ii. $X^T \mathscr{G}ram(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})X = \|\overrightarrow{v}\|^2$.
   (b) En déduire que $\mathscr{G}ram(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si, et seulement si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
   (c) Montrer que $\mathscr{G}ram(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est inversible si, et seulement si, la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est libre.
   (d) Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Établir les égalités :
      i. $\left|\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})\right| = \sqrt{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})}$.
      ii. $\|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\| = \sqrt{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})}$.
2. Le but de cette question est de généraliser à un espace euclidien $\overrightarrow{E}$, de dimension finie n,n les principaux résultats établis dans la première question.
   (a) Montrer que $\mathrm{Gram}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}) = 0$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{v_i} \in \overrightarrow{E}$ sont liés.
   (b) Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m})$ de $\overrightarrow{E}$. On décompose $\overrightarrow{v}$ suivant la somme directe $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{F}^\perp$ en $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{v}'' \in \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{F}^\perp$. Montrer que $\mathrm{Gram}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}) = \|\overrightarrow{v}''\|^2 \mathrm{Gram}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m})$.
   (c) Soit $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ des vecteurs de $\overrightarrow{E}$. On rapporte $\overrightarrow{E}$ à une base orthonormale $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et on note $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ l'application linéaire définie par $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{v_i}$. Montrer que
$$\sqrt{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})} = \left|\det(\overrightarrow{f})\right|.$$

Séquence n° 5

Coniques

Fiche créée par D. Tanré pour la formation CAPES Lille I, année 2009-2010.
`http://algmod.free.fr/capes/fiches.html`

5.1 Définition géométrique

Considérons une droite (D) et un point $F \notin (D)$. L'ensemble $(\mathscr{P})$ des centres M des cercles tangents à la droite (D) et passant par (F) est une *parabole*. En notant H la projection orthogonale du point M sur la droite (D), nous avons donc $MH = MF$ si et seulement $M \in (\mathscr{P})$. Une parabole est ainsi l'ensemble des points M à égale distance du point F et de la droite (D). La droite (D) est appelée la *directrice* et le point F le *foyer* de la parabole.

Considérons maintenant un cercle $(\mathscr{C}')$, de centre F' et de rayon $2a$, ainsi qu'un point $F \notin (\mathscr{C}')$. L'ensemble (Γ) des centres M des cercles $(\mathscr{C}_M)$ passant par le point F et tangents au cercle $(\mathscr{C}')$ est appelé *conique à centre*. Si le point F est extérieur (resp. intérieur) au cercle $(\mathscr{C}')$, la conique est appelée *hyperbole* (resp. *ellipse*). Notons $2c$ la longueur du segment $[FF']$; la quantité $e = c/a$ est l'*excentricité* de la conique. Elle est strictement supérieure à 1 dans le cas d'une hyperbole et strictement inférieure à 1 dans le cas d'une ellipse. Le cercle $(\mathscr{C}')$ est appelé *cercle directeur* de la conique (Γ) ; les points F et F' sont les *foyers* et la droite (FF') l'*axe focal*. L'*axe non focal* est la droite perpendiculaire à (FF') passant par le milieu O du segment $[FF']$.

Théorème 5.1 Soit (Γ) une conique à centre, de centre directeur $(\mathscr{C}')$, de foyer F et d'excentricité e, nous notons (D) l'axe radical du cercle $(\mathscr{C}')$ et du cercle-point F. Alors la conique (Γ) est l'ensemble des points M tels que

$$\frac{MF}{MH} = e,$$

où H est la projection orthogonale de M sur la droite (D).

La conique (Γ) est donc caractérisée par la droite (D), le point F et le nombre réel positif e. La droite (D) est appelée *directrice* de (Γ) et, par définition, le cas $e = 1$ correspond à la parabole.

Notons λ la distance du foyer F à la directrice (D) et $p = e\lambda$. Soit $|\rho|$ la distance de F à un point M de la conique (Γ), l'égalité $MF = eMH$ équivaut à

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

qui est l'équation polaire (Γ), avec les conventions usuelles de notation.

Si (Γ) est une conique de foyer F et de directrice (D), la tangente à (Γ) en un point $M \in (\Gamma)$, non situé sur l'axe focal, coupe la directrice (D) en un point M' tel que les droites (MF) et $(M'F)$ soient orthogonales.

5.2 Ellipse

Dans cette section, nous considérons une ellipse (Γ) définie par le cercle $(\mathscr{C}')$, de centre F' et de rayon $2a$, et par le point $F \notin (\mathscr{C}')$, intérieur au cercle directeur $(\mathscr{C}')$. Notons $2c$ la longueur FF', $e = c/a < 1$ l'excentricité, (D) la directrice de (Γ) et O le milieu du segment $[FF']$.

THÉORÈME 5.2 L'ellipse associée au cercle directeur $(\mathscr{C}')$ et au foyer F est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$.

Notons H_1 et H_2 les deux points du cercle $(\mathscr{C}')$ situés sur l'axe focal ainsi que A (resp. A') le milieu du segment $[FH_1]$ (resp. $[FH_2]$). L'ellipse (Γ) coupe l'axe focal aux deux points A et A', symétriques par rapport au milieu O du segment $[FF']$ et extérieurs à ce segment. Le cercle de diamètre $[AA']$ est appelé *cercle principal* de (Γ). Il est l'image du cercle directeur $(\mathscr{C}')$ par l'homothétie de centre F et de rapport $1/2$.

THÉORÈME 5.3 L'ellipse associée au cercle directeur $(\mathscr{C}')$ et au foyer F est l'image du cercle principal par l'affinité orthogonale d'axe la droite (FF') et de rapport b/a.

L'ellipse (Γ) coupe l'axe non focal en deux points B et B', symétriques par rapport au milieu O de $[FF']$. Notons b la longueur du segment OB ; nous avons $a^2 = b^2 + c^2$.

PROPOSITION 5.4 Soit (Δ) une droite quelconque du plan. Notons F_1 le symétrique de F par rapport à la droite (Δ). Alors :

— si F_1 est à l'intérieur du cercle $(\mathscr{C}')$, la droite (Δ) coupe l'ellipse (Γ) en deux points,

— si $F_1 \in (\mathscr{C}')$, la droite (Δ) coupe l'ellipse (Γ) en un seul point,

— si F_1 est à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C}')$, l'intersection de la droite (Δ) et de l'ellipse (Γ) est vide.

Choisissons un repère orthonormé du plan, où O est le milieu du segment $[FF']$, $\vec{e_1}$ (resp. $\vec{e_2}$) un vecteur directeur unitaire de l'axe focal (resp. de l'axe non focal).

THÉORÈME 5.5 Dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, l'ellipse (Γ) est l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soit M un point de l'ellipse (Γ), notons H le point de contact du cercle de centre M et de rayon MF avec le cercle directeur $(\mathscr{C}')$. La *tangente* en M à (Γ) est la médiatrice du segment $[FH]$. C'est aussi la perpendiculaire en M à la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

5.3 Hyperbole

Dans cette section, nous considérons une hyperbole (Γ) définie par le cercle $(\mathscr{C}')$, de centre F' et de rayon $2a$, et par le point $F \notin (\mathscr{C}')$, extérieur au cercle directeur $(\mathscr{C}')$. Notons $2c$ la longueur FF', $e = c/a > 1$ l'excentricité, (D) la directrice de (Γ) et O le milieu du segment $[FF']$.

THÉORÈME 5.6 L'hyperbole associée au cercle directeur $(\mathscr{C}')$ et au foyer F est l'ensemble des points M tels que $\left|MF - MF'\right| = 2a$.

Notons H_1 et H_2 les deux points du cercle $(\mathscr{C}')$ situés sur l'axe focal ainsi que A (resp. A') le milieu du segment $[FH_1]$ (resp. $[FH_2]$). L'hyperbole (Γ) coupe l'axe focal aux deux points A et A', symétriques par rapport au milieu O du segment $[FF']$ et appartenant à ce segment. Le cercle de diamètre $[AA']$ est appelé *cercle principal* de (Γ). Il est l'image du cercle directeur $(\mathscr{C}')$ par l'homothétie de centre F et de rapport $1/2$.

L'intersection de l'hyperbole et de l'axe focal est vide. Par analogie avec le cas de l'ellipse, nous introduisons le nombre réel positif b défini par $a^2 + b^2 = c^2$.

Le point F étant situé à l'extérieur du cercle directeur $(\mathscr{C}')$, on peut tracer les deux tangentes à $(\mathscr{C}')$ issues de F ; notons K_1 et K_2 leur point de contact avec $(\mathscr{C}')$. Il est facile de constater qu'il n'existe pas de cercle passant par F et tangent à $(\mathscr{C}')$ en K_1 ou en K_2. Les droites (FK_1) et (FK_2) sont tangentes au cercle principal ; notons K_1' et K_2' les points de contact respectifs. Les droites (OK_1') et (OK_2') sont les *asymptotes* de l'hyperbole (Γ).

Choisissons un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ du plan, où O est le milieu du segment $[FF']$, $\vec{e_1}$ (resp. $\vec{e_2}$) un vecteur directeur unitaire de l'axe focal (resp. de l'axe non focal).

THÉORÈME 5.7 Dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, l'hyperbole (Γ) est l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (x, y)

vérifiant :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Choisissons comme repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs unitaires des asymptotes.

THÉORÈME 5.8 Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'hyperbole (Γ) est l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (X, Y) vérifiant $4XY = c^2$.

Soit M un point de l'hyperbole (Γ), notons H le point de contact du cercle de centre M et de rayon MF avec le cercle directeur $(\mathscr{C}')$. La *tangente* en M à (Γ) est la médiatrice du segment $[FH]$ et la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

5.4 Parabole

Dans cette section, nous considérons une parabole $(\mathscr{P})$ définie par la droite (D) et par le point $F \notin (D)$. Notons H_F la projection orthogonale de F sur (D) et p la longueur du segment $[H_F F]$.

Choisissons comme repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, où O est le milieu du segment $[H_F F]$, $\vec{e_1}$ (resp. $\vec{e_2}$) est un vecteur directeur unitaire de la droite $(H_F F)$ (resp. la droite perpendiculaire à $(H_F F)$).

THÉORÈME 5.9 Dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, la parabole $(\mathscr{P})$ est l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (x, y) vérifiant $y^2 = 2px$.

Soit M un point d'une parabole $(\mathscr{P})$, notons H la projection orthogonale de M sur la directrice. La *tangente* en M à $(\mathscr{P})$ est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MH})$ et la médiatrice du segment $[FH]$.

5.5 Sections d'un cône

Considérons un cône de révolution $(\mathscr{C})$, de sommet S, d'axe (Sz) et d'angle au sommet $2\alpha \in [0, \pi[$. Coupons le cône $(\mathscr{C})$ par un plan (Π) faisant avec l'axe (Oz) un angle (aigu) θ.

THÉORÈME 5.10 Supposons $S \notin (\Pi)$ et notons (Γ) l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de (Π). La courbe (Γ) est une conique. Plus précisément, l'intersection du cône $(\mathscr{C})$ et du plan (Π) est
- une ellipse si $\theta > \alpha$,
- une parabole si $\theta = \alpha$,
- une hyperbole si $\theta < \alpha$.

Si $S \in (\Pi)$, il est facile de voir que l'intersection du cône $(\mathscr{C})$ et du plan (Π) est
- constituée de deux génératrices du cône si $\theta < \alpha$,
- une génératrice du cône si $\theta = \alpha$,
- réduite au point S si $\theta > \alpha$.

5.6 Courbes algébriques de degré 2

5.6.1 Classification affine réelle

Soit Π le plan affine réel muni d'un repère affine.

Définition 5.11 On appelle *conique* l'ensemble (Γ) des points M, de coordonnées (x, y) telles que $\varphi(x, y) = 0$ où φ est un polynôme réel, non nul, du second degré, c'est-à-dire :

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

Considérons la *matrice associée à la conique* Γ :

$$M(\Gamma) = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Cette matrice $M(\Gamma)$, étant symétrique réelle, admet 3 valeurs propres réelles. Si k (resp. l) désigne le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. négatives), la somme $r = k + l$ est le rang de la matrice $M(\Gamma)$. La loi d'inertie de Sylvester nous dit que le couple (k, l) ne dépend pas du repère choisi. L'ensemble (Γ) étant également obtenu à partir du polynôme $-\varphi$, seule la paire $\{k, l\}$ est une constante de (Γ) indépendante du repère choisi ; on l'appelle *signature* de la conique (Γ).

L'introduction précédente peut aussi être menée sans référence à un repère affine. Soit O un point du plan (Π). Un polynôme φ de degré 2 est donné par

$$\varphi(M) = q(\overrightarrow{OM}) + l(\overrightarrow{OM}) + c,$$

où q est une forme quadratique non nulle, l une forme linéaire et c une constante. Un calcul montre que la forme quadratique q n'est pas modifiée si on change de point de référence O. La conique (Γ) est alors définie comme l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = 0$.

La seule étude de la forme quadratique $q(x, y) = ax^2+2bxy+cy^2$ est insuffisante pour rendre compte de la nature de la conique. En effet, nous constatons que :

— l'équation $xy = 0$ correspond à deux droites avec une forme quadratique q non dégénérée,
— l'équation $x^2 = 0$ correspond à une droie avec une forme quadratique q dégénérée,
— l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ correspond à un cercle avec une forme quadratique q non dégénérée,
— l'équation $x^2 - y = 0$ correspond à une parabole avec une forme quadratique q dégénérée.

Pour étudier la conique (Γ), nous homogénéisons donc le polynôme $\varphi(M) = q(\overrightarrow{OM})+l(\overrightarrow{OM})+c$ en $Q(M, t) = q(\overrightarrow{OM})+ l(\overrightarrow{OM})t + ct^2$. Par définition, la conique associée à φ est *propre* si la quadrique $Q(M, t)$ est non dégénérée dans $\Pi\times\mathbb{R}$. Cette définition ne dépend pas du choix du point O ; elle prend tout son sens dans l'espace projectif associé au plan affine, cf. [1, Page 200].

Dans la pratique, nous procédons ainsi. Soit $\Delta(\Gamma)$ le déterminant de la matrice $M(\Gamma)$ et $\Delta_0(\Gamma)$ la quantité, $\Delta_0(\Gamma) = ac - b^2$.

1. Si $r = 3$, le déterminant $\Delta(\Gamma)$ est non nul et la *conique* (Γ) *est propre ou non dégénérée.*
   (a) Si $\Delta_0(\Gamma) > 0$, la conique (Γ) est une ellipse. Elle a des points réels si sa signature est $\{2, 1\}$ et n'admet pas de points réels si sa signature est $\{3, 0\}$.
   (b) Si $\Delta_0(\Gamma) = 0$, la conique (Γ) est une parabole.
   (c) Si $\Delta_0(\Gamma) < 0$, la conique (Γ) est une hyperbole.
2. Si $r = 2$, nous avons $\Delta(\Gamma) = 0$ et la *conique est dégénérée.*
   (a) Si $\Delta_0(\Gamma) > 0$, la conique (Γ) est décomposée en deux droites imaginaires concourantes et conjuguées. Elle n'a qu'un seul point réel, le point d'intersection des deux droites.
   (b) Si $\Delta_0(\Gamma) = 0$, la conique (Γ) est constituée de deux droites distinctes et parallèles. Les droites sont réelles si la signature est $\{1, 1\}$ et imaginaires si la signature est $\{2, 0\}$.
   (c) Si $\Delta_0(\Gamma) < 0$, la conique (Γ) est constituée de deux droites réelles concourantes.
3. Si $r = 1$, nous avons $\Delta(\Gamma) = \Delta_0(\Gamma) = 0$. La conique (Γ) est une droite réelle.

5.6.2 Détermination des centres et des axes

Soit Π le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Nous supposons maintenant que la conique (Γ) associée au polynôme φ est *non dégénérée.*

Détermination d'un centre éventuel Supposons que la conique (Γ) admette un centre de symétrie Ω de coordonnées (x_0, y_0) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Remarquons que l'équation de (Γ) dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ n'a pas de termes de degré impair, donc pas de terme du premier degré. Ainsi, s'il existe, le centre Ω a pour coordonnées les solutions du système

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0 \\ bx_0 + cy_0 + e = 0 \end{cases}.$$

En résumé, si $\Delta_0(\Gamma) = ac - b^2 \neq 0$, la conique (Γ) admet un centre. Si $\Delta_0(\Gamma) = 0$, la conique est une parabole comme nous l'avons déjà écrit.

Détermination des directions asymptotiques éventuelles Les pentes des directions asymptotiques sont les racines de l'équation

$$cm^2 + 2bm + a = 0.$$

1. Si $\Delta_0(\Gamma) = ac - b^2 < 0$, la courbe (Γ) admet deux directions asymptotiques. Rappelons que, dans ce cas, (Γ) est une hyperbole.
2. Si $\Delta_0(\Gamma) = ac - b^2 = 0$, la courbe (Γ) a une seule direction asymptotique. Rappelons que, dans ce cas, (Γ) est une parabole.
3. Si $\Delta_0(\Gamma) = ac - b^2 > 0$, la courbe (Γ) n'a pas de direction asymptotique. Rappelons que, dans ce cas, (Γ) est une ellipse.

Détermination de l'équation réduite de la conique à partir de la forme quadratique $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ **associée** φ Notons $M(q) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ la matrice associée. S'agissant d'une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs propres. Dans cette nouvelle base, la forme quadratique q s'écrit

$$q(X, Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2.$$

1. Si $\Delta_0(\Gamma) = 0$, la conique est une parabole. Les valeurs propres de la matrice sont $(a + c)$ et 0. Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique (Γ) devient

$$(a + c)X^2 + 2d'X + 2e'Y + f' = 0.$$

   Il existe un repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$, obtenu par translation du précédent, dans lequel l'équation de la conique (Γ) est $Y'^2 = 2pX'$.
2. Si $\Delta_0(\Gamma) \neq 0$, la conique est une ellipse (cas où $\Delta_0(\Gamma) > 0$) ou une hyperbole (cas où $\Delta_0(\Gamma) < 0$). Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de la conique (Γ) devient :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2d'X + 2e'Y + f' = 0.$$

   En faisant une translation du repère au centre de la conique, l'équation de (Γ) devient $\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 = f''$.

Équation de la tangente en un point A d'une conique Si

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

est l'équation de la conique (Γ) dans un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ quelconque, l'équation de la tangente en un point $A = (x_0, y_0) \in (\Gamma)$ est

$$(ax_0 + by_0 + d)(x - x_0) + (cy_0 + bx_0 + e)(y - y_0) = 0.$$

Ce bref résumé des définitions et propriétés des coniques peut être complété par [1], [2], [3] et [4].

Références pour la séquence n° 5

[1] M. Audin. *Geometry*. Springer-Verlag. 2003.

[2] M. Berger. *Géométrie, Vol 4 - Formes quadratiques, coniques et quadratiques.* CEDIC, Paris. 1977.

[3] V. Deltheil & D. Caire. *Géométrie et Compléments de géométrie.* Réimpression Gabay. 1951.

[4] V. Lespinard & R. Pernet. *Géométrie.* André Desvigne. 1963.

Séquence n° 6

Exercices sur l'inversion et les coniques

Fiche créée par D. TANRÉ pour la formation CAPES Lille I, année 2009-2010.
`http://algmod.free.fr/capes/fiches.html`

6.1 Inversion

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un plan orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ et soit k un nombre réel non nul. On appelle *inversion de pôle O et de puissance k*, l'application :

$$\begin{array}{rccc} I_{O,k} & : & \mathscr{P} \setminus \{O\} & \to & \mathscr{P} \setminus \{O\} \\ & & M & \mapsto & M' \end{array}$$

tel que O, M et M' sont alignés et $\left\langle \overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM} \right\rangle = k$.

On ajoute au plan $\mathscr{P}$ un point à l'infini, ∞, et on note $\widehat{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \cup \{\infty\}$. Par définition, une droite de $\widehat{\mathscr{P}}$ est une droite du plan $\mathscr{P}$ à laquelle on a ajouté le point à l'infini. L'inversion $I_{O,k}$ s'étend en une application $I_{O,k} : \widehat{\mathscr{P}} \to \widehat{\mathscr{P}}$ par $I_{O,k}(O) = \infty$, $I_{O,k}(\infty) = O$. Une similitude h de $\mathscr{P}$ est également prolongée en une application de $\widehat{\mathscr{P}}$ dans $\widehat{\mathscr{P}}$ par $h(\infty) = \infty$.

1 Montrer que la composée de deux inversions de même pôle O est une homothétie de centre O. En déduire que l'on peut toujours décomposer une inversion $I_{O,k}$ en un produit $h_{O,\lambda} \circ I_{O,k'}$ où $h_{O,\lambda}$ est une homothétie de centre O et de rapport λ et $I_{O,k'}$ est une inversion de pôle O dont on peut fixer arbitrairement la puissance k'.

2 Soit $I_{O,k}$ une inversion.

1. Supposons $k > 0$ et soit (Δ) une droite située à la distance $\sqrt{k}$ de O. Déterminer l'image de (Δ) par cette inversion.
2. En déduire *l'image d'une droite quelconque par une inversion.* (On distinguera le cas où la droite passe par le pôle de l'inversion.)

3 Soit $I_{O,k}$ une inversion.

1. Supposons $k > 0$, déterminer un cercle invariant point par point par $I_{O,k}$. On l'appelle *cercle d'inversion.*
2. Soit $(\mathscr{C})$ un cercle tel que la puissance du point O par rapport à $(\mathscr{C})$ soit égale à k. Déterminer l'image de $(\mathscr{C})$ par $I_{O,k}$.
3. En déduire *l'image d'un cercle quelconque par une inversion* (On distinguera le cas où le cercle passe par le pôle d'inversion.)

4 On se donne deux points M et N et leurs images respectives M' et N' par l'inversion $I_{O,k}$.

1. Déterminer la longueur $M'N'$ en fonction de O, M et N.
2. Si M, N, M', N' ne sont pas alignés, montrer qu'ils sont situés sur un même cercle.

3. Si $k > 0$, montrer que pour tout cercle passant par deux points inverses l'un et l'autre est orthogonal au cercle d'inversion.
4. On se donne deux ensembles de points :

$$F = \{A_1, A_2, \dots, A_l\}$$
$$F' = \left\{A'_1, A'_2, \dots, A'_l\right\}$$

tels que, pour tout couple (i, j), les points A_i, A_j, A'_i et A'_j sont cocycliques. Montrer qu'il existe une inversion ou réflexion, I, telle que $I(A_i) = A'_i$, pour tout $i = 1, \dots, l$.

5 On considère le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ identifié à $\mathbb{C}$.

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres complexes a, $b$et le nombre réel c pour que
   (a) $az + b\overline{z} + c = 0$ soit l'équation d'une droite,
   (b) $z\overline{z} + az + b\overline{z} + c = 0$ soit l'équation d'un cercle.
2. Montrer que la transformation $N : z \mapsto 1/z$, définie sur $\mathscr{P} \setminus \{0\}$, conserve l'ensemble des cercles et des droites.
3. (a) Soit $I_{O,1}$ l'inversion de centre O et de puissance 1. Si z est l'affixe de M, déterminer l'affixe de z' de $M' = I_{O,1}(M)$.
   (b) Soit $I_{A,k}$ l'inversion de centre A et de puissance de k. Si z est l'affixe de M, déterminer l'affixe z' de $M' = I_{A,k}(M)$.
   (c) Retrouver le fait qu'une inverse conserve l'ensemble des cercles et des droites.

6.2 Reconnaître une conique à partir d'une équation

Le plan affine $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

6 Montrer que la courbe définie par

$$x^2 - y^2 - 2xy - 2x + y + 1 = 0$$

est une parabole. On en donnera une équation réduite dans un repère approprié et on exprimera son foyer, sa directrice, son axe et son sommet dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de référence.

7 Déterminer la nature des courbes suivantes et en donner une équation réduite dans un repère approprié :

1. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 8y + (4/3) = 0$,
2. $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y - 5 = 0$,
3. $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 3y = 0$.

8 Soit (λ, μ) un couple de nombres réels non simultanément nuls, on considère le faisceau $(\Gamma_{\lambda,\mu})$ de coniques défini par

$$\lambda(x^2 + y^2 - 4x) + \mu(x - 1)^2 = 0.$$

1. Montrer que les coniques $(\Gamma_{\lambda,\mu})$ passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer les couples (λ, μ) pour lesquels
   (a) la conique $(\Gamma_{\lambda,\mu})$ est dégénérée,
   (b) la conique $(\Gamma_{\lambda,\mu})$ est une parabole,
   (c) la conique $(\Gamma_{\lambda,\mu})$ est une hyperbole,
   (d) la conique $(\Gamma_{\lambda,\mu})$ est une ellipse,
   (e) la conique $(\Gamma_{\lambda,\mu})$ est un cercle.
3. Donner l'équation des tangentes en A et en B à la conique $(\Gamma_{\lambda,\mu})$.

6.3 Déterminer une conique à partir de données géométriques

9 Déterminer le foyer et la directrice d'une parabole connaissant

1. le foyer et deux points,
2. la directrice et deux points,
3. le foyer et deux tangentes,
4. la directrice et deux tangentes,
5. le foyer, une tangente et son point de contact,
6. la directrice, une tangente et son point de contact.

10 Déterminer le cercle directeur relatif à l'autre foyer d'une conique à centre connaissant un foyer F, deux tangentes (Δ) et (Δ'), concourantes en un point I, et le point de contact M de la tangente (Δ). (On montrera que le second foyer F' est situé sur une droite passant par le point I et on étudiera la nature de la conique lorsque le point M varie sur la droite (Δ), le point F et les droites (Δ) et (Δ') restant fixes.)

6.4 Recherche de lieu de points

11 Soit (D_m) la droite d'équation $y = x + m$ avec m un paramètre réel. Lorsqu'ils existent, on note M_1 et M_2 les intersections de la droite (D_m) et de l'ellipse d'équation $4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$. Déterminer le milieu I du segment $[M_1M_2]$.

12 Considérons deux droites perpendiculaires (Δ) et (Δ') et deux nombres réels strictement positifs a et b. Deux points P et Q décrivent respectivement les droites (Δ) et (Δ') de sorte que la longueur du segment $[PQ]$ reste fixe et égale à $a + b$. Sur le segment $[PQ]$, on repère le point M défini par $PM = a$ et $MQ = b$.

1. Soit M' le point tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{QM}$. Décrire le lieu du point M'.
2. En déduire le lieu du point M.

13 Déterminer le lieu des foyers des coniques à centre dont on donne le cercle principal et un point.

Séquence n° 7

CAPES de Mathématiques 1999 (2nde composition)

Source du sujet : `http://megamaths.perso.neuf.fr/annce.html`

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On note :

— $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels ;

— $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs ;

— $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Les lettres p et q désignent des nombres entiers relatifs, on note $[\![p\,,q]\!]$ l'ensemble des nombres entiers relatifs compris (au sens large) entre les nombres p et q, autrement dit :

$$[\![p\,,q]\!] = \left\{m,\ m \in \mathbb{Z}\ ;\ p \leq m \text{ et } m \leq q\right\}.$$

Par ailleurs, on note

— $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1\,,n]\!]$;

— $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;

— I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;

et si (k,l) appartient à $[\![1\,,n]\!]^2$:

— E_{kl} la matrice appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k^{e} ligne et la l^{e} colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. On rappelle que la famille $(E_{kl})_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note enfin $M = (m_{ij})$ ou $M = (m_{i,j})$ en cas d'ambiguïté, la matrice :

$$M = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{ij} E_{ij}.$$

La lettre K désignant un réel, on définit les ensembles :

— $L_K = \left\{M,\ M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall i \in [\![1\,,n]\!],\ \sum_{j=1}^n m_{ij} = K\right\}$;

— $L = \bigcup_{K\in\mathbb{R}} L_K$;

— $C_K = \left\{M,\ M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall j \in [\![1\,,n]\!],\ \sum_{i=1}^n m_{ij} = K\right\}$

— $C = \bigcup_{K\in\mathbb{R}} C_K$.

Une matrice $M = (m_{ij})$ appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite matrice *magique* d'ordre n lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\left\{m_{ij},\ (i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2\right\} = [\![1\,,n^2]\!] \qquad (\mathbf{P}_1)$$

$$\exists K \in \mathbb{R},\ M \in L_K \cap C_K \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n m_{kk} = \sum_{k=1}^n m_{k,n+1-k} = K \qquad (\mathbf{P}_2)$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des matrices appartenant à $L \cap C$ et des matrices magiques d'ordre n, avec, notamment, une construction de certaines d'entre elles dans le cas où n est impair.

Les cinq parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Question préliminaire

Montrer que, si M est une matrice magique d'ordre n, le réel K dont la propriété ($\mathbf{P}_2$) affirme l'existence vaut nécessairement $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Dans toute la suite du problème, on note $K_n = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

7.1 Étude des matrices magiques d'ordres 2 et 3

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice magique d'ordre 2.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice magique d'ordre 3.
   (a) Établir l'inclusion de l'ensemble $\{1, 9\}$ dans l'ensemble $\{a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}\}$.
   (b) En déduire l'ensemble des matrices magiques d'ordre 3.

7.2 Étude de l'espace vectoriel $L \cap C$

1. (a) Montrer que L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il est engendré par la famille

$$\left(E_{ij} - E_{in}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n-1]\!]}.$$

   Préciser la dimension de L_0.
   (b) Soit K un réel. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - KI_n$ appartient à L_0.
   (c) En déduire que L est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
2. (a) Montrer que, quelle que soit la matrice

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(E_{ij} - E_{in})$$

   appartenant à L_0, M appartient à C_0 si et seulement si, pour tout j appartenant à $[\![1, n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$.
   (b) En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$ (après avoir succinctement justifié que $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel).
3. (a) Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, M appartenant à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.
   (b) En déduire la dimension de l'espace $L \cap C$.

7.3 Exemple de groupe opérant sur l'ensemble des matrices magiques d'ordre n

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R} = (0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le carré $ABCD$ de centre O tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ d'une part, $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}$ d'autre part, soient colinéaires.

On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$ qui laissent le carré $ABCD$ globalement invariant. On note Ω le point de $\mathscr{E}$ vérifiant

$$\overrightarrow{O\Omega} = -\frac{n+1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

et $\mathscr{R}'$ le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

1. (a) Soit f un élément de $\mathscr{I}$. Montrer qu'il existe un couple $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ appartenant à $\{-1,1\}^2$ tel que, pour tout point N de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x,y) dans le repère $\mathscr{R}$, les coordonnées (x',y') du point $f(N)$ dans le repère $\mathscr{R}$ vérifiant :
$$\begin{cases} x' = \varepsilon_1 x \\ y' = \varepsilon_2 y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = \varepsilon_1 y \\ y' = \varepsilon_2 x \end{cases}.$$
Reconnaître toutes les isométries du plan $\mathscr{E}$ ainsi définies.

   (b) Soit N le point de $\mathscr{E}$ de coordonnées (X,Y) dans le repère $\mathscr{R}'$. Pour chaque élément f de $\mathscr{I}$, exprimer les coordonnées (X',Y') du point $f(N)$ dans le repère $\mathscr{R}'$ en fonction de X et de Y.

2. Soit f un élément de $\mathscr{I}$. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui, à un couple (s,t) de réels, associe le couple de coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$ de l'image par f^{-1} du point de coordonnées (s,t) dans ce même repère.

   (a) Montrer que, quel que soit le couple (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, le couple $\varphi(i,j)$ appartient à $[\![1,n]\!]^2$.

   (b) Soit Φ_f l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à une matrice $M=(m_{ij})$, associe la matrice $\Phi_f(M) = (m'_{ij})$ vérifiant, pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $m'_{ij} = m_{kl}$, le couple (k,l) étant égal à $\varphi(i,j)$.
Montrer que l'application Φ_f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble $\{\Phi_f,\ f\in\mathscr{I}\}$. Montrer que $(\mathscr{F},\circ)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathscr{I},\circ)$. (*Le symbole* $\circ$ *désigne la composition des applications.*)

4. (a) Vérifier que l'image d'une matrice magique d'ordre n quelconque par un élément de $\mathscr{F}$ quelconque est une matrice magique d'ordre n.

   (b) Soient f et g des éléments de $\mathscr{I}$. Montrer que, s'il existe une matrice magique M d'ordre n telle que $\Phi_f(M) = \Phi_g(M)$ alors $f=g$.

   (c) Montrer que l'ensemble des matrices magiques d'ordre n est fini et que son cardinal est un multiple de 8.

7.4 Étude d'un groupe associé à certaines permutations de $[\![1,n]\!]$

Étant donnée une permutation quelconque σ de $[\![1,n]\!]$, on note A_σ la matrice (a_{ij}) appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \delta_{\sigma(i),j}$, ce dernier symbole (dit « de Kronecker ») étant défini par la relation :
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On note $\mathscr{S}$ l'ensemble $\{A_\sigma,\ \sigma\in\mathscr{S}_n\}$.

1. Soient σ un élément de $\mathscr{S}_n$ et $M=(m_{ij})$ un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter le terme général de la matrice $A_\sigma M$, puis le terme général de la matrice MA_σ.

2. Montrer que $(\mathscr{S},\times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathscr{S}_n,\circ)$ (*Le symbole* $\times$ *désigne la multiplication matricielle.*)

3. (a) Soit K un réel. Montrer que, pour toute matrice M appartenant à $L_K\cap C_K$ et toutes permutations σ et σ' de $[\![1,n]\!]$, $A_\sigma M A_{\sigma'}$ appartient à $L_K\cap C_K$.

   (b) On note $\mathfrak{J}_n$ l'ensemble des permutations σ de $[\![1,n]\!]$ telles que :
$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \sigma(n+1-k) = n+1-\sigma(k).$$
Soit σ un élément de $\mathfrak{J}_n$. Montrer que, si M est une matrice magique de taille n, alors $A_\sigma M A_{\sigma^{-1}}$ en est aussi une.

4. On note $\mathscr{J}$ l'ensemble $\{A_\sigma,\ \sigma\in\mathfrak{J}_n\}$.

   (a) Montrer que $(\mathscr{J},\times)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{S},\times)$.

   (b) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathscr{J}$.

7.5 Construction de matrices magiques d'ordre n impair

1. **Cas où n n'est pas multiple de 3**

   On suppose que dans cette section V.1. que n est un entier impair non multiple de 3. On dit que deux entiers p et q sont congus module n, et l'on note $p \equiv q \pmod n$, lorsque n divise $p-q$.

   (a) Montrer qu'il existe un entier m premier avec n tel que, pour tout quadruplet (i,j,k,l) appartenant à $\mathbb{Z}^4$,

   $$\begin{cases} k \equiv 2i+j \pmod n \\ l \equiv i+2j \pmod n \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} i \equiv m(2k-l) \pmod n \\ j \equiv m(2l-k) \pmod n \end{cases}.$$

   Ainsi, pour tout couple (k,l) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, il existe un et un seul couple (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$ tel que :

   $$\begin{cases} k \equiv 2i+j \pmod n \\ l \equiv i+2j \pmod n \end{cases}.$$

   On note alors $i=\alpha(k,l)$ et $j=\beta(k,l)$.

   (b) On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau quotient $\mathbb{Z}$ par l'idéal $n\mathbb{Z}$ et, si x est élément de $\mathbb{Z}$, $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

   i. Soient u et v deux entiers relatifs, u non nul. Montrer que, si u et v sont premiers entre eux, l'application $x \mapsto \overline{ux}+\overline{v}$ est une bijection de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur lui-même.

   ii. En déduire que, pour tout l appartenant à $[\![1,n]\!]$, la somme $\sum_{k=1}^{n} \alpha(k,l)$ est constante (préciser sa valeur en fonction de n).

   (c) Soit $W=(w_{i,j})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$:

   $$w_{ij} = n(i-1)+j.$$

   Soit $G=(g_{k,l})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (k,l) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$:

   $$g_{k,l} = w_{\alpha(k,l),\beta(k,l)}.$$

   Construire G dans le cas où $n=5$.

   (d) *Dans la suite, l'entier n n'est plus supposé égal à* 5.

   i. Montrer que l'ensemble des coefficients de G est $[\![1,n^2]\!]$.

   ii. Montrer que G est une matrice magique d'ordre n.

   (e) Dans cette question, on établit une propriété supplémentaire de la matrice G. Si i appartient à $[\![1,n]\!]$, on note

   $$E_i = \left\{(k,l),\ (k,l)\in[\![1,n]\!],\ k-l\equiv i \pmod n\right\}.$$

   i. Montrer que, pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$, $\sum_{(k,l)\in E_i} g_{kl} = K_n$.

   ii. Déterminer n autres ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_n$ analogues aux ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ tels que, pour out i appartenant à $[\![1,n]\!]$, $\sum_{(k,l)\in F_i} g_{kl} = K_n$.

2. **Composition de deux matrices magiques. Cas où n est multiple de 3.**

   Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 3.

   À partir d'une matrice magique $A=(a_{kl})$ d'ordre p et d'une matrice magique $B=(b_{ij})$ d'ordre q, on considère la matrice carrée $D=(d_{uv})$ d'ordre pq vérifiant, pour tout (k,l) appartenant à $[\![1,p]\!]^2$ et tout (i,j) appartenant à $[\![1,q]\!]^2$,

   $$d_{(i-1)p+k,(j-1)p+l} = a_{kl} + (b_{ij}-1)p^2.$$

   (a) Construire D dans le cas particulier où les matrices A et B sont égales à $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que, pour toutes matrices magiques A et B d'ordre respectifs p et q. D est une matrice magique d'ordre pq.

   (c) En déduire que, si n est un multiple de 3, l'ensemble des matrices magiques d'ordre n n'est pas vide.

Séquence n° 8

Polynômes

Fiche créée par D. TANRÉ pour la formation CAPES Lille I, année 2006-2007.
`http://algmod.free.fr/capes/fiches.html`

1 Trouver le pgcd de $P(X) = 3X^3 + X + 1$ et $Q(X) = 3X^2 + 2X - 1$.

2 Démontrer que, quels que soient les entiers p, q, r, le polynôme $X^{3p} + X^{3q+1} + X^{3r+2}$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

3 Soit $P_n(X) = (\cos\theta + X \sin\theta)^n$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Quel est le reste de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $X^2 + 1$?

4 Soit U_n le groupe des racines n^{e} de l'unité dans $\mathbb{C}$. On dit que $\alpha \in U_n$ est une racine primitive si $\alpha^k \neq 1$ pour $1 \leq k \leq n-1$. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les racines primitives de U_n et on appelle polynôme cyclotomique d'indice n le polynôme défini par

$$\Phi_n(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_m).$$

1. Démontrer que $m = \varphi(n)$ où φ désigne l'indicatrice d'Euler.
2. Démontrer que si p est un nombre premier, on a $\Phi_p(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$.
3. Démontrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.
4. En déduire que les coefficients de $\Phi_n(X)$ sont entiers.
5. Calculer $\Phi_{12}(X)$.

5 Le but de cet exercice est de démontrer le critère d'Eisenstein : « *Soit p un nombre premier et soit $A = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers tels que*

1. a_i est divisible par p pour $0 \leq i \leq n-1$,
2. a_n n'est pas divisible par p,
3. a_0 n'est pas divisible par p^2

alors A est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

On raisonne par l'absurde en supposant que A n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer, à l'aide du lemme de Gauss, qu'il existe deux polynômes non constants B et C dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $A = BC$.
2. On note $B = b_d X^d + \cdots + b_0$. En réduisant modulo p, montrer que p divise $b_0, \ldots, b_{d-1}$.
3. En déduire que p^2 divise a_0, d'où une contradiction.
4. Montrer que le polynôme :
$$\frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + \cdots + 1$$
est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (Faire le changement de variables $X = Y + 1$).

6 Un polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$$

est dit unitaire si $a_m = 1$. Soit n un entier strictement positif.

1. (a) Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes. On considère les polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ définis par :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_1)$$

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i^2)$$

Montrer que l'on a $Q(X^2) = (-1)^n P(X)P(-X)$.

(b) Soit $(P_k)_{k\geq 0}$ la suite de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ définie par

$$P_k(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i^{2^k}).$$

Montrer que si P_0 est à coefficients entiers, il en est de même pour P_k, pour tout entier $k > 0$.

2. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n, à coefficients entiers et dont les racines sont de module inférieur ou égal à 1. Soit $P \in \mathscr{P}_n$, on pose :

i. $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$,

ii. $s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}$, pour $1 \leq k \leq n$.

Calculer les coefficients de $P(X)$ en fonction des nombres s_k. En déduire que l'on a $|a_{n-k}| \leq \binom{n}{k}$ pour $1 \leq k \leq n$ et que $\mathscr{P}_n$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments.

(b) Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes, de module inférieur ou égal à 1, tels que le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$ soit à coefficients entiers.

i. Montrer en utilisant les questions précédentes :

— qu'il existe deux entiers strictement positifs j et k et une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $\alpha_i^{2^k} = \alpha_{\sigma(i)}^{2^j}$, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

— qu'il existe un entier $r > 0$ tel que $\alpha_i^{2^{kr}} = \alpha_i^{2^{jr}}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

ii. Montrer que toute racine non nulle de P est racine de l'unité.

Séquence n° 9

Rappel sur les points singuliers d'une courbe paramétrée

Fiche créée par D. TANRÉ pour la formation CAPES Lille I, année 2006-2007.
http://algmod.free.fr/capes/fiches.html

D'après [5, p. 49]

PROPOSITION 9.1 On suppose que $t \mapsto M(t)$ est infiniment dérivable dans un ouvert contenant t_0. Soit p le plus petit entier strictement supérieur à 0 tel que $M^{(p)}(t_0) \neq 0$. Soit q le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $M^{(p)}(t_0)$ soit non parallèle à $M^{(q)}(t_0)$. On pose $\vec{e} := M^{(p)}(t_0)$ et $\vec{f} := M^{(q)}(t_0)$. On a alors $M^{(r)}(t_0)\lambda_r \vec{e}$, pour tout $p < r < q$ et :

$$M(t_0+h) - M(t_0) = \sum_{k=p}^{q-1} \frac{h^k}{k!}\lambda_k \vec{e} + \frac{h^q}{q!}\vec{f} + h^q O(1)$$

avec $\lambda_p = 1$ et $O(1) = \vec{e}(x(t), y(t))$. Si :

$$\gamma = \sum_{h=p}^{q-1} \frac{h^k}{k!} + \frac{h^q}{q!}O(1)$$

$$\eta = \frac{h^q}{q!}(1 + O(1))$$

on a alors :

$$M(t_0+h) - M(t_0) = \gamma\vec{e} + \eta\vec{f}.$$

PROPOSITION 9.2 (POINTS SINGULIERS DE LA COURBE). Le tableau 9.1 donne tous les types de points singuliers qu'on peut retrouver dans des courbes paramétrées.

$q \downarrow$ / $p \rightarrow$	pair	impair
pair	rebroussement de seconde espèce	ordinaire
impair	rebroussement de première espèce	inflexion

TABLE 9.1 – Points singuliers de courbes paramétrées

Démonstration. On peut retrouver les résultats en calculant et en trouvant le signe de $(t - t_0)^p$. □

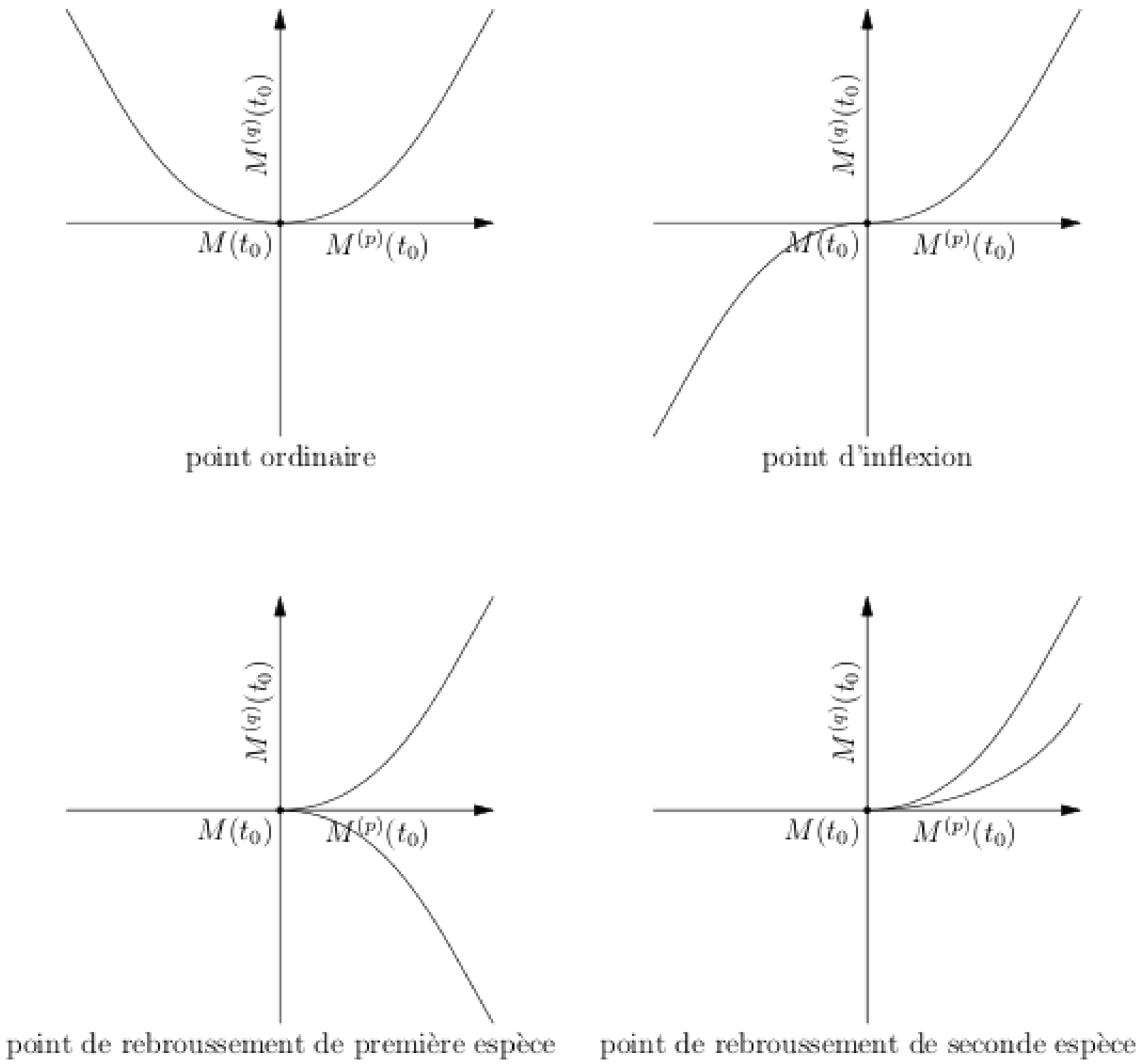


FIGURE 9.1 – Points singuliers des courbes paramétrées

Références pour la séquence n^{o} 9

[5] C. Boulonne. *Notes de cours - M105 : Compléments d'analyse et d'algèbre*. L1 Mathématiques.

Séquence n° 10

Courbes dans le plan - Enveloppes

Fiche créée par D. TANRÉ pour la formation CAPES Lille I, année 2010-2011.
http://algmod.free.fr/capes/fiches.html

Dans la suite, le plan euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

1 Tracer la courbe d'équation

$$\left(x(t) = \frac{t^2+t+1}{t+1}, y(t) = \frac{t^2-1}{2-t}\right).$$

On précisera les positions relatives de la courbe et de ses asymptotes.

2 Soit $a > 0$ et $b > 0$.

1. Tracer la courbe d'équation
$$(x(t) = a\sin 2t,\ y(t) = b\sin 3t),$$
en précisant les points doubles.
2. Montrer que la courbe d'équation,
$$(x(t) = a\sin 2t, y(t) = b\sin \alpha t),$$
est fermée si, et seulement si, α est un nombre rationnel.

3 Étudier l'allure locale des courbes suivantes,

1. $\left(x(t) = t^2 - \frac{2}{t}, y(t) = (t+1)^2\right)$ au voisinage de $t = -1$.
2. $\left(x(t) = 2\cos t - \frac{1}{8}\tan^2 t, y(t) = 2\sin t + \frac{1}{4}\tan t\right)$ au voisinage de $t = (2\pi)/3$.

4 Tracer les courbes

1. $\rho(\theta) = 1 + \tan\theta$,
2. $\rho(\theta) = 1 + \tan(\theta/2)$.

(On précisera les asymptotes et leur position par rapport à la courbe. L'étude des points d'inflexion n'est pas demandée.)

5 Donner l'équation en polaires, d'une droite, d'un cercle, d'une conique dont le foyer est au pôle.

6 Soit $\rho(\theta)$ la courbe en coordonnées polaires définie par

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)}.$$

Si M est un point de cette courbe, on note H la projection orthogonale du pôle sur la tangente en M à $\rho(\theta)$, et $\mathscr{P}$ l'ensemble des points H ainsi obtenus lorsque M parcourt la courbe $\rho(\theta)$. Donner une équation polaire de $\mathscr{P}$. Interpréter géométriquement cet ensemble.

Séquence n° 11

Nombres complexes, inversion, homographies

Fiche créée par D. TANRÉ pour la formation CAPES Lille I, année 2006-2007.
`http://algmod.free.fr/capes/fiches.html`

1 On considère le plan euclidien $\mathscr{P}$ identifié à $\mathbb{C}$.

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres complexes a, b et le nombre réel c pour que
   (a) $az + b\overline{z} + c = 0$ soit l'équation d'une droite,
   (b) $z\overline{z} + az + b\overline{z} + c = 0$ soit l'équation d'un cercle.
2. Montrer que la transformation $N : z \mapsto 1/z$, définie sur $\mathscr{P} - \{0\}$, conserve l'ensemble des cercles et des droites.
3. (a) Soit $I(O,1)$ l'inversion de cercle O et de puissance 1. Si z est l'affixe de M, déterminer l'affixe z' de $M' = I(O,1)(M)$.
   (b) Soit $I(A,k)$ l'inversion de centre A et de puissance k. Si z est l'affixe de M, déterminer l'affixe z' de $M' = I(A,k)(M)$.
   (c) Retrouver le fait qu'une inversion conserve l'ensemble des cercles et des droites.

2 On complète le plan $\mathscr{P}$ identifié à $\mathbb{C}$ par un point noté ∞ et on pose :
— si $c \in \mathbb{C}$, $c \pm \infty = \infty$, $\frac{c}{\infty} = 0$,
— si $c \in \mathbb{C}$ et $c \neq 0$, $c \cdot \infty = \infty$, $\frac{c}{0} = \infty$.
— Les expressions $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ et $\frac{0}{0}$ ne sont pas définies.
Le but de l'exercice est l'étude des transformations de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ définies par :

$$z \mapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{avec } (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \text{et } \Delta = ad - bc \neq 0,$$

appelées *homographies*.

1. (a) Si $\Delta = 0$, calculer $\frac{az+b}{cz+d}$. Désormais, comme indiqué ci-dessus, on suppose toujours $\Delta \neq 0$.
   (b) Montrer que l'application $z \mapsto f(z)$ est bien définie et est bijective. Déterminer son inverse.
   (c) Montrer que le produit de deux homographies est une homographie.
2. (a) Exprimer géométriquement f si $c = 0$.
   (b) Soit $c \neq 0$. Montrer que f se décompose en $f = t_1 s N t_2$ où t_1 et t_2 sont des translations, s est une similitude et N est défini dans l'exercice 1.
   (c) En déduire que f conserve
   — les angles orientés,
   — l'ensemble des cercles et des droites.
3. (a) Montrer que si f a trois points fixes, c'est l'identité.

(b) On se donne trois points distincts d'affixes respectives z_1, z_2, z_3. Construire une homographie $\tilde{f}$ telle que :

$$\tilde{f}(z_1) = \infty,\ \tilde{f}(z_2) = 0,\ \tilde{f}(z_3) = 1.$$

(c) En déduire qu'une homographie est déterminée de façon unique par trois points distincts z_1, z_2, z_3 et leurs images distinctes z'_1, z'_2, z'_3.

4. On définit le *birapport* de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 par :

$$\begin{aligned}[z_1, z_2, z_3, z_4] &= \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} / \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \\ &= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.\end{aligned}$$

(a) Exprimer ce birapport en fonction de la transformation $\tilde{f}$ introduite dans la question précédente.

(b) En déduire que toute homographie conserve le birapport. Réciproquement, montrer que toute bijection de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui conserve le birapport est une homographie.

(c) Montrer que le birapport de quatre points distincts (z_1, z_2, z_3, z_4) est réel si, et seulement si, les quatre points sont alignés ou cocycliques. (On pourra considérer l'homographie envoyant z_1, z_2, z_3 sur trois points distincts, z'_1, z'_2, z'_3, de la droite réelle.)

(d) Une inversion conserve-t-elle le birapport ?

5. On note G le groupe engendré par les homographies et la symétrie $z \mapsto \overline{z}$.

(a) Montrer que G est engendré par les réflexons et les inversions.

(b) En déduire que tout élément de G conserve
— les angles non orientés,
— l'ensemble des cercles et des droites.

6. On s'intéresse à la réciproque du dernier résultat.

(a) Soit $g : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une application bijective, préservant l'ensemble des droites et des cercles et telle que $g(\infty) = \infty$. Montrer que g est une similitude. (On utilisera le théorème fondamental de la géométrie affine et la caractérisation des similitudes).

(b) En déduire que toute application bijective de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ conservant l'ensemble des cercles et des droites est un élément de G.

Deuxième partie

Analyse

Séquence n° 12

Fiche TD Analyse I

$\boxed{1}$ Pour tout entier naturel n, on pose
$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Soit n un entier naturel, montrer que l'intégrale I_n existe.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs.
2. (a) Calculer $I_{n+2} + I_n$ en fonction de n.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (d) On pose $f(n) = I_{n+4} - I_n$, montrer que :
   $$f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}.$$
3. (a) Calculer I_0 et I_2.
   (b) Calculer de deux façons différentes $\sum_{p=1}^{k} f(4p-2)$.
   (c) En déduire
   $$\lim_{k\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots - \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1}\right).$$
4. (a) Calculer I_1.
   (b) Calculer de deux façons différentes $\sum_{p=1}^{4} f(4p-3)$.
   (c) En déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
5. (a) Montrer le théorème de convergence radiale suivant :

   THÉORÈME 12.1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, on définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = a_n x^n.$$
   On suppose que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Lorsque la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge, on pose $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$.
   (i) Si la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n$ est absolument convergente alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement $[-1,1]$ et la fonction f est continue sur $[-1,1]$.
   (ii) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, décroissante qui converge vers 0, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[-1,0]$ et la fonction f est continue sur $[-1,1[$.

   (b) Déterminer la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ par une autre méthode.

2 On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1,$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. (a) Déterminer les points fixes de f notées l_1 et l_2 avec $l_1 < l_2$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x, on a :
   $$x < l_1 \Rightarrow f(x) < l_1$$
   et
   $$1 < x < 2 \Rightarrow 1 < f(x) < 2.$$
   (c) Montrer que les points fixes de f sont points fixes de $f \circ f$, préciser les points fixes de $f \circ f$.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, puis la droite D dont une équation est $y = x$. Représenter les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0,7$ puis $u_0 = 1,25$.
3. On suppose que $u_0 < l_1$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, est-elle convergente ?
4. On suppose que u_0 est élément de $]1, l_1[$.
   (a) Montrer que u_1 est élément de $]l_2, 2[$.
   (b) Dans la suite, on définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$
   Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < v_n < l_2 \quad \text{et} \quad l_2 < w_n < 2.$$
   (c) Étudier la monotonie des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et préciser la limite de chacune d'elles.
5. Déterminer les valeurs du premier terme u_0 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3 **ÉQUATION DE LA CHALEUR**

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^3$. On appelle solution du problème de la chaleur noté (C) toute application F élément de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x, 0) = f(x)$.
(ii) $\forall (x, t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $F(x + 2\pi, t) = F(x, t)$.
(iii) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ est définie, continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ et

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

1. Les questions suivantes permettent de montrer l'unicité d'une solution du problème de la chaleur (C) :
   (a) On suppose que le problème (C) admet une solution F. Pour tout réel t réel positif fixé, on définit l'application F_t sur $\mathbb{R}$ par $F_t(x) = F(x, t)$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $\left(\gamma_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$
   (b) Montrer que, pour tout entier relatif n, l'application γ_n est solution de l'équation différentielle $y' = -n^2 y$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que si F existe alors :
   $$\forall (x, t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \quad F(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

2. On rappelle l'égalité de Parseval. Si φ est élément de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et 2π-périodique (valable si φ est seulement continue par morceaux), alors la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n(\varphi)\right|$ converge. La série de Fourier de φ, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\varphi) e_n$ (où $e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$), converge normalement vers φ sur $\mathbb{R}$.
   Soit n un entier relatif, on définit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ la fonction Θ_n par :
$$\Theta_n(x,t) = c_n(f)\mathrm{e}^{-n^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$
   (a) Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Theta_n$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On pose F la somme de cette série.
   (b) On pose F la somme de cette série. Montrer que F est solution du problème de la chaleur (C).

Séquence n° 13

Fiche TD Analyse II

$\boxed{1}$ **SUITE DE FIBONACCI ET NOMBRE D'OR**
On appelle nombre d'or et on note Φ, l'unique solution positive de l'équation :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

La suite de Fibonacci est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, le nombre u_n est un entier strictement positif.
2. On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - \Phi u_n, \; t_n = u_{n+1} - (1-\Phi) u_n.$$

   Montrer que ces suites sont géométriques, en déduire une expression de v_n et de t_n en fonction de n et de Φ.
3. Montrer la formule de Binet suivante :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right).$$

   En déduire que :

$$u_n = \frac{\Phi^{n-1} - (-1)^{n-1} \Phi^{-n+1}}{\sqrt{5}}.$$

4. Déterminer la formule de Binet par une autre méthode.

$\boxed{2}$ **INÉGALITÉ DE WIRTINGER**
Si f est une application continûment dérivable, 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que son intégrale sur un segment de longueur 2π soit nulle, alors :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Étudier le cas d'égalité.

Indication : utiliser la formule de Parseval.

$\boxed{3}$ **LEMME DE CANTOR**
Dans cet exercice, on se propose de démontrer le lemme suivant :

Lemme 13.1 (Lemme de Cantor). Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres réels. Pour tout réel x et tout entier naturel, on pose $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ et on suppose que, pour tout réel x, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0, alors les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ convergent vers 0.

Question préliminaire : Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Première méthode : Raisonnement par l'absurde

On suppose que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0.

1. Montrer qu'il existe un réel ε strictement positif et une sous-titre $\left(b_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ de la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ tels que :
$$n_1 > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \left|b_{n_k}\right| \geq \varepsilon,\ n_{k+1} \geq 3n_k.$$
2. On pose :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_k = \frac{1}{n_k}\left(\frac{\pi}{6} + p_k\pi\right) \quad \text{et} \quad \beta_k = \frac{1}{n_k}\left(\frac{5\pi}{6} + p_k\pi\right),\ p_k \in \mathbb{Z}.$$
Construire une suite $\left(p_k\right)_{k\geq 1}$ de nombres entiers telle que la suite des segments $J_k = [\alpha_k, \beta_k]$ vérifie les conditions :
(C_1) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J_{k+1} \subset J_k$ et $\lim_{k\to+\infty}(\beta_k - \alpha_k) = 0$;
(C_2) $\forall x \in J_k$, $|\sin n_k x| \geq \frac{1}{2}$.
3. Déterminer $\bigcap_{k\geq 1} J_k$. Conclure.

Deuxième méthode : Intervention du calcul intégral

1. Calculer
$$\int_0^{2\pi} (b_n \sin nx)^2\, \mathrm{d}x.$$
2. On admet le lemme suivant :

Lemme 13.2 Soit a et b deux réels tels que $a < b$, $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que :
— la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.
— $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq f_n \leq M$.
Alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(a) On suppose que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est bornée. Conclure.

(b) **Cas général.** On pose $b' = \inf(1, |b_n|)$. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty} b'_n \sin nx = 0.$$
Conclure.

4 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIRICHLET

Soit f une fonction continue de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{C}$. On se propose de déterminer les solutions si elles existent du problème de Dirichlet suivant :
$$\begin{cases} -y'' + y = f \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que les fonctions $x \in [0,\pi] \longmapsto \sinh(x)$ et $x \in [0,\pi] \longmapsto \sinh(\pi - x)$ sont indépendantes. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $-y'' + y = 0$.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $-y'' - y = f$ par la méthode de la variation des constantes.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $-y'' + y = f$.
4. Résoudre le problème de Dirichlet.

Séquence n° 14

Fiche TD Analyse III

On se propose dans ce devoir de construire la fonction exponentielle : on s'interdit donc tout emploi de propriétés de la fonction exponentielle, de la fonction logarithme et des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel.

Par contre les propriétés des fonctions puissances à exposant rationnel sont supposés connues.

1 **L'INÉGALITÉ DE BERNOUILLI**

Montrer, de trois manières différentes, par des méthodes élémentaires, l'inégalité suivante :

$$\forall a \in]-1,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1+a)^n \geq 1+na,$$

avec égalité si et seulement si $a = 0$.

2 **INÉGALITÉ DE CAUCHY**

Il s'agit de l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in]0,+\infty[^n, \quad \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} x_p \geq \left(\prod_{p=1}^{n} x_p\right)^{1/n},$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Cette inégalité est encore appelée inégalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique.

1. Montrer cette inégalité pour $n = 2$, étudier le cas d'égalité.

On propose deux méthodes pour démontrer cette inégalité.

Première méthode : méthode de Cauchy

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :
   (i) $1 \in A$;
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Rightarrow 2n \in A$;
   (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in A \Rightarrow n \in A$.
   Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.
2. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

Deuxième méthode

Soient n un entier strictement positif et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un n-uplet de réels strictement postifs supposés non tous égaux. On définit une application ϕ de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in [0,1], \quad \phi(t) = \prod_{k=1}^{n}\left(x_k + \frac{t}{n}\sum_{p=1}^{n}(x_p - x_k)\right).$$

1. Montrer que, pour tout réel t élément de $[0,1]$, le réel $\phi(t)$ est strictement positif.
2. Démontrer que l'application ϕ est strictement croissante.
3. Démontrer l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

3 CONSTRUCTION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. Soit x un réel fixé, on note :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$
et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > |x|, \quad v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$
Montrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.
2. On note e l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à un réel x, associe la limite commune des suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$. Montrer que la suite d'applications $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers l'application e sur tout segment de $\mathbb{R}$. Que peut-on déduire pour l'application e ?
3. Démontrer les inégalités suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq 1 + x$
   (b) $\forall x \in\ ]-\infty, 1[,\ \mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$
4. (a) Démontrer que, pour tout réel x, $\mathrm{e}(x)$ est non nul et exprimer son inverse.
   (b) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0, déterminer :
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n.$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{e}(x + y) = \mathrm{e}(x) + \mathrm{e}(y).$$
5. Énumérer les propriétés élémentaires, c'est-à-dire enseignées dans les classes de lycée, de la fonction exponentielle et démontrer qu'elles sont vérifiées par l'application e.

4 UN CALCUL D'INTÉGRALE

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit F une application de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, on suppose que f et F vérifient la condition suivante :
$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad F(y) - F(x) \geq (y - x) f(x).$$

1. Montrer que l'application f est croissante sur $[a, b]$.
2. Démontrer que l'application F est convexe sur $[a, b]$.
3. Soit n un entier positif. Démontrer que si $\sigma = \left(a_p\right)_{0\leq p\leq n}$ est une subdivision de $[a, b]$ alors :
$$\sum_{p=0}^{n-1} (a_{p+1} - a_p) f(a_p) \leq F(b) - F(a) \leq \sum_{p=0}^{n-1} (a_{p+1} - a_p) f(a_{p+1}).$$
4. En déduire que
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Séquence n° 15

Fiche TD Analyse IV

15.1 Partie 1

On définit la suite double de nombres réels $\left(a_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ par :

(i) $a_{0,0} = 1$.

(ii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{p,0} = 0$.

(iii) $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $a_{0,q} = 0$.

(iv) $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $a_{p+1,q+1} = a_{p,q} + (p+1)a_{p+1,q}$.

1. Calculer, pour tout q entier naturel, $a_{1,q}$.
2. Calculer $a_{2,1}$ et $a_{2,2}$.
3. Calculer, pour tout q entier naturel, $a_{2,q}$
4. Soit la propriété :
$$\mathscr{P}(p) : \text{« } \forall q \in \mathbb{N},\ a_{p,q} \in \mathbb{N}. \text{ »}$$
Montrer que, pour tout entier p, la propriété $\mathscr{P}(p)$ est vraie.
5. Pour p strictement supérieur à q, calculer $a_{p,q}$.
6. Pour p entier naturel, calculer $a_{p,p}$.
7. Déterminer les matrices $A_n = [a_{p,q}]_{0\leq p\leq n\ ;\ 0\leq q\leq n}$ pour n variant de 2 à 5.

15.2 Partie 2

On note F l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application ϕ par :

$$\forall f \in F, \quad \phi(f) = g$$

avec

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g(x) = xf'(x).$$

Pour q élément de $\mathbb{N}^*$, on note $\phi^q = \phi \circ \phi^{q-1}$ et par convention $\phi_0 = 1_F$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de F. Est-il surjectif ? injectif ? Préciser son noyau.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme ϕ.
3. Pour f élément de F, expliciter $\phi^2(f)$. Déterminer le noyau de ϕ^2 et en donner une base.
4. Soit n un entier strictement positif, montrer par récurrence qu'il existe des réels $d_{p,q}$ tels que, pour tout q élément de $[\![1,n]\!]$, pour tout f élément de F, on ait la relation :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \phi^q(f)(x) = \sum_{p=1}^{q} d_{p,q} x^p f^{(p)}(x).$$

On admet que cette décomposition est unique.

5. On convient que :

$$\begin{cases} d_{0,0} = 1, \\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ d_{p,0} = d_{0,q} = 0 \\ d_{p,q} = 0 \text{ si } p > q. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall (p,q) \in [\![1\,,n]\!]^2, \quad d_{p,q} = a_{p,q}.$$

15.3 Partie 3

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \exp\big(\exp(t) - 1\big).$$

   (a) Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 4 en 0.

   (b) Pour n variant de 1 à 4, en déduire la valeur de la derivée n^{e} de φ en 0.

2. Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n. On appelle *partition* de E, tout ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes, dont la réunion est E. Chaque partie de la partition s'appelle une classe.

   Pour tout entier j strictement positif, on note P_n^j le nombre de partitions de E en j classes. Par convention, on note $P_0^0 = 1$ et, pour tous les entiers n et j strictement positifs, $P_n^0 = P_0^j = 0$.

   (a) Pour j strictement supérieur à n, calculer P_n^j.

   (b) Calculer P_n^1 et P_n^n.

   (c) On suppose que j est supérieur ou égal à 2 et n entier strictement positif. Montrer que :

$$P_n^j = P_{n-1}^{j-1} + j P_{n-1}^j.$$

   (d) En déduire que, pour tout j et n entier naturel, $P_n^j = a_{j,n}$.

3. On note P_n le nombre de partitions de E, par convention $P_0 = 1$.

   (a) Pour n variant de 1 à 4, calculer P_n et comparer P_n à $\varphi^{(n)}(0)$.

   (b) Exprimer P_n à l'aide des P_n^j.

   (c) On admet, dans la suite, que :

$$P_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} P_p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} P_p.$$

   Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $P_n \leq n!$.

4. Soit x un réel, on note

$$s(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{P_n}{n!} x^n$$

   la somme de la série entière lorsqu'elle converge.

   (a) Montrer que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à 1.

   (b) Montrer que :

$$\forall x \in \left]-1\,,1\right[, \quad s'(x) = s(x)\exp(x).$$

   (c) En déduire $s(x)$.

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $P_n = \varphi^{(n)}(0)$.

Séquence n° 16

Fiche TD Analyse V

16.1 Première partie

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de polynômes définies par les relations suivantes :

$$u_n(x) = x^n(x-1)^n \quad \text{et} \quad P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n u_n(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

1. Soient a un réel strictement positif et k un entier naturel, montrer que l'application $\varphi_{a,k}$ définie de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi_{a,k} \colon x \in]0,1] \to x^{a-1}(x-1)^k,$$
est intégrable sur $]0,1]$ et calculer son intégrale notée
$$I_{a,k} = \int_0^1 x^{a-1}(x-1)^k \,\mathrm{d}x.$$
2. Soit n un entier naturel, calculer $\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\binom{2n}{n}$.
3. Déterminer de deux manières différentes le polynôme P_n, le résultat sera exprimé en fonction d'expressions du type $x^k(x-1)^{n-k}$.
4. En déduire la relation :
$$\binom{2n}{n} = \sum_{p=0}^{n}\left(\binom{n}{p}\right)^2.$$

16.2 Deuxième partie

Soient a et b deux réels strictement positifs, on note $J(a,b)$ l'intégrale suivante :

$$J(a,b) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de l'intégrale.
2. Démonter que :
$$J(a,b) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{a+nb}.$$
3. Calculer :
$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \cdots = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{1+3n}.$$
4. Soit a un réel élément de $]-1,1[$, on définit la fonction φ_a de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Montrer que l'application φ_a est intégrable sur $]-1,1[$.
6. Calculer l'intégrale $K(a) = \int_{-1}^{1} \varphi_a(x)\,\mathrm{d}x$.
7. Montrer que, pour tout réel a élément de $]-1,1[$, on a :

$$K(a) = \sum_{k\geq 0} a^{2k} \int_{-1}^{1} \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

(*Indication : on pourra utiliser le théorème 1 admis à la fin de la fiche*).

8. Soit n un entier naturel, calculer $L_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\binom{2n}{n}$.
9. Retrouver le résultat de la question 6 (de la deuxième partie) en utilisant un développement en série entière.

16.3 Troisième partie

Soit f la fonction définie de $]-\infty,1[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Soit g la fonction définie de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Déterminer le développement en série entière de f au voisinage de 0 en précisant la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad f(t) = 1 + \sum_{n\geq 1} \alpha_n \binom{2n}{n} t^n.$$

2. Établir que la fonction g est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire le développement en série entière de la fonction g au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence R de la série obtenue.
4. Déterminer une suite $\left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour x élément de l'intervalle de convergence, on ait :

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_n}{\binom{2n}{n}} x^{2n-1}.$$

5. Déduire la somme de la série suivante :

$$\Sigma = 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{2^3}\cdots$$

6. Soit h la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$h(x) = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Déterminer une suite $\left(\gamma_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad h(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\gamma_n}{\binom{2n}{n}} x^{2n}.$$

7. Déduire des questions précédentes la somme de chacune des séries de termes généraux respectifs $\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$ et $\frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

16.4 Quatrième partie

Soient F une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et α un réel strictement positif. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe des coefficients $c_n(\alpha)$ permettant d'écrire :

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0} c_n(\alpha)\int_0^1 F(t)t^n\,\mathrm{d}t.$$

On note f_α la fonction définie de $[-\infty,1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{(1-t)^\alpha}.$$

1. Déterminer le développement en série entière de l'application f_α et préciser son rayon de convergence.
2. Étudier, lorsque le réel α est élément de $]0,1[$, l'existence de l'intégrale :

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

3. Démontrer, lorsque le réel α est élément de $]0,1[$, que :

$$I_\alpha = \sum_{n\geq 0} c_n(\alpha)\int_0^1 F(t)t^n\,\mathrm{d}t.$$

(*Indication : on pourra utiliser les informations de la fin de la fiche*).

4. **Application.** Soit n un entier naturel non nul, on particularise :

$$F(t) = t^{n-(1/2)} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Démontrer que $\binom{2n}{n}$ est égal à la somme d'une série dont le terme général dépend des coefficients $\binom{2k}{k}$.

16.5 Information

Pour vous permettre de proposer une solution plus simple, vous pouvez utiliser sans les démontrer, les théorèmes suivants.

THÉORÈME 16.1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$, intégrables sur I, telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I vers une application U. On suppose que

1. l'application U est continue par morceaux sur I.
2. La série $\sum_{n\geq 0} N_1(u_n)$ converge avec $N_1(u_n) = \int_I |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

Alors U est intégrable sur I et :

$$\int_I U(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0}\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

THÉORÈME 16.2 Soient A et I deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, f une application de $A\times I$ dans $\mathbb{C}$ continue sur $A\times I$ telle que :

1. Pour tout x de A, l'application $t\in I\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.
2. L'application f admet en tout point de $A\times I$ une dérivée partielle par rapport à la première variable notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ qui est continue sur $A\times I$.
3. Il existe une application φ intégrable de I dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (x,t)\in A\times I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Alors :

(i) Pour tout réel x de A, l'application $t\in I\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I.

(ii) L'application F définie par :

$$\begin{array}{cccc} F & : & A & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est élément de $\mathscr{C}^1(A,\mathbb{C})$.

(iii) Pour tout réel x de A, on a :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Séquence n° 17

Fiche TD Analyse VI

1 Soient n réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$, on définit les moyennes suivantes :
Moyenne arithmétique :

$$m_a = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} a_p.$$

Moyenne géométrique :

$$m_g = \sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n} a_p}$$

Moyenne harmonique :

$$m_h = \frac{n}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{a_p}}.$$

1. Comparer m_a, m_g et m_h, étudier les cas d'égalité.
   Applications
2. Pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ strictement positifs, montrer que :
$$\left(\sum_{p=1}^{n} a_p\right)\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{a_p}\right) \geq n^2.$$
3. Soient a, b et c trois réels tels que $0 < a < b < c$. On définit les trois suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \\ w_0 = c \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \\ v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \\ w_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3} \end{cases}.$$
   Étudier la convergence de ces trois suites.
4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\frac{1}{1+\ln n} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{n+1}{2n}.$$
   (b) Que peut-on en déduire pour la suite $\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)_{n\geq 1}$?
   (c) Au voisinage de $+\infty$, déduire un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$.

2 Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Montrer que toute fonction croissante de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet un point fixe.
2. Peut-on remplacer l'hypothèse « fonction croissante » par « fonction décroissante » ?
3. Soient f et g deux fonctions croissantes de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telles que $f \circ g = g \circ f$, ces fonctions ont-elles un point fixe commun ?

3 Soit n un entier naturel, on pose :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \sin p.$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$.

4 On désigne par

$$E = \left\{f \in C^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\right\}.$$

Pour tout f élément de E, on note $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que l'application définie sur E par $f \mapsto \|f + 2f' + f''\|_\infty$ est une norme.
2. Soit $F = \left\{\varphi \in C^1([0,1],\mathbb{R}),\ \varphi(0) = 0\right\}$, montrer que :

$$\forall \varphi \in F, \|\varphi\| \leq \mathrm{e}\,\|\varphi + \varphi'\|_\infty.$$

3. (a) Montrer que la norme $\|\cdot\|$ est plus fine que la norme uniforme, c'est-à-dire qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq a\,\|f\|.$$

   (b) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = g \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{PC}$$

   où g est une fonction continue sur $[0,1]$.

   (c) Trouver la meilleure constante a possible.
4. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont-elles équivalentes ?

5 Soit

$$E = \left\{f \in C^0([0,+\infty[,\mathbb{R}),\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x} f^2(x) \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[\right\}.$$

1. (a) Montrer que l'ensemble E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (b) Montrer que la fonction φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f,g) = \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

   est un produit scalaire. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.
2. On pose

$$L_n(x) = \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x} x^n}{n!}\right).$$

   Montrer que L_n est un polynôme de degré n.
3. Pour toute fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f et toute ses dérivées sont éléments de E, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle L_n, f\rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} f^{(n)}(t) x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

   Indications : Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et si f et f' sont des éléments de E alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-x/2} = 0.$$

4. Que peut-on dire de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Soit a un réel positif, on définit $f_a(x) = \mathrm{e}^{-ax}$, montrer que $\|f_a\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_a, L_n\rangle^2$.
6. Établir que $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ engendre un sous-espace dense dans $(E, \|\cdot\|)$.
7. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E.

8. Montrer que :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, L_n \rangle^2 .$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Pour n entier naturel non nul, on note $\delta(n)$ le nombre de points à coordonnées entières dans le disque fermé $\overline{\mathscr{D}}(O, n)$, soit :

$$\delta(n) = \operatorname{card}(\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x^2 + y^2 \leq n^2\}).$$

Évaluer $\delta(n)$ et déterminer un équivalent de $\delta(n)$ au voisinage de $+\infty$.

Séquence n° 18

Fiche TD Analyse VII

$\boxed{1}$ Résoudre l'équation différentielle :

$$(1-t^2)y' - ty = 1. \tag{E}$$

$\boxed{2}$ 1. Montrer que si f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout entier naturel n, on a $\int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $f = 0$.

2. (a) Que peut-on conjecturer si l'on remplace le segment $[a,b]$ par $[0,+\infty[$?

   (b) Soient z un nombre complexe dont la partie réelle est strictement positif et n un entier naturel, montrer que la fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-zt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On pose

   $$I_n(z) = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t.$$

   Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}(z)$ et $I_n(z)$, en déduire $I_n(z)$.

   (c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

   $$f(t) = \sin(t^{1/4})\exp(-t^{1/4}).$$

   Montrer que, pour tout entier naturel n, on a

   $$\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

   (d) Conclure.

3. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la valeur de cette intégrale est nulle. Donner un exemple de suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0.$$

$\boxed{3}$ Soient $E = \mathscr{C}^{[0,1]}(\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de F lorsque E est muni de la norme de la convergence uniforme. Pour f élément de E, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

2. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de F lorsque E est muni de la norme de la convergence en moyenne. Pour f élément de E, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{4}$ Soient c un réel positif et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) La fonction f est c-lipschitzienne.

(ii) La fonction f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \left|f_n'(x)\right|\leq c.$$

(iii) La fonction f est limite simple sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \left|f_n'(x)\right|\leq c.$$

5 Soient $U=(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $V=(v_n)_{n\geq 1}$ la suite des moyennes de Césaro définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}.$$

Définition 18.1 On dit qu'une suite U *converge au sens de Césaro* vers ℓ si et seulement si la suite V converge vers ℓ.

1. Montrer que la suite U converge vers ℓ alors la suite V converge vers ℓ.
2. Si la suite V converge vers ℓ, que peut-on dire pour la suite U ?
3. Soit $W=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(w_n-w_{n-1})=a.$$

   Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.
4. Soit $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty.$$

   Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.
5. Soit U une suite à valeurs réelles, monotone et V la suite des moyennes de Cesaro qui converge vers ℓ. Que peut-on dire pour la suite U ?
6. Soit $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0\in\mathbb{R}_+^*,\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

   (a) La suite U est-elle convergente ?

   (b) On définit la suite $V=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout entier naturel n, par $v_n=\frac{1}{u_n^2}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_n)$, en déduire un équivalent de v_n.

6 Soient x un réel positif et f une fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par :

$$f(t)=\begin{cases}\sinh(xt) & \text{si } t\in\,]-\pi,\pi[\\ 0 & \text{si } t=\pi\end{cases}.$$

Développer en série de Fourier la fonction f.

7 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n=\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{\sqrt{p(n-p)}}{n^2}\right).$$

Séquence n° 19

Fiche TD Analyse VIII

19.1 Exercice

1. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \max(\sin t, 0)$.
2. Résoudre l'équation différentielle :
$$y'' + y = \max(\sin t, 0). \tag{E}$$

19.2 Problème

Soit E un espace préhilbertien complexe. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire et d la distance associée à la norme.

Définition 19.1 (Convexe). Soit X une partie de E. X est dite *convexe* si et seulement si :
$$\forall (x, y) \in X^2,\ \forall \alpha \in [0,1], \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in X.$$

Définition 19.2 (Segment de E). Soient a et b deux éléments de E. Le *segment d'extrémité a et b* est l'ensemble des barycentres des points pondérés (a, t) et $(b, 1-t)$ avec t élément de $[0,1]$, on le note $[a, b]$.

PROPRIÉTÉ 19.3 Une partie X de E est *convexe* si et seulement si, pour tout x et y élément de X, le segment $[x, y]$ est contenu dans X.

19.2.1 Partie 1 : Exemples de parties convexes

Pour n entier naturel non nul, on particularise $E = \mathbb{R}^n$.

1. Soit r un réel positif et $D = \{x \in E,\ \|x\| \leq r\}$. Montrer que D est une partie convexe de E.
2. Soit I un ensemble non vide et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de E. Montrer que $\bigcap_{i\in I} X_i$ est une partie convexe de E.
3. Montrer que l'adhérence d'une partie convexe X est convexe.
4. Montrer que tout sous-espace affine de E est une partie convexe de E.
5. Une partie S de E est dite *stable par demi-somme* si et seulement si :
$$\forall (x, y) \in S^2, \quad \frac{x+y}{2} \in S.$$
   (a) Montrer qu'une partie S stable par demi-somme n'est pas nécessairement convexe.
   (b) Montrer qu'une partie S stable par demi-somme qui de plus est fermée est une partie convexe de S.

19.2.2 Partie 2 : enveloppes convexes

Pour n entier naturel non nul, on particularise $E = \mathbb{R}^n$.

Définition 19.4 (Enveloppe convexe). Soit X une partie de E. On appelle *enveloppe convexe* de X et on note $\operatorname{conv}(X)$, l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant X.

On note $\langle X\rangle$ le sous-espace affine engendré par X, c'est-à-dire l'intersection de tous les sous-espaces affines de E contenant X.

1. Montrer que l'enveloppe convexe de X est la plus petite partie convexe au sens de l'inclusion qui contient X et que $\operatorname{conv}(X) \subset \langle X\rangle$.
2. (a) Pour toutes parties X et Y dans E, montrer que :
$$X \subset Y \Rightarrow \operatorname{conv}(X) \subset \operatorname{conv}(Y).$$
   (b) Montrer que la partie X est convexe si et seulement si X est égale à son enveloppe convexe.
   (c) Pour toute partie X de E, montrer que $\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(X)) = \operatorname{conv}(X)$.
3. Soit X une partie non vide de E.
   (a) Montrer que si X est une partie convexe de E, tout barycentre à poids positif d'une famille finie de points de X est dans X.
   (b) Montrer dans le cas général que l'enveloppe convexe de X est égal à l'ensemble des barycentres des familles finies de points de X affectés de poids positifs (qu'on note X_+).
4. On suppose $n = 2$. Soit $X = \{a, b, c\}$ un ensemble de trois points. Déterminer l'enveloppe convexe de la partie X de E.
5. Soit C une partie convexe de E et m un élément de C. On dit que le point m est *extrémal* si et seulement si :
$$\forall (a,b) \in C^2, \quad [m \in [a,b] \Rightarrow m = a \text{ ou } m = b].$$
   On suppose que l'entier n est égal à 2. Déterminer les points extrémaux des parties convexes suivantes :
   (a) Un segment d'extrémités distinctes.
   (b) Un disque fermé.
   (c) Un disque ouvert.
   (d) Un carré (intérieur et bord).
   (e) La partie $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\right\}$.
6. Soit X une partie convexe compact de E et a un point de $E \setminus X$.
   (a) Montrer qu'il existe un point b de X tel que :
$$\forall x \in X, \quad \|a - x\| \leq \|a - b\|.$$
   (b) Montrer qu'un tel point b est extrémal.
7. Soit C une partie convexe de E. Montrer qu'un élément x de C est extrémal si et seulement si $C \setminus \{x\}$ est convexe.

19.2.3 Partie 3 : projection orthogonale sur un convexe complet

Soit C une partie convexe, complète et non vide de E.

1. Montrer que, pour tout x élément de E il existe un unique élément y_0 de C tel que :
$$\left\|x - y_0\right\| = \inf_{y\in C} \left\|x - y\right\|.$$
   Indication : justifier l'existence de y_0 en utilisant la **caractérisation de Cantor** pour les espaces complets.
2.

Définition 19.5 (Projection orthogonale). La fonction p_C définit sur E par $p_C(x) = y_0$ est appelée *projection orthogonale sur* C.

Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E \times C, \quad \mathrm{Re}(\langle x - p_C(X), y - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

3. Montrer que la fonction p_C est 1-lipschitzienne.
4. Montrer que l'on a $p_C \circ p_C = p_C$.
5. Montrer que $p_C(E) = C$.

19.2.4 Partie 4 : projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel complet de E

Soit F un sous-espace vectoriel complet de E.

1. Montrer que :
$$\forall (x, z) \in E \times F, \quad \langle x - p_F(x), z\rangle = 0.$$
2. Montrer que p_F est une application linéaire continue sur E.
3. Déterminer la norme de p_F lorsque F n'est pas réduit à $\{0\}$.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(p_F)$ et $\mathrm{Im}(p_F)$, montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$.
5. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels complets de E tels que $G \subset F$ alors :
$$p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_G.$$

Séquence n° 20

Fiche TD Analyse IX

L'objectif de ce problème est de proposer plusieurs méthodes pour prouver **le théorème d'approximation de Weierstrass** :

THÉORÈME 20.1 (THÉORÈME D'APPROXIMATION DE WEIERSTRASS). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Toute fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur le segment $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

On désigne par E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ normé par la norme de la convergence uniforme, si f est un élément de E, on note :

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Soit n un entier naturel, on note e_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(t) = t^n$.

20.1 Partie 1 : méthode des polynômes de Bernstein

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit n un entier naturel non nul, on définit sur E l'opérateur B_n par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(f)(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f(p/n)x^p(1-x)^{n-p}.$$

1. Calculer $B_n(e_0)$, $B_n(e_1)$ et $B_n(e_2)$.
2. Pour tout réel x, déterminer
$$\frac{1}{n^2}\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}.$$
3. Proposer une démonstration du théorème d'approximation de **Weierstrass**.

20.2 Partie 2 : méthode de Korovkin

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 20.2 Un endomorphisme T de E est appelé *endomorphisme positif* si et seulement si, pour tout élément f de E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $T(f)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

1. Soient u un endomorphisme positif de E, f et g deux éléments de E.
   (a) Montrer que si $f \le g$ alors $u(f) \le u(g)$;
   (b) Montrer que, pour tout f élément de E, on a $|u(f)| \le u(|f|)$.
   (c) Montrer que u est continu et calculer sa norme.

2. Soient ε un réel strictement positif et f un élément de E, montrer qu'il existe un réel δ strictement positif tel que :
$$\forall (x,y)\in[0,1]^2,\quad \left|f(x)-f(y)\right|\leq \varepsilon+\frac{2\left\|f\right\|}{\delta^2}(x-y)^2.$$
3. Montrer que l'opérateur de Bernstein B_n est positif, continu et calculer sa norme.
4. Soit i un entier compris entre 0 et 2, montrer que la suite de fonctions $(B_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction e_i.
5. Proposer une démonstration du théorème d'approximation de **Weierstrass**.
6. Donner une démonstration du **théorème de Korovkin :**

THÉORÈME 20.3 (THÉORÈME DE KOROVKIN). Soient a et b deux réels tels que $a<b$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathscr{C}^{[a,b]}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i élément de $\{0,1,2\}$, la suite $(u_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers e_i alors, pour toute fonction f de $\mathscr{C}^{[a,b]}(\mathbb{R})$, la suite $\big(u_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

20.3 Partie 3 : méthode par convolution

On suppose $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Une suite de fonctions $\big(\varphi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathscr{U}$-suite de fonctions si et seulement si, pour tout entier naturel n :
— les fonctions φ_n sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$,
— les fonctions φ_n sont nulles sur $]-\infty,1]\cup intfo1{+}\infty$,
— $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t=1$,
— pour tout δ strictement positif, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\ \sup_{x\in]-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty[}\varphi_n(x)=0.$$

On définit la suite de fonctions $\big(\varphi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x} & \text{si } x\in[-1,1]\\[2ex] 0 & \text{si } x\notin[-1,1]\end{cases}.$$

1. Montrer que la suite $\big(\varphi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathscr{U}$-suite.
2. On suppose que cette question que la fonction f est continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ et $f(0)=f(1)=0$.
   (a) Montrer que la fonction f admet un prolongement $\tilde{f}$ uniformément continu sur $\mathbb{R}$.
   (b) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction Q_n par
   $$Q_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(x+t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Pour tout entier naturel n, montrer que la fonction Q_n est une fonction polynomiale sur $[0,1]$;
   (c) Montrer que la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $\tilde{f}$.
3. Proposer une autre démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass.
4. Que peut-on dire si la convergence vers la fonction $\tilde{f}$ de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes est uniforme sur $\mathbb{R}$?

20.4 Partie 4 : méthode utilisant le noyau de Fejer

On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On note $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit F un élément de $\mathscr{C}_{2\pi}$ et n un entier, on note ζ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
— $\zeta_n(t)=\mathrm{e}^{int}$.
— $\hat{F}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$: le n^{e} coefficient de Fourier exponentiel de la fonction f.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(F) = \sum_{p=-n}^{p=n} \hat{F}(p)\zeta_p$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(F) = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} S_p(F)$: la moyenne de Césaro de la somme partielle de la série de Fourier.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \sum_{p=-n}^{n} \zeta_p$: le noyau de Dirichlet.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} D_p$: le noyau de Féjer est la moyenne de Césaro des noyaux de Dirichlet.
On rappelle le **théorème de Féjer :**

THÉORÈME 20.4 (THÉORÈME DE FÉJER). Si F est une fonction continue, 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ alors la série de Fourier de la fonction F converge uniformément au sens de Césaro sur $\mathbb{R}$ vers la fonction F, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\sigma_n(F)(x) - F(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty}\|\sigma_n(F) - F\| = 0.$$

1. Si f et g sont éléments de $\mathscr{C}_{2\pi}$, on définit le *produit de convolution de f et g* sur $[-\pi,\pi]$ par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que le produit de convolution est commutatif.

2. Soit F un élément de $\mathscr{C}_{2\pi}$.
   (a) Pour tout entier p, calculer $F * \zeta_p$.
   (b) Pour n entier naturel, calculer $F * D_n$ puis $F * K_n$.
3. Pour tout entier naturel n, montrer que

$$K_n = \sum_{p=-n}^{n}\left(1 - \frac{|p|}{n+1}\right)\zeta_p.$$

En déduire que

$$\sigma_n(F) = \sum_{p=-n}^{n}\left(1 - \frac{|p|}{n+1}\right)\hat{F}(p)\zeta_p.$$

4. Pour tout entier naturel n, on note T_n le polynôme de Tchebychev de première espèce, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

Pour tout entier naturel n et pour toute fonction f de $\mathscr{C}^{[-1,1]}(\mathbb{C})$, on pose $F(t) = f(\cos t)$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sigma_n(F)(x) = \hat{F}(0) + 2\sum_{p=1}^{n}\left(1 - \frac{p}{n+1}\right)\hat{F}(p)T_p(\cos x).$$

5. Proposer une autre démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass.

20.5 Partie 5 : méthode probabiliste

Définition 20.5 (Moment d'une variable aléatoire discrète). Soient Ω un ensemble dénombrable, $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé discret et ν un entier naturel non nul. On dit qu'une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = (x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ a un *moment d'ordre* ν si et seulement si la série $\sum_{p\geq 0} x_p^\nu P(X = x_p)$ est absolument convergente.

Dans ce cas, la somme de la série est appelé *moment d'ordre* ν et on note :

$$m_\nu(X) = \sum_{p=0}^{+\infty} x_p^\nu P(X = x_p).$$

On note :
— **l'espérance mathématique** $\mathbf{E}(X) = m_1(X)$,
— **la variance** $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = m_2(X) - m_1(X)^2$.

THÉORÈME 20.6 (THÉORÈME DU TRANSFERT). Soient Ω un ensemble dénombrable, $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé discret, X une variable aléatoire discrète, $\Omega' = X(\Omega)$ et h une fonction de Ω' dans $\mathbb{R}$. On note $Y = h \circ X$, la variable aléatoire Y a un moment d'ordre 1 si et seulement si la série $\sum_{x \in \Omega'} h(x)P(X = x)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on a

$$\mathbf{E}(h(X)) = \sum_{x \in \Omega'} h(x)P(X = x).$$

1. **Inégalité de Markov** Soit X une variable aléatoire réele positive, discrète admettant un moment d'ordre 1, montrer que :
$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$
2. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, montrer que :
$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$
3. Soient f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé discret, pour tout réel x élément de $[0,1]$, on définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de mêm loi de Bernouilli de paramètre x. Pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel x élément de $[0,1]$, on note
$$S_{n,x} = \sum_{p=1}^{n} X_p.$$
Déterminer la moyenne $\mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)\right)$.
4. Pour tout réel ε strictement positif, montrer qu'il existe un réel δ strictement positif tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathscr{C}^{[0,1]}(\mathbb{R}), \quad \left\| B_n(f) - f \right\| \leq \varepsilon + \frac{2\left\| f \right\|}{n\varepsilon^2}.$$
5. Conclure.

Séquence n° 21

Fiche TD Analyse X - Développement en série entière d'une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

On définit une fonction F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 1 \\ \exp\left(-\frac{z}{1-z}\right) & \text{si } z \neq 1 \end{cases}.$$

On note $\Delta = \mathscr{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

L'objectif de ce problème est de montrer que la fonction F est développable en série entière au voisinage de 0 et d'étudier quelques propriétés de la suite des coefficients de cette série entière.

21.1 Partie 1 : préliminaires

1. Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif et r un réel élément de $]0,R[$. On définit la fonction f sur le disque ouvert de centre O et de rayon R par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

   (b) On note $M(r) = \sup\left\{\left|f(z)\right|,\ |z| = r\right\}$. Montrer l'*inégalité de Cauchy* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

2. Soient A et B deux parties de $\mathbb{C}$ qui contiennent le point 0, f une fonction de A dans B telle que $f(0) = 0$, développable en série entière au voisinage de 0 et g une fonction de B dans $\mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0 alors la fonction $g \circ f$ est développable en série entière au voisinage de 0.
3. Soit ν un entier naturel non nul, montrer par récurrence la propriété :

$$\mathscr{P}(\nu) : « \forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1, \quad \frac{1}{(1-z)^\nu} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\nu - 1 + n}{n} z^n. »$$

21.2 Partie 2 : développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction F

1. Soit ν un entier naturel, on définit la fonction Φ_ν sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par

$$\Phi_\nu(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu.$$

Montrer qu'il existe une suiet $\left(a_{\nu,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers naturels telle que :

$$\forall z\in\Delta,\quad \Phi_\nu(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{\nu,n}z^n.$$

2. (a) Montrer que la série $\sum_{\nu\geq 0}\frac{(-1)^\nu a_{\nu,n}}{\nu!}$ converge. On pose $b_n=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\nu a_{\nu,n}}{\nu!}$.
   (b) Calculer b_0, b_1 et b_2.
3. Soit z un élément de Δ, montrer que la famille $\left(u_{n,p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ définie par :

$$u_{n,p}=(-1)^n\frac{a_{n,p}}{n!}z^p,$$

est sommable.
Indication : on peut utiliser le théorème d'inversion des sommes.

THÉORÈME 21.1 (THÉORÈME D'INVERSION DES SOMMES). Si $\left(u_{n,p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est une suite double à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui vérifient les hypothèses :
(H_1) pour tout entier naturel n, la série $\sum_{p\geq 0}\left|u_{n,p}\right|$ converge, on note $s_n=\sum_{p=0}^{+\infty}\left|u_{n,p}\right|$,
(H_2) la série $\sum_{n\geq 0}s_n$ converge,
alors la famille $\left(u_{n,p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{n,p}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,p}\right).$$

4. Montrer que la fonction F est développable en série entière au voisinage de 0 et :

$$\forall z\in\Delta,\quad F(z)=\sum_{p=0}^{+\infty}b_pz^p.$$

On désigne par R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}b_nz^n$, il est immédiat que R est supérieur ou égal à 1.

21.3 Partie 3 : rayon de convergence de la série entière et majoration des coefficients

On désigne par Δ' l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z|\leq 1$ et $z\neq 1$.

1. Pour tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels, déterminer $\ln|F(z)|$ en fonction de x et y.
2. Soit z un nombre complexe, on note $M(z)$ le point M du plan complexe d'affixe z. Soit λ un réel positif, on désigne par $\mathscr{C}_\lambda$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|F(z)|=\lambda$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}_\lambda$ et indiquer la nature des courbes $\mathscr{C}_\lambda$.
3. Déterminer la borne supérieure de l'ensemble $\left\{|F(z)|,\ z\in\Delta'\right\}$. La borne supérieure est-elle atteinte ? Si oui, en quels points ?
4. (a) La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$?
   (b) La fonction F est-elle continue en 1 ?
   (c) La restriction de la fonction F à Δ' a-t-elle une limite en 1 ?
5. (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0}b_nz^n$.
   (b) La série $\sum_{n\geq 0}|b_n|$ est-elle convergente ?
6. (a) Soit r un réel compris strictement entre 0 et 1, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad b_nr^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi}F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta\right).$$

   (b) Pour tout entier naturel n, montrer que l'intégrale $\int_0^\pi F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta$ converge.

(c) Pour tout entier naturel n, déterminer

$$\lim_{r\to 1^-}\int_0^{\pi} F(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.$$

7. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
8. Soit n un entier naturel non nul, on définit la fonction u_n sur $]0,\pi/2]$ par :

$$u_n(t) = 2nt + \frac{\operatorname{cotan} t}{2}.$$

Étudier les variations et le signe des fonctions u_n, u_n' et u_n''. Préciser, en fonction de n, la valeur de l'unique zéro T_n de la fonction u_n' et calculer l'extremum de la fonction u_n.

9. (a) Montrer l'existence et l'unicité d'un couple de réels (α_n, β_n) tel que :

$$\begin{cases} 0 < \alpha_n < T_n < \beta_n < \frac{\pi}{2} \\ -u_n'(\alpha_n) = u_n'(\beta_n) = n^{3/4} \end{cases}$$

(b) Montrer que $u_n''(\beta_n) \geq 2n^{3/2}$.

(c) En déduire une majoration de $\beta_n - \alpha_n$.

10. Soit n un entier naturel non nul, on définit les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \exp(iu_n(t))\,dt, \quad J_n = \int_0^{\alpha_n} \exp(iu_n(t))\,dt.$$

$$K_n = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \exp(iu_n(t))\,dt \quad \text{et} \quad L_n = \int_{\beta_n}^{\pi/2} \exp(iu_n(t)).$$

(a) Majorer K_n.

(b) Montrer que $|L_n| \leq \frac{2}{n^{3/4}}$.

(c) Majorer $|J_n|$.

(d) Montrer qu'il existe une constante entière C telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |b_n| \leq \frac{C}{n^{3/4}}.$$

Troisième partie

Entraînement aux épreuves

Séquence n° 22

Ep.1 - CAPES Externe 2004-C2

Rappels et notations

— $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices à coefficients réels et à trois lignes et trois colonnes. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A[i,j]$ le coefficient de A dont l'indice de ligne est égal à i et l'indice de colonne est égal à j.

— $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est le sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices dont les coefficients sont entiers.

1. Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $\langle u, v\rangle$. La norme euclidienne d'un vecteur v est notée $\|v\|$. La distance associée à cette norme est notée d. Si u et v sont deux vecteurs de **E**, on a donc $d(u, v) = \|u - v\|$.

E est rapporté à une base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.

On note $\mathbf{S}^2$ la sphère unité de **E** :

$$\mathbf{S}^2 = \{v \in \mathbf{E},\ \|v\| = 1\}.$$

On note $\mathrm{id}_{\mathbf{E}}$ l'application identique de **E**.

$\mathcal{O}(\mathbf{E})$ est le groupe des automorphismes orthogonaux de **E**.

Si f et g sont deux élements de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$, on note fg au lieu de $f \circ g$ l'automorphisme composé de g et de f.

On rappelle que :

— Le déterminant d'un automorphisme orthogonal est égal à 1 ou à -1.

— Les rotations vectorielles (ou plus simplement les rotations) sont les éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$ dont le déterminant est égal à 1. Leur ensemble noté $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$.

— D étant une droite vectorielle de **E**, on appelle demi-tour d'axe D la symétrie orthogonale par rapport à D ; il s'agit d'une rotation vectorielle.

— $\mathcal{SO}(3)$ est le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. Rappelons que l'application qui à toute rotation de **E** associe la matrice qui la représente dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ sur $\mathcal{SO}(3)$.

2. Ensembles dénombrables

On rappelle que :

— Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

— L'image d'un ensemble dénombrable par une application est encore un ensemble dénombrable.

— Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

3. Partitions

Soit A un ensemble non vide. On rappelle que la famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de A constitue une partition de A si :

(i) Aucun des sous-ensembles A_i n'est vide.

(ii) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

(iii) $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

4. Groupes, sous-groupes engendré par une partie

— Étant donné un groupe $(\mathbf{G},\cdot)$ dont la loi est notée multiplicativement, g étant un élément de $\mathbf{G}$, l'application de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G}$: $h \mapsto gh$ est bijective. Si $\mathbf{H}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on note

$$g\mathbf{H} = \left\{gh,\ h \in \mathbf{H}\right\}.$$

— Étant donné un groupe $(\mathbf{G},\cdot)$ dont la loi est notée multiplicativement et S un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on appelle sous-groupe engendré par S le plus petit sous-groupe de $\mathbf{G}$ contenant S ; c'est l'intersection de tous les sous-groupes de $\mathbf{G}$ qui contiennent S.

5. Déplacements

On note $\mathrm{Dep}(\mathbf{E})$ l'ensemble des déplacements de $\mathbf{E}$ lorsque ce dernier est muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien sur lui-même. On rappelle que $(\mathrm{Dep}(\mathbf{E}),\circ)$ est un groupe.

Préliminaires

Soit Ω un ensemble quelconque non vide, A et B étant sous-ensembles de Ω, on note $A\backslash B$ l'intersection de A et du complémentaire de B ; en d'autres termes :

$$A\backslash B = \{x \in X,\ x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

$\mathfrak{S}(\Omega)$ désigne le groupe des bijections de Ω sur lui-même.

Soit f appartenant à $\mathfrak{S}(\Omega)$; si A est un sous-ensemble de Ω, on note $f(A)$ le sous-ensemble de Ω dont les éléments sont les images des éléments de A :

$$f(A) = \left\{y \in \Omega,\ \exists x \in A,\ f(x) = y\right\}.$$

On rappelle que :

(i) $f(A) = \emptyset$ si et seulement si $A = \emptyset$.

(ii) Si A et B sont deux sous-ensembles de X, on a :

$$A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B).$$

(iii) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de X indexée par l'ensemble I, on a :

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

(iv) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de X indexée par l'ensemble I, on a :

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

(v) Si A et B sont deux sous-ensembles de X, on a :

$$f(A\backslash B) = f(A)\backslash f(B).$$

1. Démontrer les propriétés (iv) et (v).
2. Prouver ensuite que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω si et seulement si $\left(f(A_i)\right)_{i\in I}$ est une partition de Ω.

22.1 Partie I : Quelques propriétés des rotations de l'espace E

1. Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de $\mathbf{E}$.
   (a) On suppose que ρ_1 et ρ_2 ont le même axe. Prouver que $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$.
   (b) On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours d'axes respectifs D_1 et D_2 orthogonaux. Prouver que $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$ et déterminer cette rotation.
2. *Réciproque :* Soit ρ une rotation vectorielle distincte de $\mathrm{id}_{\mathbf{E}}$, d'axe $D = \mathbb{R}\omega$ où $\|\omega\| = 1$.
   (a) Soit Δ une droite vectorielle distincte de D et telle que $\rho(\Delta) = \Delta$. Prouver que D et Δ sont orthogonales et que ρ est un demi-tour.

(b) Soit ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles distinctes de $\mathrm{id}_{\mathbf{E}}$ dont les axes respectifs D_1 et D_2 sont distincts. Montrer que si $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$, alors D_1 est une droite invariante par ρ_2. En déduire que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux.

(c) Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments ρ_1, ρ_2 de $\mathscr{SO}(\mathbf{E})$ commutent (c'est-à-dire $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$).

3. *Soient* ρ_1 *et* ρ_2 *deux rotations vectorielles de* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{G}$ *le sous-groupe de* $\mathscr{SO}(\mathbf{E})$ *engendré par* ρ_1 *et* ρ_2. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont les rotations d'angles respectifs α_1, α_2 autour de la droite D dirigée et orientée par le vecteur unitaire ω.

   (a) On note $\mathbf{H} = \left\{\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2},\ (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathscr{SO}(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

   (b) On suppose de plus que l'égalité
$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\pi = 0$$
où x, y, z sont des entiers relatifs n'est possible que si $x = y = z = 0$. Démontrer que pour tout $r \in \mathbf{G}$, il existe un *unique* couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $r = \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$.

4. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux. Démontrer que $\mathbf{G}$ contient exactement quatre éléments que l'on explicitera. On donnera la table du groupe de $\mathbf{G}$.

5. On suppose que ρ_1 et ρ_2 ne commutent pas. On note $\mathbf{H}$ le sous-ensemble de $\mathscr{SO}(\mathbf{E})$ formé des éléments de la forme $s_1^{a_1}s_2^{a_2}\cdots s_n^{a_n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \left\{\rho_1, \rho_2\right\}^n$, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

   (a) Démontrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathscr{SO}(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

   (b) Soit $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\}$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ appartenant à $\left\{\rho_1, \rho_2\right\}^n$, une fammille $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ appartenant à $(\mathbb{Z}^*)^n$ tels que :
$$g = s_1^{a_1}s_2^{a_2}\cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ s_i \neq s_{i+1}. \tag{22.1}$$

   Cette décomposition n'est en général pas unique (si ρ_1 *est un demi-tour, alors* $\rho_1 = \rho_1^3$*). Dans la partie suivante, on construit un exemple où cette fois la décomposition sera unique.*

22.2 Partie II : Étude d'un sous-groupe de $\mathscr{SO}(3)$.

On pose dans ce qui suit $\alpha = \arccos(3/5)$. I_3, R *et* T *sont les matrices de* $\mathscr{SO}(3)$ *définies par* :
$$I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

ρ *et* τ *sont les rotations de* $\mathbf{E}$ *de matrices respectives* R, T *dans la base* $\mathscr{B}$.

$\mathbb{G}$ est le sous-groupe de $\mathscr{SO}(3)$ engendré par $\{R, T\}$. $\mathbf{G}$ est le sous-groupe de $\mathscr{SO}(3)$ engendré par $\left\{\rho, \tau\right\}$. Il est manifestement isomorphe à $\mathbb{G}$.

On rappelle que la relation $p \equiv q \pmod 5$ *où* p *et* q *sont des entiers relatifs, signifie que* 5 *divise* $q - p$.

1. Pour tout entier *relatif* n, on pose
$$a_n = 5^{|n|}\cos(n\alpha) \quad \text{et} \quad b_n = 5^{|n|}\sin(n\alpha).$$

   (a) Factoriser $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha$. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :
$$a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1}.$$

   (b) Prouver que pour tout entier n supérieur ou égal à zéro :
$$b_{n+1} = 3b_n + 4a_n.$$

   (c) Prouver que pour tout entier *relatif* n, a_n et b_n sont des nombres relatifs.

   (d) Montrer que si n est différent de zéro, alors $a_n \equiv 3 \pmod 5$.

   (e) Montrer que si n est un entier strictement positif, alors $b_n \equiv 4 \pmod 5$.
   Montrer que si n est un entier strictement négatif, alors $b_n \equiv 1 \pmod 5$.

2. *On note* $\equiv$ *la relation définie sur* $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$ *par* $M \equiv M'$ *si et seulement si pour tout couple* (i,j) *de* $[\![1,3]\!]^2$ *on a :*

$$M[i,j] \equiv M'[i,j] \pmod 5.$$

On vérifie aisément qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$. *On ne demande pas de démontrer ce résultat.*

(a) Démontrer que cette relation est compatible avec le produit matriciel, c'est-à-dire si A, B, C, D sont des éléments de $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$ tels que $A \equiv B$ et $C \equiv D$ alors $AC \equiv BD$.

(b) Démontrer que pour tout entier k, $5^{|k|}R^k$ et $5^{|k|}T^k$ appartiennent à $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad 5^{|k|}R^k \equiv \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon_k & 0 \\ -\varepsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 5^{|k|}T^k \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_k \\ 0 & -\varepsilon_k & 3 \end{pmatrix}$$

où ε_k si $k > 0$ et $\varepsilon_k = -1$ si $k < 0$. Existe-il un entier relatif k différent de 0, tel que $R^k = I_3$ ou $T^k = I_3$?

(c) Démontrer que

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{Z}^*)^2, \quad 5^{|m|+|n|}T^m R^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & 2\varepsilon_m & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $(\mathbb{Z}^n)^*$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. On pose $q = \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)$. Démontrer que :

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont des entiers relatifs qui ne sont pas congrus à 0 modulo 5.

(e) En déduire que

$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \neq I_3 \tag{22.2}$$
$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} T^{\beta} \neq I_3. \tag{22.3}$$

3. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $(\mathbb{Z}^*)^n$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. Déduire des égalités précédentes que

$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} \neq I_3 \tag{22.4}$$
$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} R^{\beta} \neq I_3 \tag{22.5}$$

4. Conclure que pour tout g appartenant à $\mathbf{G} - \{\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\}$, il existe de *façon unique* un entier n strictement positif, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de $\{\rho, \tau\}^n$ et une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $(\mathbb{Z}^*)^n$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ s_i \neq s_{i+1}.$$

On appelle terme de tête de g l'élément s_1 *lorsque* $a_1 > 0$ *et* s_1^{-1} *lorsque* $a_1 < 0$. *Ce terme de tête sera noté* $t(g)$.

5. Démontrer que $\mathbf{G}$ est un ensemble dénombrable.

6. Pour tout élément σ de $\{\rho, \rho^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, on note $L(\sigma)$ l'ensemble des éléments g de $\mathbf{G} - \{\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\}$ pour lesquels $t(g) = \sigma$.

(a) Vérifier que :

$$\mathbf{G} = \{\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\} \cup L(\rho) \cup L(\rho^{-1}) \cup L(\tau) \cup L(\tau^{-1})$$

et que l'on obtient ainsi une partition de $\mathbf{G}$.

(b) Vérifier que :

$$L(\rho) = \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L(\tau^{-1})$$

et que l'on obtient ainsi une partition de $L(\rho)$. De la même manière on a :

$$L(\rho^{-1}) = \{\rho^{-1}\} \cup \rho^{-1} L(\rho^{-1}) \cup \rho^{-1} L(\tau) \cup \rho^{-1} L(\tau^{-1})$$
$$L(\tau) = \{\tau\} \cup \tau L(\tau) \cup \tau L(\rho) \cup \tau L(\rho^{-1})$$
$$L(\tau^{-1}) = \{\tau^{-1}\} \cup \tau^{-1} L(\tau^{-1}) \cup \tau^{-1} L(\rho) \cup \tau^{-1} L(\rho^{-1}).$$

On ne demande pas de démontrer ces trois égalités.

(c) En déduire que

$$\mathbf{G} = L(\rho) \cup \rho L(\rho^{-1}) = L(\tau) \cup \tau L(\tau^{-1})$$

et que, dans les deux cas, on obtient ainsi une partition de **G**.

22.3 Partie III : Étude de sous-ensembles de $\mathbf{S}^2$

Les données et les notations de cette partie sont celles de la Partie II. **G** est le sous-groupe de $\mathscr{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\{\rho, \tau\}$.

On considère l'ensemble :

$$F = \left\{v \in \mathbf{S}^2,\ \exists g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\},\ g(u) = v\right\}$$

et son complémentaire dans $\mathbf{S}^2$, soit $X = \mathbf{S}^2 \setminus F$.

1. Démontrer que l'ensemble F est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbf{S}^2$. En déduire que X n'est pas vide.
2. Vérifier que, pour tout $g \in \mathbf{G}$ et pour tout $v \in X$, $g(v) \in X$.
3. Démontrer que si g et h sont deux éléments de **G** tels qu'il existe v appartenant à X vérifiant $g(v) = h(v)$, alors $g = h$.
4. (a) Démontrer que pour tout g appartenant à **G**, la restriction de g à X induit une bijection de X sur lui-même que l'on notera g_X.

   (b) Démontrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbf{G} & \to & \mathfrak{S}(X) \\ & & g & \mapsto & g_X \end{array}$$

   est un homomorphisme injectif de groupes. Cela permet d'identifier **G** à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(X)$.
5. On considère la relation $\sim_{\mathbf{G}}$ définie sur X par

$$a \sim_{\mathbf{G}} b \Leftrightarrow \exists g \in \mathbf{G},\ a = g(b).$$

   Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

   On sait que les classes d'équivalences de $\sim_{\mathbf{G}}$ forment une partition de X. On admet alors en utilisant l'axiome du choix l'existence d'un sous-ensemble M de X dont l'intersection avec chaque classe d'équivalence contient un et un seul point.
6. Prouver que la famille $\left(g(M)\right)_{g\in\mathbf{G}}$ constitue une partition de X.
7. On pose :

$$X_0 = M,\ X_1 = \bigcup_{g\in L(\rho)} g(M),\ X_2 = \bigcup_{g\in L(\tau)} g(M), X_3 = \bigcup_{g\in L(\rho^{-1})} g(M),\ X_4 = \bigcup_{g\in L(\tau^{-1})} g(M).$$

   (a) Prouver que $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ constitue une partition de X.

   (b) Prouver que

$$X = X_1 \cup \rho(X_3) \quad \text{et} \quad X_1 \cap \rho(X_3) = \emptyset, \tag{22.6}$$
$$X = X_2 \cup \tau(X_4) \quad \text{et} \quad X_2 \cap \tau(X_4) = \emptyset. \tag{22.7}$$

8. On note $\Lambda = \{(u, v) \in F \times F,\ u \neq v\}$.

   (a) Vérifier que Λ est un ensemble dénombrable.

   (b) Si $(u, v) \in \Lambda$, on considère $\Gamma_{u,v} = \left\{w \in \mathbf{S}^2,\ \|w - u\| = \|w - v\|\right\}$. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

   (c) Soit $\Gamma = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v}$. Démontrer que $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine et que $\Gamma \cup F$ est strictement inclus dans $\mathbf{S}^2$.

   Indication : on pourra considérer l'intersection de $\Gamma \cup F$ avec un cercle tracé sur $\mathbf{S}^2$ qui ne soit pas centré à l'origine.

   (d) Démontrer qu'il existe un élément r de $\mathscr{SO}(\mathbf{E})$ dont l'axe ne rencontre pas $\Gamma \cup F$ et tel que :

$$\forall p \in \mathbb{Z}^*,\ r^p \neq \mathrm{id}_{\mathbf{E}}.$$

(e) Soit (u, v) appartenant à $F \times F$. Montrer que, pour tout entier k strictement positif, $r^k(u)$ est différent de v. On distinguera les cas : $u = v$ et $u \neq v$.
En déduire que si m et n sont deux entiers naturels distincts, alors

$$r^n(F) \cup r^m(F) = \emptyset.$$

(f) On pose

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} r^n(F) \quad \text{et} \quad Z = \mathbf{S}^2 \setminus Y.$$

Démontrer que

$$r(Y) \cap Z = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbf{S}^2 \setminus F = r(Y) \cup Z.$$

22.4 Partie IV : Équidécomposabilité

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbf{E}$. On dit que A est équidécomposable à B s'il existe une partition finie $(A_i)_{i\in I}$ de A, une partition finie $(B_i)_{i\in I}$ de B et une famille finie $\left(g_i\right)_{i\in I}$, de déplacements de $\mathbf{E}$ telles que

$$\forall i \in I,\ B_i = g_i(A_i)$$

(les trois familles sont indexées par un même ensemble fini I). On écrira alors $A \sim B$.

1. Les notations étant celles de la question III.8, vérifier que $\mathbf{S}^2$ est équidécomposable à $\mathbf{S}^2 \setminus F$.
2. Soient A_1, A_2, B_1, B_2 des sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ tels que :

$$A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset,\ A_1 \sim B_1,\ A_2 \sim B_2.$$

   (a) Vérifier que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.
   (b) Généraliser.
3. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbf{E}$.
   Pour démontrer la transitivité, on observera que si $(A_i)_{i\in I}$ et $\left(A'_j\right)_{j\in J}$ sont deux partitions de A, et que si l'on pose

$$K = \left\{(i, j) \in I \times J,\ A_i \cap A'_j \neq \emptyset\right\}$$

   alors la famille $\left(A_i \cap A'_j\right)_{(i,j)\in K}$ est encore une partition de A.
4. On suppose que $A \sim B$. Démontrer qu'il existe une bijection ϕ de A sur B telle que pour tout sous-ensemble non vide C de A, on ait :

$$C \sim \phi(C).$$

Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$. On posera $A \preccurlyeq B$ lorsqu'il existe un sous-ensemble non vide B' de B tel que $A \sim B'$. En particulier, si $A \sim B$ alors $A \preccurlyeq B$.

La relation $\preccurlyeq$ est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbf{E}$. Les preuves sont analogues à celles des questions précédentes. On observera par ailleurs que si A et B sont des sous-ensembles non vides de X tels que $A \subset B$, il est évident que $A \preccurlyeq B$.

On admettra dans la suite du problème le théorème de Banach-Schröder-Bernstein qui s'énonce de la manière suivante :

THÉORÈME 22.1 (BANACH-SCHRÖDER-BERNSTEIN). Si A et B sont deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ tels que $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq A$, alors $A \sim B$.

22.5 Partie V : Ensembles paradoxaux

Les définitions et les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.

Définition 22.2 (Ensemble paradoxal). Un sous-ensemble A de $\mathscr{E}$ est *paradoxal* s'il existe deux sous-ensembles non vides B, C de A tels que

$$B \sim A,\ C \sim A \quad \text{et} \quad B \cap C = \emptyset. \tag{22.8}$$

1. Les notations étant celles de la partie III, vérifier que X est paradoxal.
2. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ telles que $A \sim B$. Démontrer que si A est paradoxal, alors il en est de même de B.
   On pourra utiliser le résultat de la question 4 de la partie IV.
3. Soit A un sous-ensemble paradoxal de $\mathscr{E}$, B, C deux sous-ensembles de A non vides vérifiant les relations (22.8).
   (a) En utilisant le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, démontrer que $(A \setminus C) \sim A$.
   (b) En déduire qu'il existe une partition (A_1, A_2) de A telle que :
   $$A_1 \sim A \quad \text{et} \quad A_2 \sim A.$$
4. Démontrer que $\mathbf{S}^2$ est paradoxal.
5. En déduire que si Σ_1 et Σ_2 sont deux sphères disjointes de rayon 1 alors
   $$\mathbf{S}^2 \sim \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

Séquence n° 23

Ep.2 - CAPES Interne 1994-C2

L'objectif du problème est d'étudier la convergence vers *la constante d'Euler* d'un certain nombre de suites et d'appliquer les résultats obtenus à la recherche d'une approximation du nombre moyen de diviseurs d'un entier. Quand les limites ci-dessous ont un sens, on notera :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n}^{N} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Certaines démonstrations utilisent la propriété « triviale » des séries dites télescopiques :

$$\sum_{k=n}^{N}(r_k - r_{k+1}) = r_n - r_{N+1}.$$

La partie III est indépendante de la partie II. Elle utilise un résultat de la question 3.e. de la partie I.

23.1 Partie I

On considère les suites suivantes, définies pour n entier, $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad u_n = S_n - \ln n.$$

1. **Limite de la suite** (u_n)
   (a) Montrer que pour tout k entier, $k \geq 2$, on a :
   $$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k-1}.$$
   En déduire que $S_n \geq \ln n$ et que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$.
   (b) i. On considère la fonction h qui à tout $x \geq 0$ associe $h(x) = x - \ln(x+1)$. Étudier le sens de variation de h et en déduire le signe de $h(x)$ quand x est positif.
   ii. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et bornée. En déduire qu'elle admet une limite notée γ et $\gamma \in [0,1]$. γ est appelé constante d'Euler.
2. **Une première approximation de la vitesse de convergence**
   On pose
   $$w_k = \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{k}$$
   où k est un entier, $k \geq 2$.
   (a) Vérifier que $0 \leq w_k \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
   (b) Montrer que $u_n = 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k$ et que $\sum_{k=2}^{\infty} w_k = 1 - \gamma$.
   (c) On pose $r_n = S_n - \ln n - \gamma$. Montrer que $r_n = \sum_{k=2}^{\infty} w_k$ et prouver que $0 \leq r_n \leq \frac{1}{n}$.
   À partir de quelle valeur de n peut-on prétendre que u_n donne une approximation à 10^{-6} près de γ ?

3. **On désire maintenant préciser le comportement de la suite** (r_n)

   (a) Par des intégrations par parties successives, montrer que :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{(u+k-1)^4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{k^2}\right]-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\int_0^1 \frac{u\,\mathrm{d}u}{(u+k-1)^2}.$$

   (b) Démontrer les égalités suivantes :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{(u+k-1)^4}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^2(1-u)^2}{(u+k-1)^5}\,\mathrm{d}u$$

$$\int_0^1 \frac{u\,\mathrm{d}u}{(u+k-1)^2} = \int_{k-1}^k \frac{t-k+1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   (c) Montrer que :

$$w_k = \int_{k-1}^k \frac{t-k+1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$w_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{12}\left[\left(\frac{1}{k-1}\right)^2-\frac{1}{k^2}\right]+\int_0^1 \frac{[u(1-u)]^2}{(u+k-1)^5}\,\mathrm{d}u.$$

   (d) Montrer que si $u \in [0,1]$ alors $0 \leq u(1-u) \leq \frac{1}{4}$. Établir l'inégalité

$$\int_0^1 \frac{[u(1-u)]^2}{(u+k-1)^5}\,\mathrm{d}u \leq \frac{1}{16}\int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}t}{t^5}.$$

   (e) En déduire les encadrements suivants :

$$0 \leq r_n - \frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{64n^4},$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n-\gamma \leq \frac{1}{2n},$$

$$0 \leq v_n-\gamma \leq \frac{1}{64n^4},$$

   où $v_n = S_n - \ln n - \frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}$.

   (f) À partir de quelle valeur de n la suite (v_n) donne-t-elle une approximation à 10^{-6} près de γ ?

23.2 Partie II

On va modifier la suite (u_n) en remplaçant $\ln n$ par $\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Ce changement va augmenter la vitesse de convergence de la suite vers γ. On pose :

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

1. **Étude préalable d'une fonction**

   On considère la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{3}{2}\right).$$

   (a) Étudier le sens de variation de f et ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.

   (b) Montrer que $-f'(x) \leq \frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^4}$. Démontrer par un raisonnement accessible à des élèves de terminale S que l'expression

$$\int_k^{\infty} -f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\int_k^X -f'(x)\,\mathrm{d}x$$

   a un sens et que l'on peut écrire $f(k) = \int_k^{\infty} -f'(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{12\left(k+\frac{1}{2}\right)^3}$.

2. **Application à l'étude de la suite** (x_n)
   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \gamma$.
   (b) Montrer que $x_k - x_{k+1} = f(k)$. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et que $x_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$.
   (c) On veut majorer $f(k)$ par une expression facilement manipulable. Montrer d'abord que :
   $$\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 > k(k+1).$$
   En déduire que
   $$\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}.$$
   (d) Déduire des questions précédentes la majoration suivante :
   $$0 \leq x_n - \gamma \leq \frac{1}{24n^2}.$$
3. **On veut obtenir une borne inférieure pour la quantité** $x_n - \gamma$
   (a) Montrer que
   $$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right) < (x+1)^2.$$
   (b) Par une étude identique à celle de la question 1.b., démontrer que :
   $$f(k) \geq \frac{1}{4}\int_k^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^4} = \frac{1}{12(k+1)^3}.$$
   (c) Déduire de ce qui précède que :
   $$x_n - \gamma \geq \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} \geq \frac{1}{12}\int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{24(n+1)^2}.$$
4. À partir de quelle valeur de n, x_n donne-t-il une approximation à 10^{-6} près de γ ?
5. Cette question est plus difficile que les précédentes. Il est fortement conseillé de ne la traiter qu'après la partie III. Cependant sa place logique est dans cette partie. On désire améliorer la rapidité de convergence vers γ. À partir du résultat précédent on conjecture que la suite $t_n = x_n - \frac{1}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$ conviendra. Pour trouver sa vitesse de convergence vers γ, on s'inspire des méthodes utilisées précédemment.
   (a) On considère la fonction g définie pour $x \geq 0$ par :
   $$g(x) = f(x) - \frac{1}{24\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{24\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}.$$
   Vérifier que :
   $$t_n - t_{n+1} = g(n)$$
   $$\gamma - t_n = \sum_{k=n}^{\infty} -g(k)$$
   $$\frac{7}{48}\frac{1}{(x+1)^6} \leq g'(x) \leq \frac{7}{48}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^6}$$
   $$\frac{7}{240}\frac{1}{(k+1)^5} \leq -g(k) \leq \frac{7}{240}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^5}.$$
   (b) Soit φ une fonction convexe admettant une dérivée seconde continue sur un intervalle I contenant l'intervalle $[k, k+1]$. On sait que $\varphi''(x) \geq 0$ quel que soit $x \in I$ et que la courbe représentative de φ est située au-dessus de l'une quelconque de ses tangentes.
   Démontrer que :
   $$\int_k^{k+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}t \geq \varphi\left(k+\tfrac{1}{2}\right).$$
   On pourra illustrer géométriquement ce résultat. Appliquer cette propriété pour $\varphi(x) = \frac{1}{x^5}$.

(c) Déduire des questions précédentes que :

$$\frac{7}{960(n+1)^4} \leq \gamma - t_n \leq \frac{7}{960n^4}.$$

À partir de quelle valeur de n, t_n donne-t-il une approximation à 10^{-6} près de γ ?

23.3 Partie III

On considère un entier $n \geq 1$. On dit que l'entier x est un diviseur de n s'il existe un entier y tel que $x \cdot y = n$. On appelle $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. On a ainsi $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(3) = 2$, $d(4) = 3$; etc.

On pose $\overline{d}(n) = \frac{1}{n}[d(1) + d(2) + \cdots + d(n)]$ le nombre moyen de diviseur de n. En suivant une méthode proposée en 1849 par Lejeune-Dirichlet, on cherche une approximation de $\overline{d}(n)$.

1. **Une première approximation de $\overline{d}(n)$**

   (a) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe $(H8)$ d'équation $xy = 8$ sur l'intervalle $[1, 8]$. Soit D_n le domaine défini par $1 \leq x \leq n$, $0 \leq y \leq n$, $xy \leq n$.
   Quelle relation peut-on établir entre le nombre de points à coordonnées entières de D_n et la quantité $d(1) + d(2) + \cdots + d(n)$? Illustrer la situation précédente quand $n = 8$.

   (b) En s'inspirant du croquis précédent, montrer que :

   $$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) - n \leq \int_1^n \frac{n}{x}\,\mathrm{d}x \leq d(1) + d(2) + \cdots + d(n) + n.$$

   En déduire que $-1 \leq \overline{d}(n) - \ln n \leq 1$.

2. **Une deuxième approximation de $\overline{d}(n)$**

   Pour compter le nombre de points à coordonnées entières de D_n, on s'intéresse aux segments suivants : $x = k$, $0 \leq y \leq \frac{n}{x}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Soit $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x. On a donc $x - 1 \leq \mathrm{E}(x) \leq x$.

   (a) Montrer que

   $$n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - n < d(1) + \cdots + d(n) < n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

   et donc que $u_n - 1 < \overline{d}(n) - \ln n \leq u_n$ où (u_n) est la suite définie dans la partie I.

   (b) En déduire que quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\gamma - 1 \leq \overline{d}(n) - \ln n \leq \gamma + \varepsilon$.

3. **Une troisième approximation de $\overline{d}(n)$**

   On pose $q = \mathrm{E}\left(\sqrt{n}\right)$ et on considère le point Q de coordonnées (q, q).

   (a) Montrer que Q appartient à D_n et qu'il n'existe pas dans D_n de points à coordonnées entières tels que les deux coordonnées de ces points soient strictement plus grandes que q.

   (b) Montrer que

   $$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) = 2\left[\mathrm{E}\left(\tfrac{n}{1}\right) + \mathrm{E}\left(\tfrac{n}{2}\right) + \cdots + \mathrm{E}\left(\tfrac{n}{q}\right)\right] - q^2.$$

   (c) Établir la double inégalité suivante :

   $$n\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} - q \leq \mathrm{E}\left(\tfrac{n}{1}\right) + \mathrm{E}\left(\tfrac{n}{2}\right) + \cdots + \mathrm{E}\left(\tfrac{n}{q}\right) \leq n\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k}.$$

   En déduire :

   $$2u_q - \frac{q^n}{n} + \ln\frac{q^2}{n} - \frac{2q}{n} \leq \overline{d}(n) - \ln n \leq 2u_q - \frac{q^2}{n} + \ln\frac{q^2}{n}.$$

   (d) On admettra que quel soit u, $u \geq -\frac{1}{2}$, on a $u - u^2 \leq \ln(1+u)$.
   Montrer que $-\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} \leq \ln\frac{q^2}{n} \leq 0$ dès que $n \geq 4$.
   Établir les inégalités suivantes :

   $$\frac{1}{q} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n}, \quad \frac{1}{q+1} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}.$$

   (e) Montrer que

   $$-\frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{3}{n} \leq \overline{d}(n) - \ln n - (2\gamma - 1) \leq \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Séquence n° 24

Ep.3 - CAPES Externe 2000-C2

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3 et $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ son espace vectoriel associé. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{E}$ est noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$. La distance de deux points A et B de $\mathscr{E}$ est notée AB, soit $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Si $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on repérera un point M par un triplet de ses coordonnées sphériques $(r,\varphi\theta)$dans $[0,+\infty[\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi[$ tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}\cdot\vec{\imath} = r\cos\varphi\cos\theta \\ \overrightarrow{OM}\cdot\vec{\jmath} = r\cos\varphi\sin\theta \\ \overrightarrow{OM}\cdot\vec{k} = r\sin\varphi, \end{cases}$$

ou en d'autres termes tout triplet $(0,\varphi,\theta)$ est un triplet de coordonnées sphériques de O ; tout triplet $(\lambda,\pi/2,\theta)$ est un triplet de coordonnées sphériques de M si $\overrightarrow{OM}=\lambda\vec{k}$ avec $\lambda>0$; tout triplet $(-\lambda,-\pi/2,\theta)$ est un triplet de coordonnées sphériques de M si $\overrightarrow{OM}=\lambda\vec{k}$ avec $\lambda<0$; enfin si M n'appartient pas à la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$, alors si on désigne par m la projection orthogonale de M sur le plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, φ est une mesure en radians comprise strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ de l'angle $(\overrightarrow{Om},\overrightarrow{OM})$ et θ est une mesure en radians appartenant à $[0,2\pi[$ de l'angle $(\vec{\imath},\overrightarrow{Om})$.

Étant donnés deux points X et Y de $\mathscr{E}$, on note $[XY]$ le segment d'extrémités X et Y et si X et Y sont distincts, on note $\mathscr{D}_{(X,Y)}$ la droite passant par X et Y.

On rappelle qu'étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C et D, on appelle tétraèdre de sommets A, B, C et D l'enveloppe convexe de ces quatre points, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de masses positives ou nulles. On note $T=ABCD$ ce tétraèdre.

Un point X de $T=ABCD$ est dit extrémal si pour tout couple de points Y et Z de T, on a :

$$\text{si } X \text{ est le milieu du segment } [YZ] \text{ alors } Y=Z.$$

On rappelle que les points extrémaux d'un tétraèdre sont ses sommets. Les arêtes du tétraèdre $T=ABCD$ sont les segments d'extrémités deux sommets. Un tétraèdre est régulier si toutes ses arêtes sont de même longueur.

On désigne par vol, l'application de $\mathscr{E}^4$ dans $\mathbb{R}_+$ qui au quadruplet de points (A,B,C,D) associe le nombre :

$$\operatorname{vol}(A,B,C,D) = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right| \tag{24.1}$$

On rappelle que le nombre $V=\operatorname{vol}(A,B,C,D)$ est le volume du tétraèdre $T=ABCD$.

Soit $\{A,B,C,D\}$ un ensemble de cardinal 4. On note Σ le groupe de permutations de cet ensemble. Une permutation ρ appartenant à Σ pourra être notée

$$[(A,B,C,D)\mapsto(\rho(A),\rho(B),\rho(C),\rho(D))]$$

ou en utilisant la notation usuelle en produit de cycles. On désigne par τ la transposition de A et de B, on notera $\tau = [(A,B,C,D)\mapsto(B,A,C,D)]$ ou encore $\tau=(AB)$; on désigne par σ le cycle qui à B associe C, à C associe D, à D associe B et qui laisse A fixe, on notera $\sigma=[(A,B,C,D)\mapsto(A,C,D,B)]$ ou encore $\sigma=(BCD)$; on notera id l'application identique de Σ, soit $\operatorname{id}=[(A,B,C,D)\mapsto(A,B,C,D)]$.

La première partie du problème a pour but de caractériser des plans partageant un tétraèdre quelconque en deux parties dont les volumes sont 1/8 et 7/8 du volume de ce tétraèdre. Les trois autres parties sont consacrées au tétraèdre régulier. La deuxième partie étudie la caractérisation d'un tétraèdre régulier par les projections orthogonales de ses sommets sur une droite. La troisième partie étudie quelques aspects du groupe des isométries d'un tétraèdre régulier et de fonctions définies sur une sphère invariantes par ce groupe. Enfin la dernière partie est une application de la géométrie du tétraèdre à la description d'une expérience aléatoire.

Les diverses parties du problème sont dans une large mesure indépendantes et peuvent être traitées indépendamment les unes des autres, dans l'ordre que le candidat souhaitera.

24.1 I. À propos du tétraèdre quelconque

On suppose donnés A, B, C et D quatre points non coplanaires de $\mathscr{E}$.

1. (a) Montrer que les points A, B, C et D sont deux à deux distincts. Quel est l'ordre du groupe Σ ?
   (b) Expliciter les permutations suivantes à l'aide de cycles :
   $$\tau^2,\ \sigma^3,\ \tau\sigma,\ (\tau\sigma)^4,\ \sigma\tau\sigma^2,\ \sigma^2\tau\sigma,\ \tau\sigma\tau\sigma^2\tau,\ \tau\sigma^2\tau\sigma,\ \tau\sigma\tau\sigma^2\tau\sigma.$$
   (c) Montrer que σ et τ engendrent Σ.
   (d) Déduire de c. que pour toute permutation ρ appartenant à Σ
   $$\mathrm{vol}(\rho(A),\rho(B),\rho(C),\rho(D)) = \mathrm{vol}(A,B,C,D).$$
   (e) Peut-on déduire le résultat précédent de ce que $\mathrm{vol}(A,B,C,D)$ est le volume de tétraèdre $ABCD$?
2. Soit H_A le projeté orthogonal de A sur le plan passant par B, C et D. Montrer à partir de (24.1) que le volume du tétraèdre T peut aussi s'écrire :
   $$V = \mathrm{vol}(A,B,C,D) = \frac{1}{3}AH_A \times \mathscr{A}(BCD)$$
   où $\mathscr{A}(BCD)$ désigne l'aire du triangle BCD.
3. Soit λ un réel strictement compris entre O et 1 et soit L le barycentre de A et H_A affectés des masses λ et $1-\lambda$. Montrer que le plan P passant par L et perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(A,H_A)}$ coupe les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. On désigne les points d'intersections correspondants par S_B, S_C et S_D. L'intersection du tétraèdre T et du demi-espace limité par P et contenant A est le tétraèdre $AS_BS_CS_D$. Soit v_1 le volume de cette intersection et soit v_2 le volume de l'intersection du tétraèdre T avec le demi-espace limité par P et contenant B.
   (a) Déterminer la valeur λ_1 de λ telle que $v_1 = \frac{V}{8}$.
   (b) Déterminer la valeur λ_2 de λ telle que $v_2 = \frac{V}{8}$.
4. (a) Montrer qu'il existe un couple unique de points (I,J) tel que I appartienne à $\mathscr{D}_{(A,B)}$, que J appartienne à $\mathscr{D}_{(C,D)}$, que $\mathscr{D}_{(I,J)}$ soit perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(A,B)}$ et que $\mathscr{D}_{(I,J)}$ soit perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(C,D)}$.
   (b) Soit μ un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et soit M le barycentre de I et de J affectés des masses μ et $1-\mu$. Montrer que le plan Q passant par M et perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(I,J)}$ coupe les arêtes $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$ et $[BD]$; on note ces intersections respectivement U_{AC}, U_{AD}, U_{BC} et U_{BD}. Montrer que $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ est un parallélogramme.
   (c) Dans cette question $\mu = \frac{1}{3}$. Dessiner sans commentaire les deux figures planes obtenues par projections orthogonales des arêtes du tétraèdre T et des côtés du parallélogramme $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ d'une part sur le plan Q, d'autre part sur le plan passant par A, B et J (on supposera que $\mathscr{D}_{(C,D)}$ et $\mathscr{D}_{(A,B)}$ ne sont pas orthogonales).
   (d) On suppose de nouveau μ quelconque dans $]0,1[$. Exprimer l'aire du parallélogramme $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ en fonction de μ, et de l'aire W d'un parallélogramme $U_1U_2U_3U_4$ tel que
   $$\overrightarrow{U_1U_2} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U_2U_3} = \overrightarrow{CD}.$$
   (e) Exprimer le volume V du tétraèdre $T = ABCD$ en fonction de W et de la distance IJ.

(f) On désigne par v_3 le volume de l'intersection de T avec le demi-espace limité par Q et contenant les points C et D. Déterminer la fonction polynomiale f de degré 3, qui s'annule en 0 et qui est telle que les équations en μ dans $]0,1[$:

$$f(\mu)+\frac{1}{8}=0 \tag{24.2}$$

et $v_3=\frac{V}{8}$ soient équivalentes. Montrer que (24.2) admet une solution unique μ_0 dans l'intervalle $]0,1[$.

(g) Vérifier que $f(1-\mu_0)+\frac{7}{8}=0$. Pourquoi pouvait-on prévoir ce résultat ?

(h) On définit les fonctions réelles de variable réelle g et h par :

$$g(x)=f(x)+\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad h(x)=\frac{32x^3-24x^2-1}{48x(x-1)},$$

et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=h(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que g et g' sont décroissantes sur $[0,1/2]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ_0. Calculer u_1 et u_2. Montrer que $0{,}22<\mu_0$. Donner une valeur approchée de μ à 2.10^{-3} près.

(i) Montrer que h'' est décroissante sur $]0,\frac{1}{2}]$, calculer à la calculatrice une valeur approchée de $h''(0{,}2)$ et vérifier que $h''(0{,}2)<5$. Montrer que pour n entier naturel, on a :

$$(u_{n+1}-\mu_0)<5(u_n-\mu_0)^2.$$

Montrer que u_4 est une approximation de μ_0 à 10^{-7} près et que u_5 est une approximation de μ_0 à 10^{-13} près.

24.2 II. Images par projections orthogonales d'un tétraèdre régulier

Dans la suite du problème on ne considère que des tétraèdres réguliers.

24.2.1 II-A. Projection orthogonale d'un tétraèdre régulier sur une droite.

1. On suppose $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit A, B, C et D les points qui ont pour coordonnées respectives dans ce repère $(0,0,3)$, $(2\sqrt{2},0,-1)$, $(-\sqrt{2}-\sqrt{6},-1)$, $(-\sqrt{2},\sqrt{6},-1)$.

(a) Montrer que le tétraèdre $T=ABCD$ est régulier. Quel est son volume V ?

(b) Soit M un point de la sphère de centre O et de rayon 1, de coordonnées sphériques $(1,\varphi,\theta)$. On projette orthogonalement sur la droite $\mathscr{D}_{(O,M)}$ les sommets A, B, C et D du tétraèdre T respectivement en A', B', C' et D'. On choisit sur la droite $\mathscr{D}_{(O,M)}$ le repère d'origine O et de vecteur directeur $\overrightarrow{OM}$. On note t_A, t_B, t_C et t_D les abscisses des points A', B', C' et D' dans ce repère $(O,\overrightarrow{OM})$. Vérifier que :

$$\begin{cases} t_A=3\sin\varphi \\ t_B=-\sin\varphi+2\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta \\ t_C=-\sin\varphi-\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta-\sqrt{6}\cos\varphi\sin\theta \\ t_D=-\sin\varphi-\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta+\sqrt{6}\cos\varphi\sin\theta. \end{cases}$$

Un calcul élémentaire mais un peu long qu'on ne demande pas d'effectuer montre que :

$$3(A'B'^2+A'C'^2+A'D'^2)-2(\overline{A'B'}\cdot\overline{A'C'}+\overline{A'B'}\cdot\overline{A'D'}+\overline{A'C'}\cdot\overline{A'D'})$$

est un nombre indépendant de φ et de θ.

(c) La forme quadratique q_0 définie par :

$$q_0(\beta,\gamma,\delta)=3(\beta^2+\gamma^2+\delta^2)-2(\gamma\delta+\delta\beta+\beta\gamma)$$

est-elle définie positive ?

2. Soit $T = ABCD$ un tétraèdre régulier quelconque d'arête de longueur l. Soit Δ' une droite quelconque et A', B', C', D' les projetés orthogonaux de A, B, C, D sur Δ'. On va montrer qu'il existe une forme quadratique unique q telle que :
$$l^2 = q(\overline{A'B'}, \overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}).$$
   (a) Déduire de la question précédente qu'il existe une telle forme quadratique q (On pourra choisir une unité de longueur telle que l soit égal à $2\sqrt{6}$ fois cette unité et un repère judicieux et utiliser le résultat de la question précédente pour montrer tout d'abord le résultat dans le cas où Δ' passe par le centre du tétraèdre).
   (b) On suppose que q est une forme quadratique telle que
$$l^2 = q(\overline{A'B'}, \overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}).$$
      i. Pourquoi la formule $l^2 = q(\overline{A'B'}, \overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$ a-t-elle un sens indépendamment du choix d'une orientation de Δ' ?
      ii. Déduire du fait que T est régulier qu'il existe un nombre réel k tel que pour tous α, β et γ réels, on ait :
$$q(\alpha,\beta,\gamma) = k[3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)].$$
      iii. Déterminer k. On pourra considérer le cas où Δ' est la droite passant par A et B.
   (c) Montrer que :
$$2l^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2.$$

24.2.2 II-B. Projection orthogonale d'un tétraèdre régulier sur un plan.

Soit $T = ABCD$ un tétraèdre quelconque d'arête de longueur l. Soit Π_1 un plan quelconque et A_1, B_1, C_1 et D_1 les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur Π_1. Soit Δ' une droite orthogonale à Π_1, et A', B', C' et D' les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur Δ'.

1. Montrer que :
$$4l^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 + A_1D_1^2 + B_1C_1^2 + B_1D_1^2 + C_1D_1^2$$
(on pourra considérer la droite Δ' orthogonale à Π_1 ou introduire deux droites Δ'_1 et Δ'_2 orthogonales incluses dans Π_1).
2. Dans cette question on ne demande que des dessins sans aucune justification. On choisit le centimètre comme unité de longueur. On suppose que les points A', B', C' et D' de la droite Δ' sont tous distincts et vérifient :
$$A'B' = B'C' = C'D' = 4.$$
   (a) Dessiner la disposition des points A', B', C' et D' sur la droite Δ'. Dessiner en vraie grandeur la figure obtenue par projection orthogonale des arêtes de T dans le plan Π_1.
   (b) Soit M' un point de Δ'. Dessiner sur la figure dans le plan Π_1 de la question précédente la projection orthogonale de la section du tétraèdre avec le plan orthogonal à Δ' passant par M', pour les cinq positions suivantes de M' : M'_1 milieu de $[A'B']$, $M'_2 = B'$, M'_3 milieu de $[B'C']$, $M'_4 = C'$ et M'_5 milieu de $[C'D']$.
3. Soit A', B', C' et D' quatre points d'une droite Δ'. On suppose qu'au moins deux d'entre eux sont distincts. On cherche les tétraèdres réguliers $T = ABCD$ tels que A se projette orthogonalement sur Δ' en A', B en B', C en C' et D en D'. On définit le nombre positif l par :
$$2l^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2.$$
   (a) Déduire de la relation précédente que
      i. $l^2 \geq A'B'^2$ *et que*
      ii. $\dfrac{1}{l^2}\left(\dfrac{\overline{A'B'}+\overline{B'C'}}{2}\right)^2 \leq \dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{A'B'^2}{l^2}\right).$
   (b) Montrer que s'il existe un tétraèdre régulier $T = ABCD$ tel que A se projette orthogonalement sur Δ' en A', B en B', C en C' et D en D', il est unique à une isométrie près appartenant à un groupe que l'on précisera.
   (c) Montrer que l'on peut faire les choix successifs suivants :

i. choisir un point A du plan orthogonal à Δ', passant par A' ;

ii. choisir un point B du plan orthogonal à Δ', passant par B', tel que $AB = l$;

iii. choisir un point C du plan orthogonal à Δ', passant par C', tel que $CA = CB = l$;

iv. choisir un point D du plan orthogonal à Δ', passant par D', tel que $DA = DB = DC = l$.

Conclure.

24.3 III. Symétries du tétradre régulier

On utilise les notations de la partie II.A.1. et celles de l'introduction : on rappelle que le repère est supposé orthonormé et que dans la question II.A.1.a. on a montré que le tétraèdre $T = ABCD$ est régulier.

1. Soit ρ appartenant à Σ. Montrer qu'il existe une isométrie de $\mathcal{E}$ unique, notée t, telle que $f(A) = \rho(A)$, $t(B) = \rho(B)$, $t(C) = \rho(C)$ et $t(D) = \rho(D)$. On désigne par ψ l'application qui à ρ associe t. L'application ψ est-elle un homomorphisme de groupes ? L'application ψ est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Montrer que $\Sigma' = \psi(\Sigma)$ est l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ qui conservent globalement le tétraèdre T.
3. Pour toute permutation ρ de Σ, on note L_ρ la matrice, relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\vec{\mathcal{E}}$, de l'isométrie vectorielle $\overrightarrow{\psi(\rho)}$ associée à $\psi(\rho)$.
   (a) Vérifier que :
   $$L_\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
   Montrer qaue $\psi(\tau)$ est une réflexion ; préciser par rapport à quel plan. Quelles sont les valeurs propres de la matrice L_τ ?

   (b) Déterminer L_σ. Montrer que $\psi(\sigma)$ est une rotation ; préciser pour cette rotation : son axe, ses axes orientés, ses angles orientés et leurs mesures. Quelles sont les valeurs propres réelles ou complexes et les vecteurs propres réels ou complexes de la matrice L_σ ?

   (c) On désigne par ρ_3 la permutation $\{A, B, C, D\}$ telle que $\rho_3(A) = B$, $\rho_3(B) = C$, $\rho_3(C) = D$ et $\rho_3(D) = A$, soit $\rho_3 = (ABCD)$. Montrer que l'image du milieu M_{AC} du segment $[AC]$ par $\psi(\rho_3)$ est le milieu M_{BD} du segment $[BD]$, point symétrique de M_{AC} par rapport à 0. Montrer que la restriction de $\psi(\rho_3)$ au plan médiateur du segment $[M_{AC}M_{BD}]$ est une rotation d'angle de mesure $\pi/2$. En déduire les valeurs propres de L_{ρ_3} et le polynôme caractéristique de L_{ρ_3}. Montrer que $L_{\rho_3} = L_\tau L_\sigma$; écrire explicitement la matrice L_{ρ_3} puis retrouver son polynôme caractéristique.

   (d) On note ρ_4 la permutation $\{A, B, C, D\}$ telle que $\rho_4(A) = C$, $\rho_4(B) = D$, $\rho_4(C) = A$ et $\rho_4(D) = B$, soit $\rho_4 = (AC)(BD)$. Décrire la transformation géométrique $\psi(\rho_4)$. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice L_{ρ_4} ? Il n'est pas demandé d'écrire explicitement la matrice L_{ρ_4}.
4. On trace sur la sphère Ω circonscrite au tétraèdre $ABCD$ tous les grands cercles passant par deux sommets du tétraèdre (un grand cercle est un cercle inclus dans la sphère et centré au centre de la sphère ou encore l'intersection de la sphère avec un plan passant par le centre de la sphère). On appellera point simples les points communs à deux tels grands cercles et points triples les points communs à trois tels grands cercles. Dénombrer le nombre de points simples et le nombre de points triples. Quels sont les coordonnées sphériques des points simples ?
5. On repère tout point M de Ω par ses coordonnées sphériques $(3, \varphi, \theta)$.
   (a) Montrer que le point M appartenant au grand cercle passant par C et D si et seulement si :
   $$\sqrt{2}\tan\varphi - \cos\theta = 0.$$
   (b) Écrire pour chacun des grands cercles Γ de Ω passant par deux sommets de T une relation (R_Γ) entre φ et θ telle que pour tout point M de coordonnées sphériques $(3, \varphi, \theta)$, M appartient à Γ si et seulement si (R_Γ) est vérifiée.

(c) Dessiner dans le rectangle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi[$ du plan (φ, θ) la courbe d'équation :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta)\right).$$

Cette courbe est appelée l'image dans le plan (φ, θ) du grand cercle de Ω passant par C et D. Dessiner sur le même schéma pour chaque grand cercle Γ de Ω passant par deux sommets de T, son image dans le plan (φ, θ), c'est-à-dire le courbe du plan (φ, θ) d'équation (R_Γ). indiquer sur votre schéma les points (φ, θ) tels que $(3, \varphi, \theta)$ soient les coordonnées sphériques des points simples de la question précédente.

(d) On désigne par F l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à chaque point M de Ω associe la distance ON où N est l'intersection du segment $[OM]$ avec la frontière de T. Les lignes de niveau de F sont des cercles ou des réunions d'arcs de cercles. Donner l'allure dans le plan (φ, θ) des images des courbes de niveaux $F(M) = 1{,}5$, $F(M) = 2{,}5$ et $F(M) = \sqrt{3}$.

24.4 IV. Question complémentaire

Soit a une longueur. Nous appellerons tétraèdres rectangles d'hypothènuse a les tétraèdres dont une face est un triangle équilatéral de côtés de longueur a et dont les autres faces sont des triangles isocèles rectangles. Le sommet opposé à la face équilatérale d'un tétraèdre rectangle sera appelé son sommet principal.

1. Soit $T = ABCD$ un tétraèdre régulier dont les arêtes ont pour longueur $2a$, montrer que les milieux M_{AB}, M_{AC}, M_{AD}, M_{BC}, M_{BD} et M_{CD} des arêtes AB, AC, AD, BC, BD, CD sont les sommets d'un octaèdre régulier d'arêtes de longueur a (on admettra qu'un octaèdre est régulier si et seulement si toutes ses arêtes sont de même longueur). Soit O le centre de T, montrer que les tétraèdres
   — $OM_{AB}M_{AC}M_{AD}$,
   — $OM_{AB}M_{BC}M_{BD}$,
   — $OM_{AC}M_{BC}M_{CD}$,
   — $OM_{AD}M_{BD}M_{CD}$,
   — $OM_{AB}M_{AC}M_{BC}$,
   — $OM_{AB}M_{AD}M_{BD}$,
   — $OM_{AC}M_{AD}M_{CD}$
   — et $OM_{BC}M_{BD}M_{CD}$
   sont des tétraèdres rectangles d'hypothènuse a.

2. On dispose de 8 tétraèdres rectangles de même hypoténuse a et de 4 tétraèdres réguliers d'arêtes de cette même longueur a. Ces 12 tétraèdres ont initialement toutes leurs faces bleues. On les assemble face contre face de façon à former un tétraèdre régulier d'arête de longueur $2a$ (on admet que pour cela, il est nécessaire et suffisant de placer côte à côte les tétraèdres rectangles, leurs sommets principaux étant confondus, obtenant ainsi un octaèdre régulier, et de placer ensuite les tétraèdres réguliers d'arêtes de longueur a en vis-à-vis de faces non adjacentes de cet octaèdre.

   Remarquez que quand on sait pour une face de l'octaèdre si à la fin des manipulations elle est visible ou non, on le sait pour chacune des autres).

   On peint alors les faces externes visibles en rouge, puis on démontre ce tétraèdre en ses 12 constituants que l'on mélange. On les assemble ensuite de nouveau au hasard sans tenir compte des couleurs pour former un nouveau tétraèdre d'arête de longueur $2a$.

   On cherche la probabilité p pour que ce nouveau tétraèdre ait lui aussi toutes ses faces entièrement rouges.

   (a) Donner un modèle probabiliste de l'expérience aléatoire décrite ci-dessus. Justifier en détail votre choix de l'univers Θ et de la probabilité P.

   (b) Soit A l'événement dont on cherche la probabilité. Décrire explicitement A comme sous-ensemble de Θ.

   (c) Calculer p.

Séquence n° 25

Ep.4 - CAPES Interne 1991-C1

Ce problème propose l'étude de suites de nombres complexes définies par des relations de récurrence analogues (parties I et III).

La partie II rattache au nombre π certaines des suites étudiées au I et donne des méthodes de calcul approché de π.

Dans la partie III, on définit les fonctions racine carrée et argument cosinus hyperbolique sur $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, fonctions que l'on utilise dans l'étude des suites complexes envisagées.

25.1 I. Étude de suites réelles

L'objectif de cette partie est l'étude de suites adjacentes.

1. On désigne $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par la relation de récurrence :

$$C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}} \tag{25.1}$$

et la donnée de son premier terme C_0, $C_0 \geq -1$.

   (a) Construire, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

   (b) Étudier, suivant la valeur de C_0 le comportement de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$: monotonie, convergence, limite. Chaque cas sera illustré par un graphique.

2. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}} \end{cases} \tag{25.2}$$

et la donnée des premiers termes a_0 et b_0 strictement positifs.

   (a) Étudier le cas $a_0 = b_0$. Dans la suite, on suppose $a_0 \neq b_0$.

   (b) Proposer une construction géométrique de a_1 et b_1 connaissant a_0 et b_0 dans chacun des cas $a_0 < b_0$ et $a_0 > b_0$.

   (c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3. **Suite auxiliaire.**
   On pose, pour tout entier naturel n, $\gamma_n = \frac{a_n}{b_n}$.
   Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence (25.1) et que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n\gamma_{n+1}$.

4. **Limite de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

   (a) On suppose $a_0 < b_0$. Soit α le réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ défini par $\gamma_0 = \cos\alpha$.
   Montrer que :

$$\gamma_1 = \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = b_0\frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)}.$$

Donner les expressions, en fonction de n, α et b_0, de γ_n, b_n et a_n.
Montrer que la limite commune aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $b_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

(b) On suppose $a_0 > b_0$.
Soit α le réel positif défini par $\gamma_0 = \cosh\alpha$. Par une démarche analogue à la précédente, déterminer la limite commune aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On rappelle que, pour tout réel α,

$$\cosh\alpha = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}),\ \sinh\alpha = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$$
$$\sinh\alpha = 2\sinh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha}{2},\ \cosh\alpha = 2\cosh^2\frac{a}{2} - 1.$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = \frac{a_{n+1}}{2}(b_n - a_n).$$

En déduire, dans les cas où $a_0 < b_0$, que, pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4}(b_n - a_n) \text{ puis que } b_n - a_n \leq \frac{1}{4^n}(b_0 - a_0).$$

6. On prend :

$$p_n = \frac{1}{b_n} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{1}{a_n}.$$

(a) En utilisant l'algorithme décrit au 3. et en s'aidant de la calculatrice, calculer p_n et P_n pour les valeurs 3, 4, 5 de n. On en donnera des valeurs approchées à 10^{-4} près que l'on présentera dans un tableau.
Montrer que les suites $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers π.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leq P_n - p_n \leq \frac{1}{4^n} \times 3\sqrt{3} \text{ puis que } 0 \leq \pi - p_n \leq \frac{1}{4^n} \times 3\sqrt{3}.$$

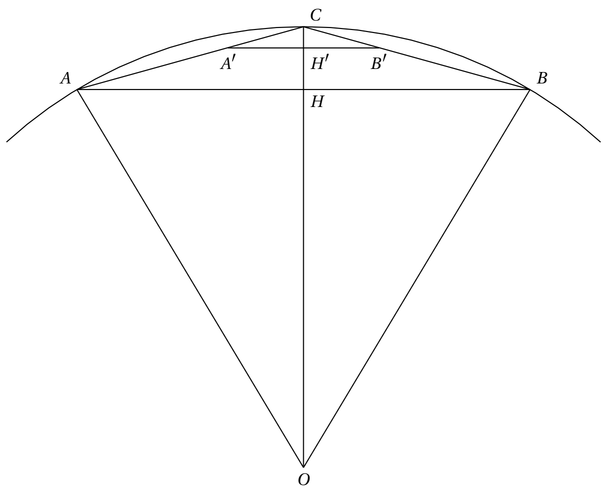
À partir de quel rang n_0 est-on assuré que p_n approche à π à moins de 10^{-8} près ?

25.2 II. Calcul approché de π par la méthode d'Archimède

25.2.1 A. Interprétation géométrique des suites $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. On désigne par r_k et R_k le rayon respectivement du cercle inscrit et du cercle circonscrit à un polygone convexe régulier à k côtés de périmètre 2. Utilisant la configuration ci-dessous où la corde AB du cercle de centre O représente le côté de ce polygone convexe régulier à k côtés, où C est le milieu de l'arc AB, A' et B' les milieux des segments $[AC]$ et $[BC]$, H et H' les intersections de la droite (OC) avec les droites (AB) et $(A'B')$, établir qu'on a, pour $k \geq 3$,

$$2r_{2k} = r_k + R_k \quad \text{et} \quad R_{2k}^2 = r_{2k}R_k. \tag{25.3}$$



2. On désigne par l_k et L_k les demi-périmètres des polygones convexes réguliers à k côtés respectivement inscrit et circonscrit au cercle unité.
   En utilisant une homothétie convenable, montrer que :
   $$l_k = \frac{1}{R_k} \quad \text{et} \quad L_k = \frac{1}{r_k}.$$
   Déduire de (25.3) qu'on a, pour $k \geq 3$,
   $$\frac{1}{L_{2k}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_k} + \frac{1}{l_k}\right) \quad \text{et} \quad l_{2k} = \sqrt{L_{2k} l_k}. \tag{25.4}$$
3. Établir, indépendamment des résultats précédents, qu'on a pour $k \geq 3$,
   $$l_k = k \sin\frac{\pi}{k} \quad \text{et} \quad L_k = k \tan\frac{\pi}{k}. \tag{25.5}$$
4. Comment rattacher à cette étude celle des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies au paragraphe I.6. ?

25.2.2 B. Accélération de la convergence

Les notations sont celles du paragraphe I.6.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$p_n = 3 \times 2^n \sin\frac{\pi}{3 \times 2^n} \quad \text{et} \quad P_n = 3 \times 2^n \tan\frac{\pi}{3 \times 2^n}.$$
2. Déterminer les constantes λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 telles que :
   $$\begin{aligned} p_n &= \pi + \frac{\lambda_1}{4^n} + \frac{\lambda_2}{4^{2n}} + \frac{\lambda_3}{4^{3n}} + o\left(\frac{1}{4^{3n}}\right) \\ P_n &= \pi + \frac{\mu_1}{4^n} + \frac{\mu_2}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right). \end{aligned}$$
   On rappelle, qu'au voisinage de 0,
   $$\begin{aligned} \sin u &= u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + o(u^7) \\ \tan u &= u + \frac{u^3}{3} + \frac{2}{15}u^5 + o(u^5). \end{aligned}$$
3. On pose :
   $$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{3}(2p_n + P_n) \\ v_n &= \frac{1}{3}(4p_{n+1} - p_n). \end{aligned}$$
   Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$,
   $$u_n - \pi \sim \frac{\pi^5}{5 \times 3^4 \times 4^{2n+1}} \quad \text{et} \quad v_n - \pi \sim \frac{-\pi^5}{5!}\frac{1}{3^4 \times 4^{2n+1}}.$$
4. À partir du tableau dressé au paragraphe I.6., donner des valeurs approchées de u_n et v_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4 de n en précisant l'approximation. On présentera les résultats dans un nouveau tableau.
5. À partir de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, construire une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permettant une nouvelle amélioration de la convergence, en définissant w_n, comme barycentre de v_n et v_{n+1} avec des coefficients indépendants de n.

25.3 III. Étude de suites de nombres complexes

Définition préliminaire. *On prolonge à $\mathbb{C}$ la définition de la racine carrée d'un nombre réel positif de la manière suivante :*

— *si z est négatif, on pose $\sqrt{z} = \mathrm{i}\sqrt{z}$ (ainsi $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$),*

— *sinon $\sqrt{z}$ est le nombre complexe de carré z dont la partie réelle est positive.*

Vérifier que, dans ce dernier cas,

$$\sqrt{z} = \frac{z + |z|}{\sqrt{z + \overline{z} + 2|z|}}.$$

Le plan $\mathscr{P}$ orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le plan les points A, M, N d'affixes respectives 1, z, $\sqrt{z}$.

Pour z non nul, vérifier l'égalité :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}.$$

Montrer que le point N appartient à l'angle saillant $\widehat{AOM}$.

On désigne par $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de complexes définie par la relation de récurrence

$$\gamma_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\gamma_n}{2}}$$

et la donnée de son premier terme γ_0, $\gamma_0 \neq 1$, et par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de complexes définies par leurs premiers termes $a_0 = \gamma_0$, $b_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$b_{n+1} = b_n\gamma_{n+1}, \quad a_{n+1} = b_{n+1}\gamma_{n+1}.$$

25.3.1 A. Étude des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Vérifier, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1}^2 = b_n a_{n+1}.$$

2. *Exemple :*
   On choisit ici $\gamma_0 = -1 + 4\mathrm{i}$. Calculer, avec éventuellement une précision de 10^{-3} sur les parties réelles et imaginaires, les termes γ_1, γ_2, a_1, a_2, b_1, b_2 de ces suites et placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2 d'affixes respectives a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2.
3. Pour étudier la convergence des suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est commode, par extension de l'étude faite dans le cas réel au paragraphe I.4., d'introduire les fonctions hyperboliques sur $\mathbb{C}$.
   Pour tout complexe z, de partie réelle x et de partie imaginaire y, on pose :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \quad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}
\cosh z &= \cosh x \cos y + \mathrm{i}\sinh x \sin y;\\
\sinh z &= \sinh x \cos y + \mathrm{i}\cosh x \sin y;\\
\cosh 2z = 2\cosh^2 z - 1,\ &\sinh 2z = 2\sinh z \cosh z,\ |\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \cos^2 y - 1.
\end{aligned}$$

   (Il est inutile de vérifier ces résultats qui seront admis).

   (a) Soit γ un nombre complexe.
   Montrer que, si z est solution sur $\mathbb{C}$ de l'équation $\gamma = \cosh z$, e^z prend l'une ou l'autre de deux valeurs Z_1 et Z_2 inverses l'une de l'autre.
   Montrer que l'équation $\gamma = \cosh z$ a une solution et une seule $z = x + \mathrm{i}y$ pour laquelle :

$$(x, y) \in (\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]) \cup (\{0\} \times [0, \pi]).$$

   Cette solution est notée $\operatorname{Arg}\cosh\gamma$.
   Étudier le cas où γ est réel.

(b) On pose $z_0 = \operatorname{Arg}\cosh\gamma_0$ (on a supposé γ_0 différent de 1 donc z_0 n'est pas nul).
Montrer, pour tout naturel n :

$$\gamma_n = \cosh\frac{z_0}{2^n}, \quad b_n = \frac{\sinh z_0}{2^n \sinh(z_0/2^n)}$$

et vérifier :

$$\lim_{n\to+\infty}\cosh\frac{z_0}{2^n} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(2^n\sinh\frac{z_0}{2^n}\right) = z_0.$$

Conclure : les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite L.
Retrouver, pour γ_0 réel convenable, les résultats du paragraphe I.4.

25.3.2 B. Étude des suites des arguments

On pose $z_0 = u + \mathrm{i}v$ où u et v sont des nombres réels. On désigne par A_n et B_n les images respectives de a_n et b_n dans le plan $\mathscr{P}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, A_{n+1} se trouve dans l'angle saillant $\widehat{A_nOB_n}$.
2. Pour tout nombre complexe Z non nul, on note $\operatorname{Arg} Z$ l'argument de Z appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi]$.
Ainsi, en se reportant à la définition de z_0, on constate que $\operatorname{Arg} \mathrm{e}^{t_0} = v$.
Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$\left|\operatorname{Arg}\gamma_n\right| \leq \frac{\pi}{2^n}$$
et que $\operatorname{Arg}\gamma_n$ a même signe que v.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, B_{n+1} se trouve dans l'angle $\widehat{A_{n+1}OB_n}$.
4. Préciser le comportement de deux suites $\left(\operatorname{Arg} a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\operatorname{Arg} b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Dans le cas où $\left|\operatorname{Arg}\gamma_0\right| \leq \frac{\pi}{2}$, comparer b_{n+1} et $\sqrt{b_n a_{n+1}}$.

25.3.3 C. Étude des suites des modules

u et v sont définis comme au titre B.

1. **Étude d'une configuration**
On désigne, dans le plan $\mathscr{P}$, par D le disque fermé de centre O et de rayon 1 et par Δ le disque fermé de diamètre $[OA]$. On rappelle que A est le point d'affixe 1.
Au point P intérieur à D, on associe :
— le point P' milieu du segment $[AP]$;
— le point Q situé dans l'angle saillant $\widehat{AOP'}$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}) = (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP'}) \pmod{2\pi}$ et $OQ = \sqrt{OP'}$.
— le point Q' milieu du segment $[AQ]$.
Montrer que :
(a) les points P' et Q sont intérieurs à Δ ;
(b) l'angle $\widehat{OQA}$ est obtus ;
(c) $OQ < OQ' < OA$.
Quelles sont les affixes de points P' et Q si P a pour affixe γ_{n-1} $(n \geq 1)$?
2. On suppose $u \geq |v|$.
Montrer que, pour tout entier n, $\left|\gamma_n\right| > 1$, que la sutie $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et que ces deux suites sont adjacentes.
3. On suppose les conditions suivantes réalisées :
$$0 \leq u < |v|, \quad \left|\gamma_0\right| < 1.$$
Montrer que, pour tout n, $\left|\gamma_n\right| < 1$, que la suite $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(|a_n|)_{n\geq 1}$ est croissante.
On pourra utiliser les résultats de la question 1 en remarquant par exemple que A_n est l'image de B_n dans la similitude de centre O associée au nombre complexe γ_n.
4. On suppose seulement $0 \leq u < |v|$.
On définit, pour t réel, $\psi(t) = \sinh^2(ty) - \sin^2(tv)$. Déterminer le signe de ψ au voisinage de 0.
Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0, les résultats de la question 3 sont encore valables.

Séquence n° 26

Ep.5 - CAPES Externe 1995-C2

Objet et notations du problème

Ce problème a pour objet l'étude de certaines propriétés des matrices symétriques réelles.

L'espace $\mathbb{R}^n$ sera muni de sa structure canonique d'espace euclidien, sa base canonique sera notée $\mathscr{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et la norme euclidienne d'un élément x sera notée $\|x\|$. Relativement à une base fixée, un élément x (resp. y, etc.) de $\mathbb{R}^n$ sera représenté par la matrice colonne X (resp. Y, etc.) de ses coordonnées x_i (resp. y_i, etc.). On appellera *plan vectoriel* de $\mathbb{R}^n$ tout sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^n$.

À toute matrice symétrique réelle A, de terme général a_{ij}, on associera la forme bilinéaire symétrique Φ_A définie sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$,rapporté à sa base canonique $\mathscr{E}$, par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \Phi_A(x,y) = X^T AY = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} x_i y_j.$$

On notera Q_A la forme quadratique associée à Φ_A et Σ_A la A-*sphère unité* définie dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $\mathscr{E}$, par :

$$\Sigma_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n,\ Q_A(x) = X^T AX = 1 \right\}.$$

Une forme quadratique Q sur un espace euclidien E est dite *définie positive* si et seulement si on a $Q(x) > 0$ pour tout x non nul de E. Dans l'algèbre des matrices carrées réelles à n lignes et n colonnes, on notera $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques A telles que la forme quadratique Q_A soit définie positive.

26.1 I. Caractérisation de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ liées à la A-sphère unité Σ_A

1. **Premier exemple.**
   On considère la matrice symétrique réelle $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A_1.
   (b) Donner l'expression d'une matrice orthogonale directe P et d'une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ telles que $\lambda < \mu$ et que $P^T A_1 P = D$. En déduire que A_1 appartient à $\mathscr{S}_2^+(\mathbb{R})$.
   (c) Déterminer la nature de la conique Σ_{A_1} et son excentricité.
2. **Deuxième exemple.**
   On considère la matrice symétrique réelle $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.
   Démontrer directement que $Q_{A_2}(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^2$ mais que A_2 n'appartient pas à $\mathscr{S}_2^+(\mathbb{R})$. Déterminer la nature de la conique Σ_{A_2}.
3. **Caractérisation de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la compacité de Σ_A.**
   Soit A un élément de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) A appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   (ii) Les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.

(iii) Σ_A est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$.
Caractériser en fonction des valeurs propres de A les cas où Σ_A est vide.

4. **Caractérisation de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ par les sections planes de Σ_A.**
   (a) Soit A un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Démontrer que la restriction de Q_A à un plan vectoriel Π de $\mathbb{R}^n$ est une forme quadratique définie positive.
   (b) Soit A un élément de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que A appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si tout plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ coupe Σ_A suivant une ellipse.

26.2 II. Sections circulaires de la A-sphère unité Σ_A quand $n = 3$

Soit A un élément de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ ses valeurs propres.

1. **Cas où A a une valeur propre triple.**
   On suppose que A a une seule valeur propre triple : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.
   Quelle est, suivant le signe de la valeur propre, la nature de Σ_A ? En déduire que ou bien Σ_A est vide, ou bien tout plan vectoriel coupe Σ_A suivant un cercle.
2. **Cas où A a une valeur propre double.**
   On suppose que A a deux valeurs propres distinctes, une simple et une doubel : $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3$.
   (a) Démontrer que Σ_A est invariante par toute rotation d'axe le sous-espace propre Δ relatif à la valeur propre simple.
   (b) Démontrer que, si un plan vectoriel Π non perpendiculaire à Δ coupait Σ_A suivant un cercle Γ, alors Σ_A contiendrait la surface obtenue en faisant tourner Γ autour de Δ et que cette surface serait incluse dans une sphère centrée à l'origine. Démontrer que cela est impossible [on pourra étudier la distance de l'origine à un point de Σ_A].
   (c) Déterminer, suivant le signe de la valeur propre double, le nombre de plans vectoriels coupant Σ_A suivant un cercle.
3. **Cas où A n'a que des valeurs propres simples.**
   On suppose que A a trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (a) Soit Π_0 le plan vectoriel engendré par les sous-espaces propres relatifs à λ_1 et λ_2. Démontrer que si un plan vectoriel Π coupe Σ_A suivant un cercle, alors la restriction de Q_A à $\Pi \cap \Pi_0$ est une forme quadratique définie positive. En déduire qu'une condition nécessaire pour qu'il existe un plan vectoriel Π coupant Σ_A suivant un cercle est que $\lambda_2 > 0$.
   (b) L'espace $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à une base orthonormale de vecteurs propres de A, justifier que

$$\sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}\, x_3 - \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\, x_1 = 0$$

   est l'équation d'un plan vectoriel Π. En remarquant que

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (\lambda_3 - \lambda_2)x_3^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)x_1^2,$$

   démontrer que, si $\lambda_2 > 0$, le plan Π coupe Σ_A suivant un cercle.
   Pour $\lambda_2 > 0$, déterminer un autre plan vectoriel Π', distinct de Π, coupant Σ_A suivant un cercle.
   (c) Étant donné deux plans vectoriels distincts Π et Π', on rapporte $\mathbb{R}^3$ à une base orthonormale (f_1, f_2, f_3) telle que f_2 appartienne à la droite $\Pi \cap \Pi'$ et que f_1 et f_3 appartiennent aux plans bissecteurs de Π et Π'. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et que $\mathscr{B} = (\alpha f_1 - \beta f_3, f_2)$ (resp. $\mathscr{B}' = (\alpha f_1 + \beta f_3, f_2)$) soit une base orthonormale de Π (resp Π').
   Exprimer $Q_A(s(\alpha f_1 - \beta f_3) + t f_2)$ et $Q_A(s(\alpha f_1 + \beta f_3) + t f_2)$ en fonction des scalaires s, t, α, β et des $u_{ij} = \Phi_A(f_i, f_j)$ avec $1 \leq i \leq j \leq 3$. En déduire une équation de $\Pi \cap \Sigma_A$ (resp. $\Pi' \cap \Sigma_A$) dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$).
   Démontrer que si ces intersections sont des cercles, on a $u_{12} = u_{13} = u_{23} = 0$ et $u_{22} = \alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33}$. En déduire que (f_1, f_2, f_3) est alors une base de vecteurs propres de A et que la valeur propre relative à f_2 est comprise entre celles relatives à f_1 et f_3.
   (d) Déduire de ce qui précède qu'il existe exactement deux plans vectoriels distincts coupant Σ_A suivant un cercle lorsque $\lambda_2 > 0$.

4. **Exemple.**
   L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique. On considère la matrice symétrique réelle

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^3$, on a $Q_{A_3}(x) \geq 3\|x\|^2$ [on pourra, après l'avoir justifiée, se servir de l'inégalité $2uv \leq u^2 + v^2$]. Quelle est la nature géométrique de l'intersection de Σ_{A_3} avec un plan vectoriel ?

   (b) En remarquant que l'équation de Σ_{A_3} peut s'écrire :

$$4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_2(2x_1 - x_2 + 2x_3) = 1,$$

   déterminer deux plans vectoriels distincts coupant Σ_{A_3} suivant un cercle. Y en a-t-il d'autres ?

   (c) Déterminer, selon les valeurs du nombre réel h, la nature géométrique de l'intersection de Σ_{A_3} avec les plans affines d'équation $x_2 = h$ et $2x_1 - x_2 + 2x_3 = h$.

26.3 III. Décomposition de Choleski

1. **Existence d'une décomposition.**

   (a) Démontrer qu'une matrice A appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une matrice inversible M tel que $A = M^T M$ [on pourra diagonaliser A pour établir que la condition est nécessaire].

   (b) Soit $\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille des vecteurs-colonnes d'une matrice inversible M. Justifier que $\mathscr{V}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ la base orthonormale obtenue par application à la baase $\mathscr{V}$ du procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Démontrer que la matrice de passage T de la base $\mathscr{W}$ à la base $\mathscr{V}$ est triangulaire supérieure.

   Soit O la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{W}$. Justifier que O est orthogonale et démontrer que $M = OT$.

   (c) Déduire de ce qui précède que toute matrice A appartenant à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $T^T T$ avec T une matrice triangulaire supérieure inversible.

2. **Une application : majoration du déterminant de A.**
   Soit A un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et T une matrice triangulaire supérieure telle que $A = T^T T$. On note a_{ij} le terme général de A et t_{ij} le terme général de T. Démontrer que $0 < t_{ii}^2 \leq a_{ii}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
   En déduire que $0 < \det A \leq \prod_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$. À quelle condition a-t-on $\det A = \prod_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$?

3. **Algorithme de décomposition.**
   L'espace $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique. Soit A un élément de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ de terme général a_{ij}.

   (a) Démontrer qu'il est équivalent à trouver une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que $A = T^T T$ et de trouver une écriture de la forme quadratique Q_A de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad Q_A(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} t_{ij} x_j \right)^2$$

   avec $t_{ii} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

   (b) Pour $n \geq 2$, on identifie $\mathbb{R}^n$ avec le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et on note $\tilde{x}$ la projection sur $\mathbb{R}^{n-1}$ d'un élément x de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que, si $a_{11} > 0$ et si on pose $t_{1j} = \frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}$ pour $1 \leq j \leq n$, il existe une unique matrice $\tilde{A}$ élément de $\mathscr{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad Q_A(x) = \left(\sum_{1 \leq j \leq n} t_{1j} x_j \right)^2 + Q_{\tilde{A}}(\tilde{x}).$$

   Démontrer que, si A appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\tilde{A}$ existe et appartient à $\mathscr{S}_{n-1}^+(\mathbb{R})$.

   (c) On considère l'algorithme suivant :

Entrées : Matrice A
;
initialisation $A_1 := A$;
début
  for $k = 1, \dots, n-1$ **do**
    si *le terme de la première ligne, première colonne, de A_k est strictement positif,*
    alors
      $A_{k+1} := \tilde{A}_k$

Algorithme 2 : Algorithme de décomposition

Démontrer que A appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si l'algorithme s'arrête pour $k = n$ avec l'unique terme de A_n strictement positif. Démontrer qu'on a alors déterminé une décomposition $A = T^T T$ avec T triangulaire supérieure inversible.

4. **Exemple.**
   Un entier $n \geq 1$ et un réel $a > 0$ étant fixés, on applique l'algorithme à la matrice symétrique $A(n; a)$ a n lignes et n colonnes dont le terme général a_{ij} vaut a si $i = j$, vaut 1 si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et vaut 0 autrement.
   (a) Démontrer que, si on parvient à la k^{e} itération, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$ on a :
   $$Q_{A(n;a)}(x) = \sum_{1 \leq i \leq k} \left(u_i x_i + \frac{x_{i+1}}{u_i} \right)^2 + \left(a - \frac{1}{u_k^2} x_{k+1}^2 \right) + a \sum_{k+2 \leq i \leq n} x_i^2 + 2 \sum_{k+2 \leq i \leq n} x_{i-1} x_i$$
   où les u_i sont définis par $u_1 = \sqrt{a}$ et $u_i = \sqrt{a - \frac{1}{u_{i-1}^2}}$ pour $2 \leq i \leq k$. Démontrer qu'on a $u_1 > u_2 > \cdots > u_k$.
   À quelle condition pourra-t-on faire une $(k+1)^{\text{e}}$ itération ?
   (b) Démontrer que, si $a \geq 2$, la matrice $A(n; a)$ appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ quel que soit n.
   (c) Démontrer que, si $a < 2$, il existe un entier naturel $N(a)$ tel que la matrice $A(n; a)$ appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $n \leq N(a)$. Calculer $N(1)$, $N(\sqrt{2})$, $N(1{,}9)$.
   (d) Donner l'expression de la décomposition $A(n; 2) = T^T T$ résultant de l'algorithme.

Séquence n° 27

Ep.6 - 3^{e} concours du CAPES Session 2006-C1

27.1 Partie 1 : Présentation du jeu

27.1.1 1) Les règles du jeu

Le « tournoi » est un jeu comportant une suite de manches (appelées « duels ») opposant deux joueurs, jamais plus. Les joueurs vont entrer en jeu successivement, tant qu'aucun d'entre eux n'aura été déclaré vainqueur, et forment ainsi une suite $(J_0, J_1, \ldots)$ aussi longue qu'il faudra, ce qui nous conduit à considérer une suite infinie de joueurs notée $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le premier duel oppose J_0 et J_1, le vainqueur reste en jeu et se voit opposer J_2 qu entre pour le deuxième duel. Plus généralement, le n^{e} duel ($n \geq 2$) oppose le joueur J_n, qui entre alors en jeu, au vainqueur du duel précédent, le perdant quittant le jeu.

On convient enfin que le premier joueur qui remporte N duels, nécessairement consécutifs, est déclaré vainqueur et que le jeu prend fin. N est un entier fixé à l'avance, au moins égal à 2, et valable pour tout le déroulement du tournoi.

Le but de ce problème est de rendre compte de ce type de jeu en en proposant diverses modélisations probabilistes. On s'intéressera ainsi plus particulièrement à la durée du jeu, c'est-à-dire au nombre de duels ayant eu lieu avant la proclamation du vainqueur.

27.1.2 2) Les règles communes aux différentes modélisations aléatoires

La succession des duels est parfaitement décrite si on connaît, pour chacun, les numéros des participants et le numéro du gagnant, cela tant que le jeu continue, c'est-à-dire tant qu'aucun des joueurs n'a été déclaré vainqueur. On supposera que chaque duel est un jeu de hasard, on considéra ainsi le n^{e} duel comme une épreuve aléatoire $\mathscr{E}_n$, dont on observera les résultats possibles.

On présupposera, sans chercher à l'expliciter, l'existence d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ permettant de modéliser le jeu et on s'attachera à décrire l'univers des possibles, c'est-à-dire les issues des différentes épreuves, ainsi que la manière dont on affecte des probabilités aux résultats observés. Les modèles proposés devront respecter les règles suivantes :

1. Le premier duel : la probabilité que le résultat de $\mathscr{E}_1$ soit 1 (J_1 est le gagnant du premier duel) est p, où p est un élément de $]0,1[$ fixé dans tout le problème, le résultat étant 0 avec la probabilité $(1-p)$.
2. Les duels successifs :
   (a) Pour $n \geq 2$, l'épreuve $\mathscr{E}_n$, si elle a lieu, ne dépend de celles qui l'ont précédée que par le numéro du joueur opposé à J_n (celui qui a remporté le duel précédent).
   (b) La probabilité J_n de remporter ce duel (le résultat est n) est égale à p_n, où $\left(p_k\right)_{k\geq 2}$ est une suite d'éléments de $]0,1[$, le joueur qui lui est opposé étant vainqueur avec une probabilité $1-p_n$.

On admettra par ailleurs que, pour toute suite $(\mathscr{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements disjoints et dont la réunion est de probabilité 1, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = P(\mathscr{A}_n).$$

27.2 Partie 2 : Préliminaires

On se propose ici de démontrer divers résultats qui pourront être utilisés dans la suite du problème.

27.2.1 1) Résultat 1

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à termes positifs vérifiant :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n.$$

1. Justifier, pour tout ε strictement positif, l'existence d'un entier naturel non nul n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 on ait :
$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n} y_n\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(x_k - y_k)\right| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n} x_k.$$
2. En déduire que, si la série de terme général x_n est divergente, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} y_k.$$

27.2.2 2) Résultat 2

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs telle que la série de terme général u_n soit convergente.
   (a) Montrer qu'on définit une suite de réels par la relation :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$
   Quelle est la nature de cette suite ?
   (b) Justifier pour tout entier naturel n non nul :
   $$\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - n v_n.$$
   (c) Montrer que si la série de terme général v_n est convergente, alors la suite de terme général $n u_n$ est convergente.
   (d) Montrer que si la série de terme général $n u_n$est convergente alors la suite de terme général $n v_n$ converge vers 0.
   Indication : On pourra éventuellement, après l'avoir justifiée, utiliser la relation :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_{n+1} = \sum_{k\ge n}(v_{k-1} - v_k)$$
   pour majorer l'expression $n v_{n-1}$ lorsque n est un entier naturel non nul.
   (e) En déduire que les séries de termes généraux respectifs $n u_n$ et v_n sont ou bien convergentes et de même somme, ou bien toutes les deux divergentes.
2. Dans cette question, X désigne une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{A},P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède qu'elle admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X>n)$ est convergente et qu'on a alors l'égalité :
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n).$$

27.2.3 3) Résultat 3

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs telle que la série entière $\sum a_n x^n$ admette un rayon de convergence R strictement positif. On note :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

1. Montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers R sur $[0,R[$ si et seulement si f est majorée sur $[0,R[$.
   On suppose dans la suite de cette partie que l'une de ces conditions équivalentes est réalisée et on note L la limite.
2. (a) Montrer que, pour tout n entier naturel :
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k R^k \leq L.$$
   (b) En déduire que la série de terme général $a_n R^n$ est convergente.
   (c) Montrer que la série entière est normalement convergente sur $[-R,R]$. En déduire que :
   $$\sum_{n\geq 0} a_n R^n = \lim_{x\to R^-} f(x).$$

27.3 Partie 3 : Première modélisation : le cas particulier $N = 2$.

Dans cette section on observe la suite des numéros des différents vainqueurs successifs. L'univers des possibles est alors l'ensemble des listes (éventuellement infinies) représentant les numéros des joueurs vainqueurs aux différents duels. Aisni : $(0,2,3,3)$ représentera le jeu de 4 duels remportés successivement par J_0, J_2, J_3 et J_3 qui est alors déclaré gagnant du tournoi, ce qui met fin à celui-ci. On note D_n, pour n au moins égal à 2, l'événement « le jeu s'arrête à l'issue de n^e duel ».

1. (a) Expliciter D_2 à l'aide de la modélisation proposée.
   (b) Plus généralement, expliciter D_{n+1} lorsque n est un entier au moins égal à 2.
2. Dans cette question on suppose que, pour tout $n \geq 2$, p_n est égal à p.
   (a) Calculer $P(D_n)$ pour n supérieur ou égal à 2. Vérifier que $\bigcup_{n\geq 2} D_n$ est un événement de probabilité 1. Interpréter ce résultat.
   (b) On peut alors considérer une variable aléatoire T égal au nombre de duels qui ont effectivement eu lieu lorsque le jeu s'arrête. Calculer, après avoir justifié leurs existences, son espérance et sa variance.
3. On revient au cas général où, pour tout i au moins égal à 2, p_i est un réel élément de $]0,1[$. On pose pour tout n au moins égal à 2 :
   $$\beta_n = \prod_{i=2}^{n} p_i.$$
   Exprimer, pour n au moins égal à 2, $\sum_{k=2}^{n} P(D_k)$ en fonction de la suite $\left(\beta_k\right)_{k\geq 2}$. En déduire que $\bigcup_{n\geq 2} D_n$ est un événement de probabilité 1 si et seulement si β_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
   Lors cette condition est vérifiée on définira T comme à la question 2.b. et on posera, pour $n \geq 2$:
   $$u_n = \beta_n - \beta_{n+1}.$$
   Jusqu'à la fin de cette partie 3, on suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que, pour tout i au moins égal à 2, l'égalité suivante soit vérifiée :
   $$p_i = 1 - \frac{1}{i^\alpha}.$$
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\bigcup_{n\geq 2} D_n$ soit un événement de probabilité 1.
   Indication : on pourra s'intéresser à la suite de terme général $-\ln(\beta_n)$.
5. Dans cette question, α est égal à 1. Donner une loi de T. T admet-elle une espérance ?
6. Dans cette question, on suppose : $0 < \alpha < 1$.

(a) Justifier l'équivalence lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=2}^{n}(-\ln(p_k)) \sim \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha}.$$

(b) Après avoir justifié pour tout entier k au moins égal à 2 l'inégalité :

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha},$$

démontrer l'équivalence lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

(c) En déduire que, pour tout c réel strictement positif, la suite de terme général $\ln(n^c u_n)$ tend vers $-\infty$ puis que la série de terme général nu_n est convergente.
Que peut-on en conclure pour l'espérance de T ?

27.4 Partie 4 : Deuxième modélisation - le cas où les probabilités sont constantes

Dans cette partie et jusqu'à la fin du problème N est un entier supérieur ou égal à 3 et on suppose, pour tout n supérieur ou égal à 2 : $p_n = p$. On notera : $q = 1 - p$.

Pour tout n entier naturel, on note A_n l'événement « le joueur J_n participe à au moins un duel » et G_n l'événement « le joueur J_n est vainqueur du tournoi ».

27.4.1 1) Cas particulier : $N = 3$ et $p = 1/2$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(G_n) = \frac{1}{8}P(A_n).$$

2. Montrer que les événements A_0, A_1, A_2 et A_3 sont des événements certains.
3. (a) Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 4. On introduit les événements $A_{n,k}$: « le n^{e} duel a lieu et oppose J_n et J_{n-k} ». Montrer que la probabilité de $A_{n,k}$ est nulle si k est différent de 1 ou de 2.
En déduire alors pour $n \geq 4$:

$$P(A_n) = \frac{1}{2}P(A_{n-1}) + \frac{1}{4}P(A_{n-2}).$$

(b) On désigne par r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$) les deux racines de l'équation :

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4}.$$

Vérifier que, pour $n \geq 2$, on a :

$$P(A_n) = \frac{4}{\sqrt{5}}[r_2^n - r_1^n].$$

(c) En déduire que la probabilité que le jeu s'arrête est égale à 1. On pourra alors considérer une variable aléatoire T égale au nombre de duels qui ont effectivement eu lieu lorsque le jeu s'arrête.
Calculer : $P(T = 3)$.
Montrer que, pour $n \geq 4$:

$$P(T = n) = P(G_{n-2}).$$

En déduire une expression de $P(T = n)$ pour $n \geq 4$ puis l'espérance de T.
Indication : Pour 4.1.3.b. et 4.1.3.c., il pourra être intéressant de mener formellement dans un premier temps les calculs en fonction de r_1 et de r_2 et d'utiliser ensuite leur somme et leur produit.

27.4.2 2) Étude du cas général

On revient au cas général : $N \geq 3$ et p est élément de $]0,1[$. On posera de plus, pour tout n entier naturel :

$$a_n = P(A_n) \quad \text{et} \quad g_n = P(G_n).$$

1. (a) Calculer g_0. Que vaut a_k pour $0 \leq k \leq N$?
   (b) Montrer que la série de terme général g_n est convergente.
   (c) Justifier, pour tout n non nul, la relation :

   $$g_n = p(1-p)^{N-1} a_n.$$

   En déduire que la série de terme général a_n est convergente. On posera :

   $$S = \sum_{n \geq 1} a_n.$$

2. (a) En considérant à nouveau les événements $A_{n,k}$ définis dans la partie précédente, justifier, pour n strictement supérieur à N, la relation :

   $$a_n = \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} a_{n-k}.$$

   Exprmer a_{N+1} en fonction de p et de N.
   (b) En sommant les égalités précédentes, montrer l'égalité :

   $$(1-p)^{N-1} S = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=k}^{N-1} p(1-p)^{k-1} a_{N-i}.$$

   En utilisant une inversion d'indice dans la somme double, puis la question 1.a. calculer S.
   En déduire la somme de la série de terme général g_n, puis que la probabilité que le jeu se termine est égale à 1.

3. On notera T une variable aléatoire égale au nombre de duels ayant eu lieu jusqu'à l'arrêt du jeu.
   (a) Exprimer a_n et g_n en fonction de T.
   (b) En utilisant le résultat 2 des préliminaires, montrer que T admet une espérance et donner l'expression de $\mathbf{E}(T)$ en fonction de p et de N. Retrouver le résultat relatif à $\mathbf{E}(T)$ de la question 4.1.3.c.
   La formule obtenue vaut aussi pour $N = 2$; retrouver ainsi le résultat de la question 3.2.b.
   Déterminer l'espérance de T pour N quelconque et $p = 1/2$.
   (c) Démontrer, pour $n \geq N+1$:

   $$a_n - a_{n=1} = p(1-p)^{N-1} a_{n-N+1}. \qquad (\mathscr{R})$$

27.5 Partie 5 : Comportement asymptotique de la loi de T

27.5.1 1) Un lemme

Démontrer que, pour tout entier naturel r non nul et toute famille $(z_1, \ldots, z_r)$ de complexes non nuls, l'égalité :

$$\left| \sum_{k=1}^{r} z_k \right| = \sum_{k=1}^{r} |z_k|$$

n'est réalisée que lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (2 \leq k \leq r) \Rightarrow (\exists \lambda_k \in]0, +\infty[,\ z_k = \lambda_k z_1).$$

27.5.2 2) Étude d'une fonction associée à T

1. Montrer qu'on peut définir une fonction Q par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad Q(x) = \sum_{n\geq 0} P(T>n)x^n.$$

Vérifier qu'elle est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

2. En utilisant la relation ($\mathscr{R}$) et en s'inspirant des techniques de calcul mises en oeuvre à la question 2.b. de la partie 4 section 2), démontrer, pour tout x de $[-1,1]$, la formule :

$$\left(1-x+\frac{p}{1-p}(x(1-p))^N\right)Q(x) = 1-(x(1-p))^N.$$

3. Vérifier que les deux polynômes :

$$1-X+\frac{p}{1-p}(X(1-p))^N \quad \text{et} \quad 1-(X(1-p))^N$$

admettent dans $\mathbb{C}$ une seule racine commune et que celle-ci est simple et réelle. En déduire la relation :

$$Q(x) = 1-\frac{1}{p}-\frac{1}{pB(x)} \quad \text{avec } B(x) = \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}x^k - 1.$$

27.5.3 3) Étude des racines de B

1. Étudier les variations de B sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $B(1)$. En déduire que B admet une unique racine réelle positive ρ_N élément de $]1,+\infty[$ et que cette racine est simple.
2. En utilisant le lemme, montrer que les racines complexes de B sont de module strictement supérieur à ρ_N.
3. D'après ce qui précède, les pôles de Q sont en particulier de module strictement à 1. Aurait-on pu prévoir directement ce résultat ?

27.5.4 4) Recherche d'équivalent

On note $\{z_1,\dots,z_m\}$ les racines de B dans $\mathbb{C}$ de multiplicités respectives ν_k.

1. Justifier l'existence d'une famille de complexes non nuls telle que, pour tout complexe z de module inférieur ou égal à 1 on ait :

$$\frac{1}{B(z)} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\nu_k}\frac{\lambda_{k,s}}{(z-z_k)^s}.$$

2. Dans cette question s et k sont fixés et z désigne un complexe de module inférieur ou égal à 1.
   (a) Justifier l'égalité :

$$\frac{1}{(z_k-z)^s} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+s-1}{s-1}\frac{z^n}{z_k^{n+s}}.$$

   (b) En déduire, pour tout k, l'existence d'un polynôme P_k de degré inférieur ou égal à ν_k-1 tel que :

$$\sum_{s=1}^{\nu_k}\frac{\lambda_{k,s}}{(z-z_k)^s} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{P_k(n)}{z_k^n}\right)z^n.$$

   (c) En déduire une expression de a_{n+1} pour $n\geq 1$.
3. (a) Montrer, à l'aide des questions précédentes, l'existence d'un réel K tel qu'on ait :

$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\rho_N^n}.$$

   (b) Donner une expression de K en fonction de p, B et ρ_N. En déduire un équivalent à l'infini de $P(T=n)$.

Séquence n° 28

Ep.7 - Algèbre commutative, algèbre linéaire et arithmétique

Notations, rappels et conventions

— Dans la suite, tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.
— On rappelle qu'un élément a d'un anneau R est *nilpotent* s'il existe un entier positif n tel que $a^n = 0$.
— Un anneau est *réduit* s'il ne possède pas d'éléments nilpotents non nuls.
— Un anneau est *fini* s'il possède un nombre fini d'éléments.
— Un idéal non nul $\mathfrak{p}$ d'un anneau R est *minimal* si pour tout idéal $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, l'inégalité $\mathfrak{q} \neq 0$ est équivalente à $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. En d'autre termes, il n'existe pas d'idéaux non nuls strictement contenus dans $\mathfrak{p}$.
— Pour tout anneau R, on désigne par $R^\times$ le groupe (multiplicatif) de ses éléments inversibles.
— Pour tout nombre premier p, on rappelle que l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
— On rappelle que pour tout corps K, un polynôme $f \in K[X]$ de degré $n > 0$ possède au plus n racines distinctes. Pour un sous-corps de $\mathbb{C}$, ce résultat fait partie du cours. Le cas général se démontre de manière identique ; il sera admis ici.
— Soit G un groupe fini (noté multiplicativement, d'élément neutre 1) de cardinalité n. On rappelle que le *théorème de Lagrange* affirme que l'ordre de tout sous-groupe de G divise n. En particulier, pour tout élément $x \in G$, on a l'identité $x^n = 1$.
— L'*adjointe* A^* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est la transposée de sa conjuguée complexe,

$$A^* = \overline{A}^T \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{C}).$$

— On rappelle que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni d'un produit hermitien défini par

$$\langle u, v \rangle = u^* v.$$

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a alors la *relation d'adjonction*

$$\langle Au, v \rangle = \left\langle u, A^* v \right\rangle$$

quelque soient $u, v \in \mathbb{C}^n$. On rappelle également que l'identité $\langle u, u \rangle = 0$ est équivalente à $u = 0$.
— Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est *normale* si elle commute avec son adjointe, c'est-à-dire si $AA^* = A^*A$.
— Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on désignera par $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de l'endomorphisme $u \mapsto Au$ de $\mathbb{C}^n$.
— Les trois parties de ce sujet sont indépendantes.

28.1 Partie 1 : Anneaux réduits finis

1. Soit R un anneau. Montrer que l'ensemble $\mathscr{N}(R)$ des éléments nilpotents de R est un idéal et que le quotient $R/\mathscr{N}(R)$ est réduit.
2. Montrer que si un élément a de R est nilpotent alors l'élément $1-a$ est inversible. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer $\mathscr{N}(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z})$.

4. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal minimal non nul de R. Montrer que $\mathfrak{p}$ est principal (indication : montrer que si $x \in \mathfrak{p}$ est non nul, alors $\mathfrak{p} = xR$.)
5. Montrer que si un idéal $\mathfrak{a}$ de R ne contient pas $\mathfrak{p}$ alors on a l'identité $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} = 0$.

On suppose désormais que R est réduit.

6. Montrer qu'il existe un unique élément $e \in \mathfrak{p}$ tel que $ex = x$ pour tout $x \in \mathfrak{p}$ (indication : montrer que si $\mathfrak{p} = xR$ alors $\mathfrak{p} = x^2R$.)
7. Montrer que $\mathfrak{p}$, muni des opérations de somme et de produit définies sur R est un corps ayant e comme élément neutre pour le produit.
8. Montrer qu'il existe un homomorphisme canonique $R \to \mathfrak{p}$ (indication : considérer la multiplication par e).

On suppose désormais que R est réduit et fini.

9. Montrer que R possède des idéaux maximaux non nuls et qu'ils sont en nombre fini.
10. Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ les idéaux maximaux non nuls de R et indiquons par $e_1, \dots, e_n$ leurs éléments neutres respectifs. Montrer que $e_1 + \cdots + e_n = 1$.
11. En déduire qu'il existe un isomorphisme canonique entre R et $\mathfrak{p}_1 \times \cdots \times \mathfrak{p}_n$. En résumé on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 28.1 Tout anneau réduit fini est un produit de corps.

28.2 Partie 2 : Diagonalisabilité des matrices normales

1. Montrer que pour tout endomorphisme f d'un groupe G, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^m)$ pour tout entier $m > 1$,
   (ii) Il existe un entier $m > 1$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^m)$,
   (iii) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Soient f et g deux endomorphismes d'un groupe G. Si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ alors $\mathrm{Ker}(gf) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
3. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux.
4. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a l'identité :
$$\mathrm{Ker}((A - \lambda \cdot I_n)^2) = \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_n),$$
   où $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne la matrice unité (indication : utiliser le théorème de décomposition de noyaux appliqué au polynôme caractéristique de la matrice, puis le point 1 du problème).
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice normale. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $A - \lambda \cdot I_n$ est normale.
6. Montrer que pour toute matrice normale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a l'identité $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^*)$ (indication : utiliser la propriété d'adjonction).
7. En déduire que pour toute matrice normale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a la relation $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$ (indication : utiliser la question 2).
8. En utilisant les questions 4 et 5, montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 28.2 Toute matrice normale est diagonalisable.

28.3 Partie 3 : Le théorème des deux carrés (par la méthode de Thue)

Dans la suite, on fixe un nombre premier impair p.

1. Montrer que l'application $\varphi\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ définie par $\varphi(x) = x^2$ est un homomorphisme de groupes. En déterminer le noyau et l'image.
2. En déduire qu'il existe $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.
3. Montrer que l'application $\psi\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ définie par $\psi(x) = x^{(p-1)/2}$ est un homomorphisme de groupes. En déterminer le noyau et l'image.

4. Soit n un entier non divisible par p. Déduire de la question précédente que l'image de n dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un carré si et seulement si $n^{(p-1)/2}$ est congru à 1 modulo p.
5. Montrer que -1 est un carré modulo p si et seulement si p est congru à 1 modulo 4.
6. En déduire que si p est la somme de deux carrés alors $p \equiv 1 \pmod 4$.

On suppose désormais que p est congru à 1 modulo 4.

7. Soit n le plus grand entier tel que $n^2 < p$. Considérons l'ensemble $U = \{0, \dots, n\}$ et l'application $f : U \times U \to \mathbb{Z}$ définie par
$$f(x, y) = x + wy,$$
où w est un entier tel que $w^2 \equiv -1 \pmod p$ (un tel entier existe d'après la question 5). Montrer qu'il existe deux éléments de $U \times U$ ayant des images par f congrues modulo p (indication : utiliser la cardinalité de U pour montrer que f ne peut pas être injective).
8. En déduire que p est la somme de deux carrés. En résumé, on a démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 28.3 Un nombre premier impair est la somme de deux carrés si et seulement s'il est congru à 1 modulo 4.

Séquence n° 29

Ep.8 - CAPES Externe 2010-C1

Introduction

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On étudie la série de terme général a_n. On montre qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée γ et appelée *Constante d'Euler*. Pour cela, on commence par étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

29.1 Partie I : Première approche de la constante d'Euler

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0,1]$.
3. Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p} \,\mathrm{d}t,$$

   puis montrer que pour tout entier $p \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq a_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geq 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$

5. Conclure qu'on a la développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$H_n \underset{n\to-\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$. Montrer que
$$0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}.$$
7. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

29.2 Partie II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

Définition 29.1 (Intégrabilité). Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dira que f est *intégrable* sur I si l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.

On admettra le résultat suivant :

PROPOSITION 29.2 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I. Si la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge, alors, la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et on a :
$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n.$$

1. Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$$
   (a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
   (b) Déterminer la limite de $\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}$ quand $t \to 0^+$.
   (c) Conclure.
2. Dans cette question, on se propose de démontrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a}.$$
   Soient x et y deux réels strictement positifs.
   (a) Démontrer que :
$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
   (b) Montrer que pour $a \leq b$ on a pour tout réel $z > 0$:
$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}.$$
   (c) Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a}.$$
3. **Une première représentation intégrale de la constante d'Euler**
   (a) Démontrer que pour tout réel $t > 0$ on a :
$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}\right).$$

(b) En déduire que pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}-\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)t}-\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}-\mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}\right)$$

(c) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$1-\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\geq 0.$$

(d) Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ et démontrer l'égalité :

$$\gamma=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

4. **Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler**
   Soit y un réel strictement positif.

(a) Calculer $\int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$, puis déduire que

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t\right)=0.$$

(b) Démontrer que :

$$\gamma+\int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{y}\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t+\int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que :

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\gamma+\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\,t\,\mathrm{d}t}{=}0.\right)$$

(d) Démontrer que la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t=\lim_{y\to 0^+}\left(\mathrm{e}^{-y}\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

(e) Conclure alors que :

$$\gamma=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

29.3 Partie III : Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1. (a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^{1}\left(\frac{1}{t}-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

(**Indicaton :** *on pourra calculer chacune des deux intégrales*).

(b) En utilisant l'égalité obtenue en II.3.d., démontrer que :

$$\gamma=\int_0^{1}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit F la fonction définie par :

$$F(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{H_k}{k!}x^k.$$

(On rappelle que $H_0 = 0$ et pour $k\geq 1$, $H_k=\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}$.)

(a) Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}(\mathrm{e}^x - 1).$$

(c) Montrer alors que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3. Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\gamma + \ln x = \mathrm{e}^{-x}F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4. Soit un entier $n \geq 1$ et soit un entier $a \geq 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leq \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leq \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}.$$

(**Indication :** *on pourra admettre et utiliser l'inégalité :* $n! \geq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.)

5. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\left|\gamma + \ln n - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k\right| \leq \frac{a}{a-1} \frac{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^n + \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

6. Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-10} près. (On ne demande par le calcul d'une telle valeur approchée.)

29.4 Partie IV : La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

Pour tout entier $p \geq 0$, on pose :

$$v_p = p\left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k}\right).$$

1. (a) En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans l'expression de v_p, montrer que pour tout entier $p \geq 1$ on a :

$$v_p = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p) \quad \text{où } \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}.$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

(d) En utilisant le développement asymptotique de H_n, obtenu en I.5., conclure que la série de terme général v_p est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\mathrm{E}\left(\log_2 n\right)}{x}$$

où $\log_2$ désigne la fonction logarithme en base 2 et $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du réel x.

(a) Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général u_n.

(b) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leq m < 2^{m+2}$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{2^m},$$

puis en déduire que :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k \right| \leq \frac{n+1}{2^n}.$$

(c) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=0}^{n} v_p + O\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

3. On pose pour tout entier naturel n :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

(a) Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

(b) Expliquer v_k en fonction de k, r_k et r_{k+1}. Montrer ensuite que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1}.$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right).$$

29.5 Partie V : La formule de Gosper (1972)

Dans cette partie, on désigne par $\mathscr{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. Si $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un élément de $\mathscr{F}$, on notera aussi $x[k]$ le terme x_k de la suite x. On considère l'endomorphisme Δ de $\mathscr{F}$ défini par :

$$\forall x \in \mathscr{F},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1].$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ^n l'endomorphisme de $\mathscr{F}$ obtenu en composant Δ avec lui-même n fois et on pose $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathscr{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}.$$

(**Indication :** *écrire $\Delta = \mathrm{id}_{\mathscr{F}} - T$ où T est un endomorphisme de $\mathscr{F}$ défini, pour tout $x \in \mathscr{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, par :* $T(x)[k] = x[k+1]$.)

2. Soit $\left(u_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et de limite ℓ. On se propose de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p=\ell.$$

   (a) Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\binom{n}{p}/2^n\right)_{n\geq p}$ converge vers 0.

   (b) On suppose dans cette question $\ell=0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p=0.$$

   (**Indication :** *on pourra utiliser l'égalité suivante :*

$$\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p=\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{p}u_p+\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}u_p$$

   et, étant donné un réel $\varepsilon>0$, *choisir un entier* k *suffisamment grand pour que l'on ait* $\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}u_p\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.)

   (c) Conclure pour le cas général où ℓ est quelconque.

3. Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante :

PROPOSITION 29.3 Soit $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathscr{F}$. Si la série $(-1)^kx_k$ converge, alors, la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx_k=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

On pose, pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$U_N=\sum_{k=0}^{N}(-1)^kx_k\quad\text{et}\quad V_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

   (a) Démontrer que :

$$V_N=\frac{1}{2^{N+1}}\sum_{q=0}^{N}\binom{N+1}{q+1}U_q.$$

   (*on pourra observer que pour tout* $k\in\mathbb{N}$, $(-1)^kx_k=U_k-U_{k-1}$, *avec, par convention,* $U_{-1}=0$.)

   (b) En déduire que la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx_k.$$

4. On considère dans cette question un entier $n\geq 1$ ainsi que la suite $x=\left(x_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_j=\frac{1}{2^n+j}.$$

   (a) Montrer que pour tout entier $m\geq 0$, on a :

$$\Delta^m(x)[0]=\frac{1}{2^n}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

   Indication : *On pourra admettre et utiliser le résultat suivant :*

Lemme 29.4 Pour $m,n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

(b) En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

(c) Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}.$$

Séquence n° 30

Ep.9 - CAPES Externe 2009-C1

Notations

- Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in K[X]$, on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$.
- Si deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes, on notera $u_n \sim v_n$. De même, si f et g sont deux applications réelles définies au voisinage d'un point x_0 et équivalentes en x_0, on notera $f(x) \sim_{x_0} g(x)$. Quand le voisinage sera un voisinage à droite en x_0, on précisera $f(x) \sim_{x_0^+} g(x)$.
- On rappelle que le *produit au sens de Cauchy* de deux séries (réelles ou complexes) $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est la série $\sum w_n$ où le terme général w_n est défini pour $n \geq 0$ par $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_n v_{n-k}$. On rappelle aussi que si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit $\sum w_n$ est aussi absolument convergente et l'on a
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

Objectifs du problème

Ce sujet aborde une série de résultats et de propriétés relatifs à la formule de Stirling[1] ainsi qu'aux polynômes et nombres dits de Bernoulli[2]. Il se compose de quatre parties.

Dans la partie I, on établit la formule de Stirling qui donne un équivalent simple de la suite $(n!)_n$. Ce travail utilise les intégrales de Wallis[3], qui sont étudiées au début de la partie. La fin de la partie I est une application des intégrales de Wallis et de la formule de Stirling à l'étude du volume des boules dans $\mathbb{R}^n$.

La partie II s'intéresse aux polynômes et nombres de Bernoulli. On y étudie certaines de leurs propriétés et l'on donne deux applications de cette étude. La première, arithmétique, s'intéresse au calcul des sommes du type $\sum_{k=0}^{N} k^p$. La deuxième est consacrée au développement en série entière de la fonction $\frac{te^{xt}}{e^t-1}$.

Dans la partie III, on introduit la fonction ζ de Riemann[4] et l'on explicite ses valeurs prises sur les entiers positifs pairs au moyen des nombres de Bernoulli. Ce calcul permet, avec la formule de Stirling, d'expliciter un équivalent simple pour la suite des nombres de Bernoulli.

Dans la partie IV, on revient à la formule de Stirling et l'on décrit une méthode pour obtenir un raffinement asymptotique de la formule.

Les parties de ce sujet ne sont pas indépendantes, chacune d'elles pouvant utiliser des résultats établis dans celles qui la précèdent. Aussi pourra-t-on utiliser pour traiter certaines questions, les résultats établis dans les questions précédentes sans les démontrer. Il est toutefois vivement conseillé aux candidats d'aborder linéairement ce sujet.

30.1 Partie I : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

1. **Intégrales de Wallis**

---

1. James STIRLING, mathématicien anglais, Garden 1692 - Edimbourg 1770.
2. Jakob BERNOULLI (francisé en Jacques), mathématicien suisse, premier d'une longue lignée familiale de mathématiciens. Bâle 1654 - Bâle 1705.
3. John WALLIS, mathématicien anglais, Ashford 1616 - Oxford 1703.
4. Georg Friedrich Bernhard RIEMANN, mathématicien allemend, Breselenz 1826 - Selasca 1866.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Indication. On pourra, par exemple, utiliser un changement de variables.)

(b) Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.
(Indication. Pour la décroissance, on pourra comparer les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. Pour la stricte décroissance, on pourra raisonner par l'absurde.)

(c) À l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour $n \geq 0$, on a

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n.$$

(d) En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}.$$

(e) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

(Indication. On pourra utiliser la question précédente en distinguant suivant la parité de l'entier n.)

(f) Prouver que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$$

et en déduire que $W_n \sim_n W_{n+1}$.
(Indication. On pourra utiliser la question I.1.b.)

(g) Montrer finalement que $W_n \sim_n \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim_n W_n$.

2. **Formule de Stirling**
On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geq 2$, par

$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}.$$

(a) Exprimer simplement v_n en fonction n et donner un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$ de la suite $(v_n)_n$.

(b) En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente. Montrer alors que les suites $(\ln u_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim_n K\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}.$$

(c) En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $\left(W_{2p}\right)_p$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que :

$$n! \sim_n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{(Formule de Stirling)}.$$

3. **Une autre application des intégrales de Wallis.**

RAPPEL SUR LES INTÉGRALES MULTIPLES ET GÉNÉRALISATION (CE RAPPEL N'EST UTILE QUE POUR LES SOUS-QUESTIONS I.3.A. ET I.3.C. DE CETTE QUESTION I.3.). *Les notions d'intégrales doubles et triples ainsi que la méthode de calcul par intégrations successives de ces dernières (présentes au programme), se généralisent à toute dimension finie de la manière suivante : étant donné un entier $n \geq 1$, une partie $A_n \subset \mathbb{R}^n$ sera dite continûment paramétrable si $n = 1$ et A_1 est un segment ou si $n \geq 2$ et s'il existe une partie $A_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ continûment paramétrable et deux fonctions continues $f, g\colon A_{n-1} \to \mathbb{R}$ telles que*

$$A_n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A_{n-1} \text{ et } f(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g(x_1, \dots, x_{n-1})\right\}.$$

Avec ces notations pour une fonction continue $\varphi\colon A_n \to \mathbb{R}$, on définit l'intégrale multiple de φ sur A_n par la formule suivante :

$$\begin{aligned}&\int \cdots \int_{A_n} \varphi(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1 \\ &= \int \cdots \int_{A_{n-1}} \left(\int_{f(x_1,\dots,x_{n-1})}^{g(x_1,\dots,x_{n-1})} \varphi(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

On admettra, sans démonstration, qu'à l'instar des intégrales doubles et triples, le réel ainsi obtenu ne dépend que de la partie A_n et de la fonction φ. Le volume de la partie A_n sera alors, par définition, le réel $\int \cdots \int_{A_n} \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1$.

On se propose d'étudier ici le comportement du volume d'une boule de rayon fixé quand on fait varier la dimension de l'espace. Plus précisément, on se fixe un réel $R > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$ on considère dans $\mathbb{R}^n$ la boule $\mathscr{B}_n$ de centre O et de rayon R :

$$\mathscr{B}_n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2\right\}.$$

On note V_n son volume.

(a) Montrer que, pour $n \geq 2$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{B}_n \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathscr{B}_{n-1} \\ \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \end{cases}.$$

En déduire par récurrence sur $n \geq 1$, que $\mathscr{B}_n$ est continûment paramétrable.

(b) Soient $\lambda > 0$ un réel et $m \geq 0$ un entier. Montrer, en se servant par exemple d'un changement de variable utilisant la fonction $t \mapsto \lambda \sin t$ que

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} (\lambda^2 - x^2)^{m/2}\, \mathrm{d}x = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}.$$

(c) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on a :

$$V_n = 2^k \left(\prod_{i=1}^{k} W_i \right) \int \cdots \int_{\mathscr{B}_{n-k}} (R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-k}^2)^{k/2}\, \mathrm{d}x_{n-k} \cdots \mathrm{d}x_1.$$

(Indication. On pourra, pour n fixé, faire une récurrence finie sur k.)

(d) Prouver finalement que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$V_n = \left(\prod_{i=1}^{n} W_i \right) (2R)^n$$

et par suite, que pour $k \geq 1$:

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k},$$

et que pour $k \geq 0$:

$$V_{2k+1} = Z^{2k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}.$$

Expliciter V_1, V_2, V_3 et V_4.

(e) En utilisant la formule de Stirling, donner des équivalents simples des suites $(V_{2k})_k$ et $(V_{2k+1})_k$.

(f) En déduire que $\lim_n V_n = 0$.

(g) Montrer que, soit la suite $(V_n)_n$ est décroissante, soit il existe un rang n_0 tel que la suite $(V_n)_n$ soit croissante jusqu'au rang n_0, puis décroissante.

(Indication. On pourra calculer simplement le rapport V_{n+1}/V_n grâce à la question I.3.d. et utiliser les questions I.1.b. et I.1.g.)

(h) Donner les valeurs de R pour lesquelles la suite $(V_n)_n$ est décroissante.

(i) Que vaut le rang n_0 de la question I.3.g. quand $R = 1$?

30.2 Partie II : Polynômes et nombres de Bernoulli

1. **Définitions**

(a) Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(B_n(X))_n$ vérifiant

(i) $B_0(X) = 1$;

(ii) $\forall n \geq 1,\ B'_n = nB_{n-1}$;

(iii) $\forall n \geq 1,\ \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

On appelle $(B_n(X))_n$ *la* suite de polynômes e Bernoulli. *Pour tout* $n \geq 0$*, on pose* $b_n = B_n(0)$*. La suite de réels* $(b_n)_n$ *est appelée* suite des nombres de Bernoulli.

(c) Expliciter $B_n(X)$ et b_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

2. **Premières propriétés**

(a) Quel est le degré de $B_n(X)$ pour $n \geq 0$?

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

(c) Prouver par récurrence que, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(d) En déduire, pour $n \geq 1$, une expression de b_n en fonction de $b_0, \ldots, b_{n-1}$. Calculer b_5 et b_6.

(e) Montrer que la suite $(b_n)_n$ est une suite de rationnels et que, pour $n \geq 0$, les polynômes $B_n(X)$ sont à coefficients rationnels.

(f) Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X).$$

Montrer, en utilisant la définition des polynômes de Bernoulli, que pour tout $n \geq 0$, on a $C_n(X) = B_n(X)$.

(g) En déduire que :

i. $\forall n \geq 1,\ b_{2n+1} = 0$;

ii. $\forall n \geq 0,\ B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$.

3. **Étude des variations de B_n sur** $[0, 1]$

(a) Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Établir que, si P est non nul et de signe constant sur $[0, 1]$, alors on a $\int_0^1 P(X)\,\mathrm{d}x \neq 0$.

(b) Montrer par récurrence sur $n \geq 1$, que B_{2n} vérifie :

(i) $(-1)^n B_{2n}(0) < 0$;

(ii) $(-1)^n B_{2n}(1) < 0$;

(iii) $(-1)^n B_{2n}(\frac{1}{2}) > 0)$;

(iv) la fonction $(-1)^n B_{2n}$ est strictement croissante sur $[0, 1/2]$ et strictement décroissante sur $[1/2, 1]$

et que B_{2n+1} vérifie

(v) $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$;

(vi) il existe deux réels $\alpha_{2n+1} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$ tels que la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}]$ puis strictement décroissante sur $[\beta_{2n+1}, 1]$.

(Indication. Il pourra être judicieux d'aborder en même temps la récurrence sur ces six propriétés.)

(c) En déduire que le signe du réel b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.

(d) Pour tout $n \geq 0$, on pose $B_n^*(X) = B_n(X) - b_n$. Pour $n \geq 1$, donner l'allure générale des courbes représentatives des fonctions B_{4n-2}^*, B_{4n-1}^*, B_{4n}^*, B_{4n+1}^* sur l'intervalle $[0, 1]$.

4. **Une application arithmétique**

(a) Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

(b) Soient $p \geq 1$ et $N \geq 0$ deux entiers. On pose $S_p(N) = \sum_{k=0}^{N} k^p$. Montrer, en utilisant la question II.4.a. que :

$$S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1}.$$

(c) Calculer explicitement, en fonction de l'entier naturel N, les sommes $S_p(N)$ pour $p = 1, 2, 3$.

5. **Une application analytique**

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{b_n}{n!} t^n$ est égal à 2π.

(Indication. On pourra, par exemple, déterminer les réels $t > 0$ pour lesquelles la suite $\left(\frac{|b_n|}{n!} t^n\right)_n$ reste bornée. À cet effet, on pourra utiliser la formule de Stirling et admettre pour cette question que l'on a l'équivalent $b_{2p} \sim_p (-1)^{p+1} \left(\frac{p}{\pi \mathrm{e}}\right)^{2p} \sqrt{16\pi p}$. Ce dernier résultat sera établi dans la question III.2.e. à venir.)

(b) Calculer le produit au sens de Cauchy des séries entières

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n\right)$$

et en déduire que, pour tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a :

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n.$$

(c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a :

$$\frac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.$$

(d) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n(x)}{n!} t^n$ est bien 2π.

(Indication. On pourra regarder dans $\mathbb{C}$ le comportement de la série entière au voisinage du cercle $|z| = 2\pi$.)

30.3 Partie III : Fonction ζ de Riemann et nombres de Bernoulli

1. **Fonction ζ**

On appelle fonction ζ de Riemann (réelle) la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

(a) Soit $s > 0$. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} < \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} < \frac{1}{k^s}.$$

En déduire que la nature (divergence ou convergence) de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$ est la même que celle de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$.

(b) Donner le domaine de définition de ζ et prouver qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.

(c) Montrer que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$ et en déduire $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s)$.

(d) Soit $a > 1$ un réel. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. En déduire que ζ est continue sur son domaine de définition et que $\lim_{s\to +\infty} \zeta(s) = 1$.

(e) Montrer que, pour tout $s > 0$, la série $\theta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge. Prouver que, pour tout $s > 1$, on a :

$$\theta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s).$$

2. **Calcul de $\zeta(2p)$**

Pour toute fonction continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on note :

$$c_k(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k\pi x}\,\mathrm{d}x$$

le k^e coefficient de Fourier de la fonction f. On rappelle sans démonstration que, si f et g sont deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, alors on a

$$\int_0^1 \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(f)}c_k(g)$$

(où $z \mapsto \overline{z}$ désigne la conjugaison complexe).

(a) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient $c_k(B_n)$.
(Indication. Pour $k \neq 0$ et $n \geq 2$, on cherchera une relation entre $c_k(B_n)$ et $c_k(B_{n-1})$.)

(b) Soient $n, m \geq 1$ deux entiers. Montrer que

$$\int_0^1 B_n(x)B_m(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} [c_{-k}(B_n)c_k(B_m) + c_k(B_n)c_{-k}(B_m)]$$

et en déduire la valeur de cette intégrale au moyen de la fonction ζ.
(Indication. On distinguera les cas $n+m$ pair et $n+m$ impair.)

(c) Pour $p \geq 1$, calculer $\int_0^1 B_1(x)B_{2p-1}(x)\,\mathrm{d}x$ en intégrant par parties. En déduire que

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1}\frac{b_{2p}}{2}\frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}.$$

(d) Donner les valeurs de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$$

et des sommes

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^4},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^6}.$$

(e) En utilisant les questions III.1.d. et III.2.c. ainsi que la formule de Stirling, montrer que

$$b_{2p} \sim_p (-1)^{p+1}\left(\frac{p}{\pi\mathrm{e}}\right)^{2p}\sqrt{16\pi p}.$$

3. **Application numérique**

(a) Soient $s > 1$ et $N \geq 1$. Montrer que

$$\sum_{n\geq N+1}\frac{1}{n^s} \leq \frac{N^{1-s}}{s-1}.$$

(b) Étant donné un réel $\varepsilon > 0$, expliciter un entier N_0 tel que $\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^s}$ soit une approximation à ε près de $\zeta(s)$.

(c) Déduire de ce qui précède, une approximation rationnelle A de π^6 à 10^{-2} près.

(d) Majorer l'erreur commise en prenant $\sqrt[6]{A}$ comme approximation de π. Combien de décimales de π cette approximation permet-elle de donner ? Les donner.

30.4 Partie IV : Formule de Stirling généralisée

On considère la suite $(\Omega_n)_n$ définie, pour $n \geq 0$, par

$$\Omega_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}.$$

On sait, d'après la partie I, que l'on a $\Omega_n = 1 + o(1)$. On se propose ici de décrire une méthode pour obtenir un développement limité en $1/n$ à un ordre donné de la suite $(\Omega_n)_n$, autrement dit on veut raffiner la formule de Stirling.

1. On se fixe un entier $N \geq 2$.
   (a) Montrer que
   $$\ln \Omega_N = \ln \Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$
   (b) Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\ln(1+t)$ est développable en série entière en 0. Préciser son développement ainsi que le rayon de convergence de ce développement.
   (c) En déduire que
   $$\ln \Omega_N = \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \left(\zeta(k) - \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^k}\right).$$
   (d) Montrer que la série $\sum (-1)^{k+1} \frac{k+1}{2k(k+1)} \zeta(k)$ est convergente.
   (Indication. On pourra utiliser le critère des séries alternées.)
   (e) En déduire que
   $$\ln \Omega_N = \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$
   où $R_k(N) = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^k}$.
2. (a) Prouver que, pour tout $k \geq 2$ et tout $N \geq 2$, on a
   $$\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{N^{k-1}} \leq R_k(N) \leq \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{N^{k-1}} + \frac{1}{N^k}.$$
   (b) En déduire que, pour tout entier $p \geq 2$, on a
   $$\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k-1)}{2k(k+1)} R_k(N) = o\left(\frac{1}{N^{p-2}}\right).$$
3. (a) Montrer que
   $$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k-1)}{2k(k+1)} \zeta(k) = 1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi$$
   et que, pour tout $N \geq 2$, on a
   $$\ln \Omega_N = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N).$$
   (b) Déduire de ce qui précède que, si les suites $(R_2(N))_N, \ldots, \left(R_{p+1}(N)\right)_N$ possèdent des développements limités en $1/N$ à l'ordre p, alors la suite $(\ln \Omega_N)_N$ en possède aussi un et que celui-ci est égal à celui de la suite $\left(\sum_{k=2}^{p+1} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)\right)_N$.
   (c) Montrer que la suite $(\ln \Omega_N)_N$ possède un développement limité en $1/N$ à l'ordre 1. En déduire celui de la suite $(\Omega_N)_N$ à cet ordre.
4. (a) Montrer que, pour $N \geq 1$, on a
   $$R_2(N) - \frac{1}{N} = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$
   (b) En comparant cette dernière série à l'intégrale généralisée $\int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}$, donner le développement limité de la suite $(R_2(N))_N$ en $1/N$ à l'ordre 2. En déduire le développement limité de la suite $(\ln \Omega_N)_N$ puis de la suite $(\Omega_N)_N$, en $1/N$ à l'ordre de 2.
   (c) En généralisant ce qui vient d'être fait, décrire brièvement les étapes à suivre pour trouver un développement limité de la suite $(\Omega_N)_N$, en $1/N$ à un ordre donné.