Notes de Cours

M104 : ALGÈBRE LINÉAIRE ET AFFINE 1

Clément Boulonne
Web : http://clementboulonne.new.fr
Mail : clement.boulonne@gmail.com

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R de Mathématiques Pures et Appliquées
Licence de Mathématiques — Semestre 2

Table des matières

Programme du cours

M104 : **Algèbre linéaire et affine 1** [S2, 5 ECTS]
Prérequis : M101

- (24 h) Espaces vectoriels
  Introduction : Résolution des systèmes linéaires et linéaires affines. Méthode du Pivot. Conditions de compatibilité. Définition d'un espace vectoriel ($\mathbf{R}^n$, polynômes, l'espace des solutions d'un système linéaire...). Famille libre et liée. Famille génératrice. Base. Dimension. Représentation cartésiennes et paramétriques de sous-espaces vectoriels et de sous-espaces affines de dimension finie. Rang d'un système libre.
- (18 h) Application linéaires - Matrices.
  Définition. Exemples (projections, rotations, symétriques, homothéties dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$). Noyau, image. Isomorphisme d'espaces vectoriels. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Matrices. Matrices associées à une application linéaire. Action d'un changement de bases. Systèmes linéaires.
- (8 h) Géométrie du plan et de l'espace.
  Produit scalaire, vectoriel, produit mixte, déterminant, interprétation géométrique, calcul de déterminants (pas de théorie générale). Applications : indépendance linéaire, équations de droites, de plans, intersections.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Définition d'un espace vectoriel

Avant de définir l'espace vectoriel (objet principal pour l'algèbre linéaire), on doit définir ce qu'est le corps des scalaires.

1.1.1 Corps des scalaires

Définition 1.1 (Corps des scalaires)**.** *Un* corps *est un ensemble* $\mathbf{K}$ *(dont les éléments seront appelés* scalaires*) muni d'une opération* additive *:*

$$\begin{array}{cccc} + & : & \mathbf{K}^2 & \to & \mathbf{K} \\ & & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

qui possède les propriétés suivantes :

1. *$+$ est associative, c'est-à-dire, pour tout $a, b, c \in \mathbf{K}$, on a :*
$$(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c.$$
2. *$+$ est commutative, c'est-à-dire, pour tout $a, b \in \mathbf{K}$, on a $a+b = b+a$.*
3. *$+$ possède un élément neutre noté 0 qui est caractérisé par :*
$$\forall a \in \mathbf{K}, \quad a+0 = 0+a = a.$$
4. *Tout élément de $\mathbf{K}$ possède un inverse pour l'addition (on parle alors d'élément opposé), c'est-à-dire, pour tout $a \in \mathbf{K}$, il existe un élément noté $-a \in \mathbf{K}$ tel que $a+(-a) = -a+a = 0$.*

On munit aussi le corps d'une opération multiplicative *:*

$$\begin{array}{cccc} \times & : & \mathbf{K}^2 & \to & \mathbf{K} \\ & & (a,b) & \mapsto & a \times b \end{array}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

1. *La multiplication est associative, c'est-à-dire, pour tout* $a, b \in \mathbf{K}$*,*

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times b \times c.$$

2. *La multiplication est commutative, c'est-à-dire, pour tout* $a, b \in \mathbf{K}$*,* $ab = ba$*.*
3. *La multiplication possède un élément neutre (qu'on appelle aussi élément unité et noté* $1_{\mathbf{K}}$*) qui est caractérisé par :*

$$\forall a \in \mathbf{K}, \quad a \times 1_{\mathbf{K}} = 1_{\mathbf{K}} \times a = a.$$

4. *Tout élément* a *dans* $\mathbf{K} \setminus \{0\}$ *possède un élément inverse pour le produit, c'est-à-dire :*

$$\forall a \in \mathbf{K}^*, \ \exists a^{-1} \in \mathbf{K}^*, \quad aa^{-1} = a^{-1}a = 1_{\mathbf{K}}.$$

5. *La multiplication est distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire, pour tout* $a, b, c \in \mathbf{K}$*, on a :*

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= a \times b + a \times c, \\ (a + b) \times c &= a \times c + b \times c. \end{aligned}$$

Exemples 1.2. 1. $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ sont des corps.

2. $\mathbf{N}$ n'est pas un corps car seul l'élément $a = 0$ possède un opposé. La propriété 4 de l'addition n'est pas valable.
3. $\mathbf{Z}$ n'est pas un corps car seuls les éléments $a = 1$ et $a = -1$ ont un inverse pour la multiplication. La propriété 4 de la multiplication n'est pas valable.

1.1.2 Espaces vectoriels

Définition 1.3 (Espaces vectoriels)**.** *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps de scalaire. Un* $\mathbf{K}$-espace vectoriel *est un ensemble* V *dont les éléments seront appelés* vecteurs*, muni d'une opération* additive *:*

$$\begin{array}{rccc} + \ : & V^2 & \to & V \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & v_1 + v_2 \end{array}$$

et d'une opération de produit externe *(on parle de produit d'un vecteur par un scalaire) :*

$$\begin{array}{rccc} \cdot \ : & \mathbf{K} \times V & \to & V \\ & (a, v) & \mapsto & a \cdot v \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. *L'addition est associative, c'est-à-dire, pour tout $u, v, w \in V$, on a :*

$$(u+v)+w = u+(v+w) = u+v+w.$$

2. *L'addition est commutative, c'est-à-dire, pour tout $u, v \in V$, $u+v = v+u$.*
3. *L'addition possède un élément neutre appelé vecteur nul de V et noté $0_V \in V$ qui est caractérisé par :*

$$\forall v \in V, \quad v + 0_V = 0_V + v = v.$$

4. *Tout vecteur possède un élément inverse pour l'addition (on parle, plutôt, d'élément opposé). Explicitement,*

$$\forall v \in V,\ \exists -v \in V, \quad v + (-v) = -v + v = 0_V.$$

5. *Le produit externe est associative, c'est-à-dire, pour tout $a, b \in \mathbf{K}$ et $v \in V$, on a :*

$$(a \times b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v).$$

6. *Le produit externe possède un élément neutre, qu'on note $1_{\mathbf{K}}$, c'est-à-dire, pour tout $v \in V$, $1_{\mathbf{K}} \cdot v = v$.*
7. *Le produit externe est distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire :*
   - *pour tout $a, b \in \mathbf{K}$ et $w \in V$, on a $(a+b) \cdot w = a \cdot w + b \cdot w$,*
   - *pour tout $a \in \mathbf{K}$ et $v, w \in V$, on a $a \cdot (v+w) = a \cdot v + b \cdot w$.*

Remarque 1.4. Pour alléger les notations, plutôt d'écrire $a \cdot v$ pour $a \in \mathbf{K}$ et $v \in V$, on écrira av (on omet le point de l'opération).

1.1.3 Exemples d'espaces vectoriels

Exemple 1.5 (Corps des scalaires)**.** Si $\mathbf{K}$ est un corps des scalaires (définition 1.1) alors $\mathbf{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ lui-même.

Proposition 1.6 (Espace vectoriel produit)**.** *Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel qu'on appelle* espace vectoriel produit*.*

On note $\mathbf{K}^n$ le produit cartésien de n corps scalaires $\mathbf{K}$. Ce sont l'ensemble des vecteurs à n composantes dans $\mathbf{K}$. Explicitement,

$$\mathbf{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbf{K},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

On définit deux opérations dans $\mathbf{K}^n$.

Définition 1.7 (Addition et multiplication dans $\mathbf{K}^m$)**.** *Si $n \geq m$ un entier. L'addition de deux éléments de $\mathbf{K}^m$ est définie par*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

et la multiplication d'un élément de $\mathbf{K}^m$ par un élément de $\mathbf{K}$ par :

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Exemple 1.8. Soient $u = (2, -1)$, $v = (2, 2)$ et $a = 2$. On a :

$$u + v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$a \cdot u = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 \\ 2 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.9. *Si on munit $\mathbf{K}^n$ des opérations d'addition et de multiplication données par la définition 1.7 alors $\mathbf{K}^n$ a une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. On suppose que $n = 2$ pour simplifier la démonstration [1]. On vérifie que l'addition vérifie les propriétés de la définition 1.3.

1. Soient $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ et $w = (z_1, z_2)$ des vecteurs de $\mathbf{K}^2$. On a :

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ (x_2 + y_2) + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.1}$$

et

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ x_2 + (y_2 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

On a bien (1.1) = (1.2), ce qui implique que $(u + v) + w = u + (v + w)$. L'addition est donc associative.

1. et pour des raisons typographiques, on utilisera les vecteurs lignes si nécessaire pour caractériser des vecteurs colonnes.

2. L'addition est commutative car

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

   Comme $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{K}$, d'après la propriété additive 2 de la définition 1.1,

$$= \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

3. L'élément neutre de l'addition est $0_{\mathbf{K}^2} = (0, 0)$, c'est le vecteur qui a pour coordonnées $0 \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \end{pmatrix}$$

   Puisque $0 \in \mathbf{K}$ est l'élément neutre pour l'addition des scalaires,

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

4. Si $u = (x_1, x_2)$ alors $-u = (-x_1, -x_2)$ est l'élément inversible de u pour l'addition. En effet, on a :

$$u + (-u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbf{K}^2}.$$

On vérifie maintenant que la multiplication donnée à la définition 1.7 satisfait les propriétés de la définition 1.3.

1. Soient $a, b \in \mathbf{K}$ et $w = (z_1, z_2) \in \mathbf{K}^2$. On a :

$$(a \times b) \cdot w = (a \times b) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ab)z_1 \\ (ab)z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abz_1 \\ abz_2 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$a \cdot (b \cdot w) = a \cdot \left(b \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = a \cdot \begin{pmatrix} bz_1 \\ bz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abz_1 \\ abz_2 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

   On a donc (1.3) = (1.4), c'est-à-dire $(a \cdot b) \cdot w = a \cdot (b \cdot w)$. Donc la multiplication par un scalaire est associative.

2. On a :

$$1_{\mathbf{K}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

3. On vérifie la propriété de distributivité par rapport à l'addition.

– Soient $a, b \in \mathbf{K}$ et $w = (z_1, z_2) \in \mathbf{K}^2$. On a :

$$(a+b) \cdot w = (a+b) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)z_1 \\ (a+b)z_2 \end{pmatrix}$$

Comme $z_1, z_2 \in \mathbf{K}$, on a la distributivité du produit par rapport à l'addition

$$= \begin{pmatrix} az_1 + bz_1 \\ az_2 + bz_2 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

On a aussi

$$aw + bw = a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 \\ az_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bz_1 \\ bz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_1 \\ az_2 + bz_2 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

On obtient donc (1.5) = (1.6), c'est-à-dire $(a+b) \cdot w = aw + bw$.

– Soient $a \in \mathbf{K}$, $v = (y_1, y_2)$ et $w = (z_1, z_2)$ deux vecteurs appartenant à $\mathbf{K}^2$. On a, d'un côté :

$$\begin{aligned} a(v+w) &= a\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = a \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(y_1 + z_1) \\ a(y_2 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 + az_1 \\ ay_2 + az_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.7}$$

et d'un autre côté :

$$av + aw = a \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 \\ ay_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} az_1 \\ az_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 + az_1 \\ ay_2 + az_2 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

On obtient donc (1.7) = (1.8), c'est-à-dire $a(v+w) = av + aw$.

$\square$

Exemples 1.10. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
2. $(\mathbf{C}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. $(\mathbf{C}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Définition 1.11 (Application, [7]). *Soient E et F deux ensembles. Une* application *f de E dans F est une loi qui associe tout élément x de E à un élément de F qui est $f(x)$. On notera :*

$$\begin{array}{cccc} f & : & E & \to & F \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

On note, $\mathscr{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

On définit sur $\mathscr{F}(A, \mathbf{R})$ une addition :

$$\begin{array}{rcrcl} + & : & \mathscr{F}(A, \mathbf{R})^2 & \to & \mathscr{F}(A, \mathbf{R}) \\ & & (f, g) & \mapsto & f + g \end{array}$$

tel que, pour tout $x \in A$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et une multiplication par un scalaire :

$$\begin{array}{rcrcl} \cdot & : & \mathbf{K} \times \mathscr{F}(A, \mathbf{R}) & \to & \mathscr{F}(A, \mathbf{R}) \\ & & (\lambda, f) & \mapsto & \lambda f \end{array}$$

tel que, pour tout $x \in A$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Proposition 1.12. *Si on munit $\mathscr{F}(A, \mathbf{R})$ des deux opérations définies précédemment alors $\mathscr{F}(A, \mathbf{R})$ possède une structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel. L'élément neutre est la fonction nulle 0 (tel que, pour tout $x \in A$, $0(x) = 0$).*

Démonstration. En exercice. $\square$

Exemple 1.13. Si on prend $A = \mathbf{N}$, $\mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ correspond à l'espace des suites à valeurs réelles. Si on munit cet espace des opérations usuelles, c'est-à-dire :

$$(u_n)_{n \geq 0} + (v_n)_{n \geq 0} = (u_n + v_n)_{n \geq 0}$$

et

$$\lambda (u_n)_{n \geq 0} = (\lambda u_n)_{n \geq 0}$$

alors $\mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel d'élément neutre, la suite nulle qui à tout n associe 0.

Définition 1.14 (Polynômes)**.** *Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments dans $\mathbf{K}$. Un* polynôme *est une application P de la forme suivante*

$$\begin{array}{rcrcl} P & : & \mathbf{K} & \to & \mathbf{K} \\ & & X & \mapsto & a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0 \end{array}$$

où k est un entier naturel. On note $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbf{K}$ d'indéterminée X.

Définition 1.15 (Opérations sur les polynômes)**.** *Soit $\mathbf{K}[X]$ l'espace des polynômes sur $\mathbf{K}$ d'indéterminée X. On définit une* addition *:*

$$\begin{array}{rcrcl} + & : & \mathbf{K}[X]^2 & \to & \mathbf{K}[X] \\ & & (P_1, P_2) & \mapsto & P_1 + P_2 \end{array}$$

tel que si :

$$P_1(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0$$
$$P_2(X) = b_k X^k + \cdots + b_1 X + b_0,$$

alors

$$(P_1 + P_2)(X) = P_1(X) + P_2(X) = (a_k + b_k)X^k + \cdots + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0$$

et d'un produit externe *:*

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & \mathbf{K} \times \mathbf{K}[X] & \to & \mathbf{K}[X] \\ & & (\lambda, P) & \mapsto & \lambda \cdot P \end{array}$$

tel que si :

$$P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0$$

alors

$$(\lambda P)(X) = \lambda P(X) = \lambda a_k X^k + \cdots + \lambda a_1 X + \lambda a_0.$$

Proposition 1.16. *Si on munit $\mathbf{K}[X]$ de deux opérations données par la définition 1.15 alors $\mathbf{K}[X]$ a une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. En exercice. □

L'exercice suivant peut se traiter directement en utilisant uniquement la notion d'espace vectoriel ou après la lecture de la section 1.2 sur les sous-espaces vectoriels (pour cela, il faudra dire si tel ensemble est un sous-espace vectoriel d'un autre espace vectoriel à trouver).

1.1.4 Observations sur les opérations d'un espace vectoriel

Remarque 1.17. Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$. On a toujours les relations suivantes :

(1) Pour tout $v \in V$, $0 \cdot v = 0_V$ où 0 est le scalaire nul et 0_V est le vecteur nul dans V.

(2) $\lambda \cdot 0_V = 0_v$, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$.

(3) $(-1) \cdot v = -v$, pour tout $v \in V$.

Démonstration de la relation (1). On part de la relation dans $\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} 0 + 0 = 0 \Rightarrow (0+0)\cdot = 0 \cdot v \Rightarrow 0 \cdot v + 0 \cdot v = 0_V \\ \Rightarrow 0 \cdot v + 0 \cdot v - (0 \cdot v) = 0 \cdot v - 0 \cdot v \Rightarrow 0 \cdot v + 0_V = 0_v \Rightarrow 0 \cdot v = 0_V. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.18. Dans $\mathbf{R}^2$,

$$0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x_1 \\ 0x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbf{R}^2}.$$

Démonstration de la relation (2) *et* (3). Elle s'obtiennent de la même manière que la relation (1). □

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.19 (Sous-espace vectoriel)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U une partie de V. On dit que U forme un* sous-espace vectoriel *de V si U satisfait les propriétés suivantes :*

1. *On a $0_V \in U$, c'est-à-dire que le vecteur nul de V appartient à U.*
2. *Si $u_1, u_2 \in U$ alors $u_1 + u_2 \in U$, on dit que U est stable par addition.*
3. *Si $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u \in U$ alors $\lambda \cdot u \in U$, on dit que U est stable par produit externe.*

Remarque 1.20. Soient $(V, +, \cdot)$ un sous-espace vectoriel et U une partie de V. Sous les hypothèses de la définition 1.19, U hérite de l'addition « $+$ » et du produit externe « $\cdot$ » de V qui satisfait les propriétés de la définition 1.3.

Proposition 1.21 (Conséquence de la remarque 1.20)**.** *Soient $(V, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U un sous-espace vectoriel de V. D'après la remarque 1.20, U a une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Théorème 1.22 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U une partie de V. U est un* sous-espace vectoriel *si et seulement si*

(i) $U \neq \emptyset$ (on peut montrer que l'élément neutre de V est dans U) ;

(ii) Pour tout $x, y \in U$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in U$.

Exemples 1.23. 1. Soit $V = \mathbf{R}^2$, on considère l'ensemble

$$D = \left\{[x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x + y = 0\right\} \subset \mathbf{R}^2.$$

On montre que D forme un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

(a) $0_{\mathbf{R}^2} = (0, 0) \in D$ car $0 + 0 = 0$.

(b) Soient $u_1 = (x_1, y_1) \in D$ et $u_2 = (x_2, y_2) \in D$ donc

$$x_1 + y_1 = 0, \tag{1.9}$$
$$x_2 + y_2 = 0. \tag{1.10}$$

On a alors $u_1 + u_2 \in D$ car si on fait la somme de (1.9) avec (1.10), on obtient :

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0.$$

(c) On se donne $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u = (x, y) \in D$ (ainsi $x + y = 0$). On montre que le vecteur $\lambda v = \lambda(x, y)$ vérifie $\lambda x + \lambda y = 0$.

$$\lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Donc D est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

2. Soit $V = \mathbf{R}^2$ et on considère l'ensemble

$$D_\lambda = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x + y = \lambda\right\} \subset \mathbf{R}^2.$$

On a montré que si $\lambda = 0$ alors D_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. Montrons que si $\lambda \neq 0$, D_λ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. Déjà, elle ne vérifie pas la première propriété de la définition 1.19. Soit $0_{\mathbf{R}^2} = (0, 0)$, on a : $0 + 0 = 0 \neq \lambda$, donc $0_{\mathbf{R}^2} \notin D_\lambda$. D'où D_λ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ si $\lambda \neq 0$.

3. L'ensemble

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 = y^2\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x = y \text{ ou } x = -y\right\}$$

ne forme pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

– Le vecteur nul $0_{\mathbf{R}^2} = (0, 0)$ vérifie bien $0^2 = 0^2$ donc appartient à F.
– Si $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u = (x, y) \in F$ (on a donc $x^2 = y^2$) alors $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$ vérifie $(\lambda x)^2 = (\lambda y)^2$, on doit multiplier « $x^2 = y^2$ » par λ^2 pour obtenir l'égalité.
– Mais la deuxième propriété de la défintion 1.19 n'est pas vérifié. Par exemple, $u_1 = (1, 1) \in F$ et $u_2 = (1, -1) \in F$. On a :

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F.$$

Remarque 1.24. À propos de l'exemple 1.23-3, soient

$$F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x = y\right\},$$
$$F_2 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x = -y\right\}.$$

On peut montrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ et que $F = F_1 \cup F_2$. On verra que la réunion de deux sous-espaces vectoriels ne forme pas toujours un sous-espace vectoriel (voir proposition 1.28).

1.2.2 Sous-espace engendré

Définition 1.25 (Combinaison linéaire)**.** *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On dit que v est une* combinaison linéaire *des vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in V$ si on a :*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Définition 1.26 (Sous-espace défini par des équations)**.** *Soient $V = \mathbf{K}^n$ et U un sous-ensemble de $\mathbf{K}^n$ constitué des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ vérifiant le système d'équations :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

pour des coefficients $a_{ij} \in \mathbf{K}$. Cet ensemble forme un sous-espace *de $\mathbf{K}^n$ défni par le système* (1.11)

Définition 1.27 (Hyperplan)**.** *Un hyperplan de $\mathbf{K}^n$ est un sous-espace vectoriel H de $\mathbf{K}^n$ défini par une seule équation, c'est-à-dire :*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{1.12}$$

pour des coefficients $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbf{K}$. Autrement dit, l'hyperplan de $\mathbf{K}^n$ défini par (1.12) *est l'ensemble*

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n),\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}.$$

Proposition 1.28 (Intersection et union des sous-espaces vectoriels)**.** *Soient V un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. Alors*

(i) $U_1 \cap U_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

(ii) $U_1 \cup U_2$ est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si $U_1 \subset U_2$ et $U_2 \subset U_1$.

Démonstration. En exercice. □

Remarque 1.29. L'espace U défini par le système (1.11) s'identifie par l'intersection $U = \bigcap_{k=1}^n H_k$ où

$$H_k = \{(x_1, \ldots, x_n),\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kj}x_j + \cdots + a_{kn}x_n\}$$

l'hyperplan défini par la k^{e} équation du système. Par définition :

$(x_1, \ldots, x_n) \in U \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$ vérifie (1.11)

Si on note (I.11.i) la i^{e} équation de (1.11)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \text{ vérifie les équations (I.11.1), \ldots, (I.11.}n) \\
&\Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \in H_1 \text{ et } (x_1, \ldots, x_n) \in H_2 \text{ et } \ldots \text{ et } (x_1, \ldots, x_n) \in H_n \\
&\Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \in \bigcap_{k=0}^{n} H_k.
\end{aligned}$$

Exemple 1.30. Soient $F = \mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R}) = \{u \colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$ l'ensemble des suites réelles et $F_0 \subset F$ le sous-ensemble de F constitué des suites convergentes de limite nulle. C'est un sous-espace vectoriel de F. On rappelle que :

1. Le vecteur nul de F est représenté par l'application constante nulle $0_F(n) = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Cette suite vérifie $\lim_n 0_F = 0$. D'où $0_F \in F_0$.
2. Soient $u, v \in F_0$ deux suites convergentes de limite nulle. On sait que la suite $u + v$ définie par $u + v(n) = u(n) + v(n)$ est également convergente. On a, de plus,
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (u+v)(n) &= \lim_{n\to+\infty} u(n) + v(n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} u(n) + \lim_{n\to+\infty} v(n) = 0.
\end{aligned}$$
D'où si $u, v \in F_0$ alors $u + v \in F_0$.
3. Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $v \in F_0$. On sait que la suite λu telle que $(\lambda u)(n) = \lambda \cdot u(n)$ est également convergente. On a, de plus,
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (\lambda u)(n) &= \lim_{n\to+\infty} \lambda \cdot u(n) \\
&= \lambda \cdot \lim_{n\to+\infty} u(n) = 0.
\end{aligned}$$
D'où, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u \in F_0$, on a $\lambda \cdot u \in F_0$.

Ceci montre bien que F_0 est un sous-espace de F.

Définition 1.31 (Sous-espace engendré par des vecteurs)**.** *On se donne $v_1, \ldots, v_n \in V$ des vecteurs d'un espace V. On note $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$. Explicitement,*

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{v \in V,\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \quad \textit{pour } \lambda_i \in \mathbf{K}\}\,.$$

On dit aussi que $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ est le sous-espace engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$.

Proposition 1.32. *(i) L'ensemble $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ forme un sous-espace vectoriel de V.*

(ii) En fait, c'est le plus petit sous-espace (pour l'inclusion) qui contient $v_1, \dots, v_n$.

Démonstration. (i) On montre que l'ensemble

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{v,\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ avec } \lambda_j \in \mathbf{K}\}$$

forme un sous-espace vectoriel de V.

1. On a : $0_V = 0_{v_1} + \cdots + 0_{v_n}$. D'où $0_V \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
2. Soient $v, v' \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. On a, par définition,

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \\ v' &= \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_n v_n. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} v + v' &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_n v_n \\ &= (\lambda_1 + \lambda'_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n + \lambda'_n) v_n. \end{aligned}$$

D'où, si $v, v' \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ alors $v + v' \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

3. Soient $\lambda \in \mathbf{K}$, $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, c'est-à-dire que v s'écrit :

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \lambda v &= \lambda(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= (\lambda\lambda_1) v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n) v_n. \end{aligned}$$

Or les $\lambda\lambda_i$ appartiennent à $\mathbf{K}$, pour tout $1 \leq i \leq n$. D'où si $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ alors $\lambda v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

(ii) Si U est un sous-espace vectoriel de V et si $v_1, \dots, v_n \in U$ alors on a :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in U, \qquad \text{pour tout } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}.$$

Donc $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \in U$.

□

Exemple 1.33. Soit $F = \mathscr{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ l'espace des applications $f \colon \mathbf{K} \to \mathbf{K}$. On considère

$$\begin{array}{cccc} p_n & : & \mathbf{K} & \to & \mathbf{K} \\ & & x & \mapsto & x_n \end{array}$$

et $\mathscr{P}_k = \langle p_0, \ldots, p_k \rangle$. Si $f \in \mathscr{P}_k$ alors

$$f = \lambda_0 p_0 + \cdots + \lambda_k p_k = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_k x^k,$$

c'est-à-dire $\mathscr{P}_k$ est l'ensemble des applications polynomiales de degré $\leq k$. On en déduit que $\mathscr{P}_k$ est un sous-espace vectoriel de F.

Définition 1.34 (Combinaison linéaire en dimension infinie)**.** *Si on se donne $(v_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une collection infinie de vecteurs, on peut défnir l'espace engendré par les $(v_i)_{i\in\mathbf{N}}$ par :*

$$\langle v_i,\ i \in \mathbf{N} \rangle = \left\{ v \in V,\ v = \sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda_i v_i \right\}.$$

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(v_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

Exemple 1.35. On peut considérer alors :

$$\mathscr{P} = \langle p_n,\ n \in \mathbf{N} \rangle = \left\{ f \in F,\ f(x) = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_j x^j \right\}$$

qui est alors l'ensemble de toutes les fonctions polynômes.

1.2.3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Pour débuter cette section, on revient sur la proposition 1.28.

Proposition 1.36. *Soient V un espace vectoriel et U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. L'intersection $U_1 \cap U_2$ forme encore un sous-espace pour l'inclusion contenu dans U_1 et U_2.*

Démonstration. On peut vérifier sans peine que $U_1 \cap U_2$ est un sous-espace vectoriel de U grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels (théorème 1.22). □

Remarque 1.37. On a vu que la réunion $U_1 \cup U_2$ de deux sous-espaces vectoriels ne forme pas toujours un sous-espace vectoriel Il faut ajouter la condition nécessaire et suffisante que $U_1 \subset U_2$ ou $U_2 \subset U_1$.

Définition 1.38 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)**.** *Soient V un espace vectoriel et U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. On définit $U_1 + U_2$ le sous-ensemble de V consistué des vecteurs $v \in V$ qui peuvent s'écrire comme $v = u_1 + u_2$ avec$u_1 \in U_1$ et $u_2 \in U_2$. Autrement dit,*

$$U_1 + U_2 = \{ v \in V,\ v = u_1 + u_2 \text{ pour } u_1 \in U_1 \text{ et } u_2 \in U_2 \}.$$

Proposition 1.39. *(i) L'ensemble $U_1 + U_2$ forme un sous-espace vectoriel de V.*

(ii) C'est le plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) contenant U_1 et U_2. Autrement dit, si U est un sous-espace vectoriel de U_1, on a :

$$(U_1 \subseteq U \text{ et } U_2 \subseteq U) \Rightarrow (U_1 + U_2 \subseteq U).$$

Démonstration. (i) On montre que $U_1 + U_2$ forme un sous-espace vectoriel de V.

1. Comme $0_V \in U_1$ et $0_V \in U_2$ (car U_1 et U_2 sont des sous-espaces vectoriels de V) et $0_V = 0_V + 0_V$, on a bien $0_V \in U_1 + U_2$.
2. Soient $v, v' \in U_1 + U_2$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} v &:= u_1 + u_2, \quad \text{avec } u_1 \in U_1 \text{ et } u_2 \in U_2, \\ v' &:= u_1' + u_2' \quad \text{avec } u_1' \in U_1 \text{ et } u_2' \in U_2. \end{aligned}$$

   On a :

$$v + v' = \underbrace{(u_1 + u_1')}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + u_2')}_{\in U_2}.$$

   D'où, si $v, v' \in U_1 + U_2$ alors $v + v' \in U_1 + U_2$.
3. Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $v \in U_1 + U_2$, c'est-à-dire $v = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in U_1$ et $u_2 \in U_2$. On a :

$$\lambda v = \lambda(u_1 + u_2) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in U_2}.$$

   D'où si $v \in U_1 + U_2$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda v \in U_1 + U_2$.

(ii) On utilise le fait que si $u_1 \in U$ et $u_2 \in U_2$ alors $u_1 + u_2 \in U$.

□

Définition 1.40 (Somme directe)**.** *Soient V un espace vectoriel et U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. On dit que U_1 et U_2 sont en* somme directe *(et on note $U_1 \oplus U_2$) si, pour tout vecteur $v \in U_1 + U_2$, la décomposition $v = u_1 + u_2$ (avec $u_1 \in U_1$ et $u_2 \in U_2$) est unique.*

Définition 1.41 (Supplémentaires)**.** *On dit que U_1 et U_2 sont* supplémentaires *de V si $V = U_1 \oplus U_2$ ou si, pour tout $v \in V$, v possède une unique décomposition d'éléments de U_1 et de U_2.*

Proposition 1.42. *Soient V un espace vectoriel et U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $V = U_1 \oplus U_2$,

(ii) $V = U_1 + U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$.

Démonstration. ((i) $\Rightarrow$ (ii)) Soit $x \in U_1 \cap U_2$. On peut écrire $x = x + 0_V$ avec $x \in U_1$ et $0_V \in U_2$ ou encore que $x = x + 0_V$ avec $x \in U_2$ et $0_V \in U_1$. Comme U_1 et U_2 sont en somme direct, on a unicité de l'écrite, on en déduit donc que $x = 0$. D'où $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$. Il est évident que si $V = U_1 \oplus U_2$ alors $V = U_1 + U_2$.

((ii) $\Rightarrow$ (i)) En exercice.

□

Remarques 1.43. 1. Soient deux systèmes d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

et

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \cdots + a'_{1j}x_j + \cdots + a'_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a'_{i1}x_1 + \cdots + a'_{ij}x_j + \cdots + a'_{in}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a'_{n1}x_1 + \cdots + a'_{nj}x_j + \cdots + a'_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

On suppose que U_1 (resp. U_2) est défini par les systèmes d'équations (1.13) (resp. (1.14)). Alors $U_1 \cap U_2$ peut être également être défini par un système d'équations en regroupant les équations de (1.13) et de (1.14).

2. On suppose que

$$U_1 = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \{v \in V,\ v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \text{ avec } e_1, \ldots, e_n \in V,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}\},$$
$$U_2 = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle = \{v \in V,\ v = \mu_1 f_1 + \cdots \mu_k f_k \text{ avec } f_1, \ldots, f_k \in V,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{K}\}$$

alors

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \langle e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n \rangle \\ &= \{v \in V,\ v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_k f_k \\ &\qquad\qquad \text{avec } e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_k \in V \\ &\qquad\qquad\qquad \text{et } \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbf{K}\} \end{aligned}$$

Exemple 1.44. On considère les ensembles

$$D_1 = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x + y = 0\Big\},$$
$$D_2 = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x - y = 0\Big\}.$$

On a vu que ces ensembles forment des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$. La figure 1.1 est une représentation géomtérique de D_1 et D_2 dans le plan $\mathbf{R}^2$. Ce sont des droites de $\mathbf{R}^2$ (D_1 et D_2 sont des hyperplans de $\mathbf{R}^2$ compte tenu de la définition 1.27).

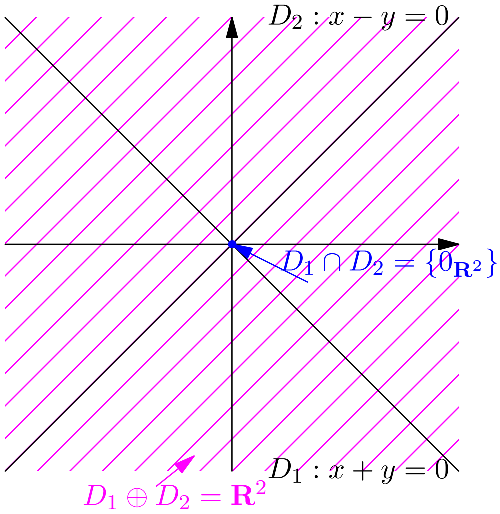


FIGURE 1.1 – Représentation géométrique de D_1, D_2, $D_1 \cap D_2$ et $D_1 \oplus D_2$

1. On montre que $D_1 \cap D_2 = \{0_{\mathbf{R}^2}\}$. On a :

$$(x, y) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow (x, y) \in D_1 \text{ et } (x, y) \in D_2 \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ et } x - y = 0.$$

Ce qui équivaut à résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc|l} x & + & y & = & 0 & L_1 \\ x & - & y & = & 0 & L_2 \end{array}\right. .$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss (méthode qui sera explicité dans le chapitre 3. On définit la ligne $L'_1 := L_1$ et $L'_2 := L_2 - L_1$ et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc|l} x & + & y & = & 0 & L'_1 := L_1 \\ & - & 2y & = & 0 & L'_2 := L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

et finalement

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. .$$

On a donc bien $D_1 \cap D_2 = \{0_{\mathbf{R}^2}\}$.

2. On montre maintenant que $D_1 \oplus D_2 = \mathbf{R}^2$. On a :

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D_1 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \text{ quelconque} \end{cases} .$$

Donc :

$$v \in D_1 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow v = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour } y \in \mathbf{R}.$$

D'où :

$$D_1 = \{v,\ v = \lambda_1(-1, 1)\} = \langle -1, 1 \rangle .$$

De même,

$$(x, y) \in D_2 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y \text{ quelconque} \end{cases} .$$

Donc :

$$v \in D_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

D'où :

$$D_2 = \{v,\ v = \lambda_2(1, 1)\} = \langle 1, 1 \rangle .$$

On a donc :

$$D_1 + D_2 = \{v,\ v = \lambda_1(-1, 1) + \lambda_2(1, 1)\} = \langle (-1, 1), (1, 1) \rangle .$$

Il s'agit de déterminer l'ensemble des vecteurs $v = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

a une solution $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$.

$$(1.15) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr|l} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & x & L_1 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & y & L_2 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr|l} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & x & L_1 \leftarrow L_1 \\ & & 2\lambda_2 & = & x + y & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. .$$

On aura toujours une solution quelque soit x, y. Donc tout vecteur $v = (x, y)$ admet une décomposition $(x, y) = \lambda_1(-1, 1) + \lambda_2(1, 1)$. C'est pourquoi $D_1 \oplus D_2 = \mathbf{R}^2$.

Exemple 1.45. Soit $F = \mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'espace des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On considère les sous-ensembles :

$$F_i = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(-x) = -f(x)\},$$
$$F_p = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(-x) = f(x)\}$$

constitués respectivement des fonctions impaires et paires. L'exercice 1.2 a permis d'établir que F_i et F_p forment des sous-espaces vectoriels de F. On veut montrer que F_i et F_p sont supplémentaires dans F, c'est-à-dire qu'on a :
- $F_i \cap F_p = \{0_F\}$,
- $F_i \oplus F_p = F$.

1. On a :

$$\begin{aligned} f \in F_i \cap F_p &\Leftrightarrow f(-x) = f(x) \text{ et } f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R} \\ &\Leftrightarrow f(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R} \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

   D'où $F_i \cap F_p = \{0_F\}$.
2. Soit $f \in F$. On considère les fonctions $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $f_p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

   On vérifie facilement que $f_i \in F_i$ et que $f_p \in F_p$ et on a, de plus,

$$\begin{aligned} f_i(x) + f_p(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ &= \frac{f(x) - f(-x) + f(x) + f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

   D'où $f = f_i + f_p$.

1.3 Bases et dimension d'un espace vectoriel

1.3.1 Famille génératrice

Dans cette section, on rappelle les définitions de combinaisons linéaires et de sous-espaces engendrés.

Définition 1.46 (Combinaison linéaire)**.** *Soit V un espace vectoriel. On considère $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de V. On appelle* combinaison linéaire *des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ tout élément de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$.*

Définition 1.47 (Système générateur)**.** *Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel V. On dit que $(v_1, \dots, v_n)$ est un* système générateur *(ou* famille génératrice*) de V ou que $(v_1, \dots, v_n)$* engendre *V si tout vecteur v de V s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs $v_1, \dots, v_n$.*

Exemple 1.48. On se place dans $\mathbf{R}^n$ et on considère les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tout vecteur $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ s'écrit :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

donc $(e_1, \dots, e_n)$ est un système générateur de $\mathbf{R}^n$.

1.3.2 Indépendance linéaire

Définition 1.49 (Famille libre)**.** *Soit V un espace vectoriel. On dit que la famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ est* libre *ou que $v_1, \dots, v_n$ sont* linéairement indépendants *si la relation $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ entraine que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.*

Proposition 1.50. *Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs linéairement indépendants et U le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_n$. Si $x \notin F$ alors $(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre.*

Démonstration. On considère $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$\lambda x + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0. \tag{1.16}$$

Il faut montrer que $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont tous non nuls. Par l'absurde, on suppose que $\lambda \neq 0$. (1.16) devient :

$$\lambda x = -\lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda_n x_n = 0 \tag{1.17}$$

et comme $\lambda \neq 0$, dans (1.17), on peut diviser les deux membres de l'égalité par λ.

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n = 0.$$

Donc x est combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$ et appartient à F, ce qui contraire à l'hypothèse faite sur x. Donc $\lambda = 0$, ce qui entraîne :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

et comme $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, cela entrane la nulité des λ_k, pour $1 \leq k \leq n$ et donc les scalaires $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont tous nuls. $\square$

Exemple 1.51. On se place dans $\mathbf{R}^n$ et on considère les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On montre que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre. On part donc de l'égalité suivante :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \tag{1.18}$$

Or (1.18) équivaut à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \cdots + 0 \cdot \lambda_n = 0 \\ 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + \cdots + 0 \cdot \lambda_n = 0 \\ \quad \vdots \\ 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \cdots + 1 \cdot \lambda_n = 0 \end{cases},$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ \lambda_n = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire la nulité de tous les λ_i. D'où la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

1.3.3 Base et dimension

Définition 1.52 (Base)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_n) \in V$ une famille de vecteurs. On dit que $(v_1, \dots, v_n)$ forme une* base *de V si $(v_1, \dots, v_n)$ est à la fois une famille génératrice et une famille libre de V.*

Théorème 1.53 (Caractérisation)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_n) \in V$ une famille de vecteurs.*

1. *On dit que* $(v_1, \ldots, v_n)$ *est une famille libre de* V *si, pour tout vecteur* $v \in V$*, l'équation*
$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \tag{1.19}$$
possède au plus une solution $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$*.*
2. *On dit que* $(v_1, \ldots, v_n)$ *est une famille génératrice de* V*, si, pour tout vecteur* $v \in V$*, l'équation* (1.19) *possède au moins une solution* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$*.*
3. *On dit que* $(v_1, \ldots, v_n)$ *est une bas de* V *si, pour tout vecteur* $v \in V$*, l'équation* (1.19) *possède exactement une solution* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$*.*

Définition 1.54 (Coordonnées)**.** *Si* V *est uni d'une base fixée* $v_1, \ldots, v_n$*, la donnée d'un vecteur* v *équivaut à la donée d'un* n*-uplet de scalaires* $x_1, \ldots, x_n$ *tel que*
$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$
Plus formellement, l'application
$$\varphi\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$
définit une bijection de $\mathbf{K}^n$ *dans* V*. Ces scalaires sont les* coordonnées *de* V *dans la base* $v_1, \ldots, v_n$*.*

On associe un vecteur $v \in V$ à un vecteur $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ de ses coordonnées. Le vecteur colonne des coordonées de $v \in V$ pourra également être représenté par la notation [2]
$$\begin{matrix} V \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)} \end{matrix}$$
rappelant que x_i est la coordonnée selon v_i de vecteurs dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$.

Remarque 1.55. SI $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V$ a pour coordonneés $(x_1, \ldots, x_n)_{(v_1,\ldots,v_n)}$ et $w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$ a pour coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)_{(v_1,\ldots,v_n)}$ alors $v + w = (x_1 + y_1)v_1 + \cdots + (x_n + y_n)v_n$ a pour coordonnées le vecteur :
$$\underset{v}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(v_1,\ldots,v_n)}} + \underset{w}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{(v_1,\ldots,v_n)}} = \underset{v+w}{\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}_{(v_1,\ldots,v_n)}}$$

2. on préferera souvent la notation en ligne $(x_1, \ldots, x_n)_{(v_1,\ldots,v_n)}$.

et le vecteur $\lambda v = \lambda(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)$ a pour coordonnées :

$$\underset{v}{\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(v_1,\ldots,v_n)}} = \underset{\lambda v}{\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}_{(v_1,\ldots,v_n)}} .$$

D'où, quand V est muni d'une base $(v_1, \ldots, v_n)$, si un vecteur de V est associé à un vecteur colonne alors les opérations de V s'identifient aux opérations sur les vecteurs colonnes.

Proposition 1.56. *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel possédant $(e_1, \ldots, e_n)$ comme base et $v_1, \ldots, v_m$ une famille de m vecteurs de V.*

(i) Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une famille libre de V alors on a nécessairement $m \leq n$.

(ii) Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une famille génératrice de V alors on a nécessairement $m \geq n$.

(iii) Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une base de V alors on a nécessairement $m = n$.

(iv) Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une famille libre de V et que $n = m$ alors $v_1, \ldots, v_m$ forme une base de V (donc est aussi une famille génératrice).

(v) Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une famille génératrice de V et que $n = m$ alors $v_1, \ldots, v_m$ forment une base de V (donc est aussi une famille libre).

Corollaire 1.57. *Si V possède une base $e_1, \ldots, e_n$ constituée d'un nombre fini de vecteurs alors toutes les bases de V auraont n vecteurs. Ce nombre s'appelle la* dimension *de V et on note* $\dim V = n$.

Exemple 1.58. On se place dans $\mathbf{R}^n$ et on considère les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a vu, en exemple 1.48, que $(e_1, \ldots, e_n)$ était une famille génératrice de $\mathbf{R}^n$ et aussi une famille libre (exemple 1.51). Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^2$ et la dimension de $\mathbf{R}^n$ étant le nombre de vecteurs dans la base, est de n.

1.3.4 Sous-espace vectoriel et dimension

Théorème 1.59 (Théorème de la base extraite)**.** *Soient U un sous-espace vectoriel de V et $v_1, \dots, v_n$ une famille de vecteurs de V, génératrice de U. On forme une sous-famille $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$ de $(v_1, \dots, v_n)$ libre et maximale. Alors cette sous-famille $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$ forment une base de U.*

Définition 1.60 (Maximalité)**.** *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une famille $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$ est* maximale *si, dès qu'on ajoute un vecteur v_k à cette famille alors la famille obtenue $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}, v_k)$ n'est plus libre, c'est-à-dire qu'on a une relation non triviale :*

$$\lambda_1 v_{j_1} + \dots + \lambda_n v_{j_n} + \lambda_{n+1} v_k = 0 \tag{1.20}$$

liant ces vecteurs.

Démonstration.

- Dans la relation (1.20) liant $v_{j_1}, \dots, v_{j_k}, v_k$, on a nécessairement $\lambda_{n+1} \neq 0$. SI on avait $\lambda_{n+1} = 0$, l'équation se reduirait à une relation

$$\lambda_1 v_{j_1} + \dots + \lambda_n v_{j_n} + 0 v_k = 0 \tag{1.21}$$

liant $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$. Or ceci est exclu, les vecteurs $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$ forment une famille libre. Maintenant,

$$v_k = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right) v_{j_1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) v_{j_n}.$$

Si $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$ forment une sous-famille libre de $(v_1, \dots, v_n)$, tous les vecteurs v_k de la famille peut s'écrire comme combinaison de $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$.
- On a supposé que $(v_1, \dots, v_n)$ engendre U, tout vecteur $v \in V$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $v_{j_1}, \dots, v_{j_n}$ si on remplace les v_k par leur expression en fonction de $v_{j_1}, \dots, v_{j_n}$. Alors $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$ est une famille génératrice de U.

Donc $(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})$ forme une base de U. □

Définition 1.61 (Rang)**.** *On donne une famille de vecteurs $v_1, \dots, v_n$ dans un espace vectoriel V. Le* rang *de $(v_1, \dots, v_n)$ est la dimension de l'espace engendré par $(v_1, \dots, v_n) = U$. C'est donc aussi le nombre d'éléments d'une sous-famille maximale de $v_1, \dots, v_n$.*

Proposition 1.62. *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimensiion finie et U un sous-espace vectoriel de V (aussi de dimension finie). Alors $\dim U \leq \dim V$.*

Démonstration. On utilise le fait que si $u_1, \dots, u_n$ est une famille libre de vecteurs de U alors les vecteurs $u_1, \dots, u_r$ forment également une famille de vecteurs de V, ce qui entraine que $r \leq \dim V$. Pour démontrer la proposition 1.62, on considèreu ne famille libre de vecteurs $u_1, \ldots, u_r \in U$ avec un nombre d'éléments r qui soit maximale. On a $r < +\infty$ et $r \leq \dim V$. On montre que cette famille est également génératrice de U et par conséquent forme une base de U. Soit $u \in U$, la famille $(u_1, \ldots, u_r, u)$ est nécessairement lié par une relation :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + \mu u = 0$$

puisqu'elle contient plus d'éléments que le maximum r pour une famille de vecteurs de U. Comme $u_1, \ldots, u_r$ est libre dans cette relation, on a nécessairement $\mu \neq 0$ (sinon la relation se réduirait à une relation liant $u_1, \ldots, u_r$ or on suppose que $u_1, \ldots, u_r$ est libre). Ceci entraine :

$$u = \left(-\frac{\lambda_1}{\mu}\right) u_1 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_r}{\mu}\right) u_r.$$

Donc, tout vecteur $u \in U$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_r$. On en conclut donc qu'une famille libre de vecteurs $u_1, \ldots, u_r$ de U avec un nombre r d'éléments forment une base de U. On a alors $\dim U = r \leq \dim V$. $\square$

Remarque 1.63. Si U est un sous-espace vectoriel de V tel que $\dim U = \dim V$ alors $U = V$. En effet, dans ce cas, une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de U définit une famille libre de vecteurs de V et son nombre d'éléments est $\dim U = \dim V$. On a vu que ceci entraine que cette famille est également génératrice de U, on a donc $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$.

Exemples 1.64.

1. Une droite est un espace vectoriel D tel que $\dim D = 1$. Ses sous-espaces vérifient $0 \leq \dim U \leq 1$. On a donc deux possibilités :
   - soit $\dim U = 0$ auquel cas $U = \{0_D\}$,
   - soit $\dim U = 1$ auquel cas U est la droite toute entière.

   D'où une droite D n'a pas de sous-espaces non-triviaux (autre que $U = \{0_D\}$ ou $U = D$).
2. Un plan est un espace vectoriel P tel que $\dim P = 2$. Un sous-espace U vérifie $0 \leq \dim U \leq 2$. Les sous-espaces triviaux sont $U = \{0_P\}$ (quand $\dim U = 0$) et $U = P$ (quand $\dim U = 2$). Les seuls sous-espaces non triviaux d'un plan sont des droites ($\dim U = 1$).

Théorème 1.65 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit $(u_1, \ldots, u_r)$ une famille de vecteurs dans un espace vectoriel V de dimension finie. On peut alors compléter cette famille par des vecteurs $u_{r+1}, \ldots, u_n$ pour constituer une base de V.*

Démonstration. On suppose que V est muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$. On complète $u_1, \ldots, u_r$ par un nombre fini de vecteurs pour constituer une famille génératrice de V, par exemple les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. On considère donc la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_r, e_1, \ldots, e_n)$, c'est-à-dire qu'on rajoute tous les vecteurs de la base V. Cette famille n'est plus libre mais elle engendre V. On extrait de cette famille de vecteurs, une sous famille libre maximale contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_r, e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-1}}$. Cette sous-famille libre maximale constitue une base de $\langle u_1, \ldots, u_r, e_1, \ldots, e_n \rangle = V$. □

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 1.66 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)**.** *Soient V un espace vectoriel et U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. On définit $U_1 + U_2$ le sous-ensemble de V consistué des vecteurs $v \in V$ qui peuvent s'écrire comme $v = u_1 + u_2$ avec$u_1 \in U_1$ et $u_2 \in U_2$. Autrement dit,*

$$U_1 + U_2 = \{v \in V,\ v = u_1 + u_2 \textit{ pour } u_1 \in U_1 \textit{ et } u_2 \in U_2\}.$$

et

Définition 1.67 (Somme directe)**.** *Soient V un espace vectoriel et U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. On dit que U_1 et U_2 sont en* somme directe *(et on note $U_1 \oplus U_2$) si, pour tout vecteur $v \in U_1 + U_2$, la décomposition $v = u_1 + u_2$ (avec $u_1 \in U_1$ et $u_2 \in U_2$) est unique.*

Remarque 1.68. On suppose que U_1 et U_2 sont munis d'une base (respectivement $e_1, \ldots, e_m$ et $f_1, \ldots, f_n$). U_1 et U_2 sont en somme direct si et seulement si $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n)$ forme une famille libre et donc une base de $U_1 + U_2$. Si U et V sont en somme directe alors tout vecteur $w \in U_1 + U_2$ s'écrit de façon unique $w = u + v$ avec $u \in U_1$ et $v \in U_2$. Mais u s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_m$ et v s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_n$. Donc w s'écrit de façon unique :

$$w = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m}_{u} + \underbrace{\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_n f_n}_{v}.$$

Conséquence 1.69. *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. Alors U_1 et U_2 sont en somme directe si et seulement si* $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ *(en général on a* $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim U_1 + \dim U_2$*).*

On rappelle la définition de supplémentaire.

Définition 1.70 (Supplémentaires)**.** *On dit que U_1 et U_2 sont* supplémentaires *de V si $V = U_1 \oplus U_2$ ou si, pour tout $v \in V$, v possède une unique décomposition d'éléments de U_1 et de U_2.*

Proposition 1.71. *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Si V est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriels U_1 et U_2 possède un supplémentaire dans V.*

Démonstration. On fixe une base $e_1, \ldots, e_n$ de U_1 (possible car on a vu que U_1 est de dimension finie). Cette famille définit une famille libre de vecteurs dans V. On la complète par des vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ pour constituer une base de V : $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n)$. On a alors

$$V = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle \oplus \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$$

et on pose $U_1 = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ et $U_2 = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. □

Remarque 1.72. En général, on a la *formule de la dimension* :

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

On retrouve le fait que U_1 et U_2 sont en somme directe si et seulement si

$$\dim(U_1 \cap U_2) = 0 \Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{0_V\}\,.$$

1.3.5 Exemple en dimension infinie

Pour clore ce chapitre, on donne un exemple d'un espace vectoriel en dimension infinie.

Exemple 1.73. Soient $F = \mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ l'espace des suites $n \mapsto u_n$ et E le sous-ensemble de F constitué des suites vérifiant la relation de recurrence

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad \text{pour tout } n \geq 2. \tag{1.22}$$

On montre que le sous-ensemble E forme, en fait, un sous-espace vectoriel de F.

1. La suite constante nulle $u_n = 0$ vérifie clairement (1.22) donc appartient bien à E.
2. E est stable par addition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant

   $$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad \text{et} \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-2}, \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

   Alors

   $$\begin{aligned}(u_n + v_n) = (u_n + v_n) &= (u_{n-1} + u_{n-2}) + (v_{n-1} + v_{n-2}) \\ &= (u_{n-1} + u_{n-2} + v_{n-1} + v_{n-2}).\end{aligned}$$

   D'où $(u_n + v_n) \in E$.

3. E est stable par produit externe. Soient $(u_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_n \in E \Leftrightarrow u_n &= u_{n-1} + u_{n-2} \\ &\Leftrightarrow \lambda(u_n) = \lambda(u_{n-1} + u_{n-2}) \Leftrightarrow \lambda u_n = \lambda u_{n-1} + \lambda u_{n-2}. \end{aligned}$$

D'où λu_n vérifie (1.22) et appartient à E.

On a donc montré que E est un sous-espace vectoriel de F. On démontre ensuite que les suites $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ défnies par :

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ e_1 = 0 \\ e_n = e_{n-1} + e_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases}$$

forment uen base de E. Soit (u_n) une suite de E. On a $u_n = \lambda(e_n) + \mu(f_n)$ pour des scalaires $\lambda = u_0$ et $\mu = u_1$ En effet, si on pose $\lambda = u_0$ et $\mu = u_1$, on a, pour $n = 0$,

$$\lambda e_0 + \mu f_0 = u_0 \times 1 + u_1 \times 0 = u_0,$$

pour $n = 1$,

$$\lambda e_1 + \mu f_1 = u_0 \times 0 + u_1 \times 1 = u_1$$

et on a :

$$\begin{aligned} \lambda e_{n-2} + \mu f_{n-2} = u_{n-2}, &\quad \text{pour } n \geq 2, \\ \lambda e_{n-1} + \mu f_{n-1} = u_{n-1}, &\quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

alors on obtient :

$$\lambda \underbrace{(e_{n-1} + e_{n-2})}_{e_n} + \mu \underbrace{(f_{n-1} + f_{n-2})}_{f_n} = \underbrace{u_{n-1} + u_{n-2}}_{u_n},$$

c'est-à-dire $\lambda e_n + \mu f_n = u_n$. La relation est vérifée au rang n. Par principe de recurrence, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \lambda e_n + \mu f_n.$$

Ceci monntre que les suites (e_n) et (f_n) engendrent E. De plus, si $\lambda e_n + \mu f_n = 0$ alors $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Pour $n = 0$,

$$\lambda e_0 + \mu f_0 = \lambda \times 1 + \mu \times 0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

et pour $n = 1$,

$$\lambda e_1 + \mu f_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \times 0 + \mu \times 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 0.$$

D'où $\lambda e_n + \mu f_n = 0$ implique que $\lambda = \mu = 0$. Ceci montre que les suites (e_n) et (f_n) forment une famille libre de E. Conclusion : (e_n) et (f_n) forment une base de E. Toute suite $(u_n) \in E$ telle que

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

peut être décomposé en

$$u_n = \lambda e_n + \mu f_n$$

pour d'uniques scalaires λ, μ. Maintenant, soient α, β les racines de l'équation $x^2 = x + 1$, c'est-à-dire :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

On constate que

1. Les suites $a_n = \alpha^n$ et $b_n = \beta^n$ appartiennent à E. En effet, on a :

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} \Rightarrow a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

   D'où $a_n \in E$. On peut faire la même vérification pour la suite b_n.

2. Les suites (a_n) et (b_n) forment une famille libre de E et donc une base de E puisqu'on a montré que E est de dimension 2. En effet, soient λ et $\mu \in \mathbf{R}$ tels que

$$\lambda(a_n) + \mu(b_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda\alpha^n + \mu\beta^n = 0.$$

   Pour $n = 0$, on a :

$$\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu \tag{1.23}$$

   et pour $n = 1$, on a :

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0 \tag{1.24}$$

   En faisant « (1.23) − β(1.24) », on obtient

$$(\lambda\alpha + \mu\beta) - (\lambda\beta + \mu\beta) = 0 \Rightarrow \lambda(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

   et (1.23) nous donne directement que $\mu = 0$. D'où si $\lambda a_n + \mu b_n = 0$ alors $\lambda = \mu = 0$.

Conséquence de tout cela, toute suite $(u_n) \in E$ possède aussi une décomposition $u_n = \lambda a_n + \mu b_n$. En exercice, on pourra expliciter cette décomposition pour les suites (e_n) et (f_n).

Remarque 1.74. L'espace vectoriel $F = \mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ des suites numériques réelles est de dimension infinie.

1.4 Exercices

Exercice 1.1. Dire, en justifiant la réponse, si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0\,,1]$, continues et positives, pour l'addition de deux fonctions et le produit d'une fonction par un réel.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0\,,1]$, vérifiant $f(1) = 1$.
3. L'ensemble $]0\,,+\infty[$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot y = x^{\lambda}$, $(\lambda \in \mathbf{R})$.
4. L'ensemble des fonctions sur $\mathbf{R}$ qui s'annulent en 1 ou en 4.
5. L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbf{R}$.
6. L'ensemble des nombres complexes d'arguments $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 1.2 ([3])**.** Soit $E = \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ (on rappelle que $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ est l'ensemble des applications de X dans $\mathbf{R}$ et que c'est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel) où X est une partie de $\mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in X$, $-x \in X$. Soit $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{P}$) le sous-ensemble de E constitué des fonctions impaires[3] (resp. paires). Montrer que $\mathscr{I}$ et $\mathscr{P}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Exercice 1.3. Si E est un espace vectoriel et A une partie de E, on note $\mathrm{Vect}(A)$ ou $\langle A \rangle$ le sous-espace vectoriel de E engendré par A. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \langle \{u, v\} \rangle$? Même question pour $(x, 1, 1, y)$.

Exercice 1.4. Les familles suivantes sont-elles génératrices de E ?

1. $(1, 1)$, $(3, 1)$, $E = \mathbf{R}^2$;
2. $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 1)$, $E = \mathbf{R}^3$.

Exercice 1.5. Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (2, 1, 1)$ et $v_4 = (5, 3, 4)$.

1. v_1, v_2, v_3 sont-ils linéairement indépendants ?
2. v_1, v_2, v_3, v_4 sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 1.6. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et (x, y, z, t) une famille libre[4] de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(x, 2y, z)$,
2. (x, z),

3. Pour ceux qui auraient oublié la définition de fonctions paires et impaires, voir [8, Chap. III].

4. x, y, z et t sont quatre vecteurs de E.

3. $(x, 2x + t, t)$,
4. $(2x + y, x - 3y, t, y - x)$.

Exercice 1.7. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (2, 2, 2, 6)$, $c = (0, 2, 4, 4)$, $d = (0, 2, 4, 4)$ et $e = (2, 3, 0, 1)$. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels $F \cap G$ et $F + G$ où $F = \mathrm{Vect}(\{a, b, c\})$ et $G = \mathrm{Vect}(\{d, e\})$.

Chapitre 2

Applications linéaires

Après avoir introduit la structure de base de l'algèbre linéaire, les espace vectoriels, il nous faudrait définir une relation qui permet de relier les espaces entre eux. Ce sera ce qu'on appelle les applications linéaires.

2.1 Premières définitions et propriétés

Définition 2.1 (Application linéaire, première définition)**.** *Soient V et W deux espaces vectoriels. Une* application $\mathbf{K}$-linéaire *(ou tout simplement* application linéaire*) de V dans W est une application $f\colon V \to W$ telle que :*

1. *$f(x+y) = f(x) + f(y)$, pour tout $x, y \in V$,*
2. *$f(\lambda x) = \lambda f(x)$, pour tout $x \in V$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.*

On propose une autre définition d'application linéaire.

Définition 2.2 (Application linéaire, seconde définition)**.** *Soient V et W deux espaces vectoriels. Une* application $\mathbf{K}$-linéaire *(ou tout simplement* application linéaire*) de V dans W est une application $f\colon V \to W$ telle que, pour tout $x, y \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$,*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

La question qui vient tout de suite est « *est-ce que les deux définitions sont équivalentes ?* » et la réponse immédiate est oui... On propose une démonstration rapide :

Équivalence déf. 2.1 et 2.2. (Déf. 2.1 $\Rightarrow$ Déf. 2.2) f est linéaire, d'où :

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$, pour tout $x, y \in V$,
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, pour tout $x \in V$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

On cherche à calculer $f(\lambda x + \mu y)$ en fonction de $f(x)$ et de $f(y)$. Comme $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in V$ alors $\lambda x \in V$ (de même, si $\mu \in \mathbf{K}$ et $y \in V$ alors $\mu y \in V$). D'où, d'après la première propriété :

$$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y). \tag{2.1}$$

On applique ensuite la deuxième propriété aux deux termes de la somme (2.1).

$$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

d'où la définition 2.2.

(Déf. 2.2 $\Rightarrow$ Déf. 2.1) On suppose que f est une application telle que :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \quad \text{pour tout } x, y \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbf{K}.$$

La première propriété de la définition 2.1 se démontre en prenant $\lambda = 1$ et $\mu = 1$, ce qui donne :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

La seconde propriété se démontre en prenant $\lambda \in \mathbf{K}$ et $\mu = 0$, c'est-à-dire :

$$f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

d'où la définition 2.1.

$\square$

Définition 2.3. *On note $\mathscr{L}(V, W)$ l'ensemble des applications linéaires de V dans W.*

Définition 2.4 (Forme linéaire)**.** *Si, dans les définitions 2.1 et 2.2, $W = \mathbf{R}$, on dit que f est une* forme linéaire.

Remarque 2.5. On a : $f(0) = 0$.

Définition 2.6 (Application linéaire bijective)**.** *Soit f une application linéaire d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel V dans le $\mathbf{K}$-espace vectoriel vectoriel W. Alors :*

- *Si $V = W$, f est un* endomorphisme. *L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel V sera noté $\mathscr{L}(U)$.*
- *Si f est bijective, f est un* isomorphisme.
- *Si $V = W$ et que f est bijective alors f est un* automorphisme. *L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel V est appelé le* groupe linéaire *de V dans W et est noté* $\mathrm{GL}(V)$.

Définition 2.7 (Application identité)**.** *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. L'application qui à un vecteur $x \in V$ assoie à lui-même est appelé* identité *de V. On la note* id_V *et on vérifie que c'est une application linéaire.*

Proposition 2.8. *Soit $f\colon V \to W$ une application* $\mathbf{K}$*-linéaire. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ et $x_1, \dots, x_p \in V$. Alors :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

Définition 2.9 (Addition et multiplication)**.** *Soient f et g deux applications linéaire de V dans W et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :*

1. *$f+g$ est une* application linéaire *de V dans W définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.*
2. *λf est une* application linéaire *de V dans W défnie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.*

Proposition 2.10. *En vertu de la définition 2.9, l'ensemble $\mathscr{L}(V, W)$ des applications linéaires de V dans W muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$*.*

Et comme c'est un espace vectoriel, il a une dimension.

Proposition 2.11. *Si V (resp. W) est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie n (resp. p) alors $\mathscr{L}(V, W)$ est de dimension finie np.*

Avant d'attaquer la démonstration de la proposition 2.11, on a besoin de définir le symbole de Kronecker.

Définition 2.12 (Symbole de Kronecker)**.** *Le* symbole de Kronecker *est la fonction :*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \textit{si } i \neq j, \\ 1 & \textit{si } i = j \end{cases}.$$

Démonstration. On considère $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de W. Si $x \in U$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} x_j a_{ij} f_i$$

avec $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$. On définit pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$, ω_{ij} les application linéaires de V dans W définies par :

$$\omega_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i,$$

pour tout $1 \leq k \leq p$. Alors, on a

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \omega_{ij}(x)$$

et $f = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p a_{ij}\omega_{ij}$. D'où $(\omega_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ est un système générateur de $\mathscr{L}(V,W)$. Il reste à montrer que (ω_{ij}) forme uns système libre. Soient λ_{ij} des scalaires tels que

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}\omega_{ij} = 0.$$

Alors

$$0 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}\omega_{ij}(e_k) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_{ik}f_i.$$

Comme $(f_1,\ldots,f_p)$ est une base, il s'ensuit que tous les coefficients λ_{ik} sont nuls pour tout $1\leq i\leq p$ et $1\leq k\leq n$. D'où (ω_{ij}) est une famille libre donc une base (qui continent np éléments). $\square$

Proposition 2.13. *Soient U, V et W trois* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels et $g\colon U\to V$, $f\colon V\to W$ deux applications linéaires. Alors l'application $f\circ g$ est une application linéaire de U dans W.*

Proposition 2.14. *Soient U, V et W trois espaces vectoriels, $f, g\in\mathscr{L}(U,V)$ et $h, k\in\mathscr{L}(V,W)$. Alors :*

(i) $h\circ(f+g) = h\circ f + h\circ g$,

(ii) $(h+k)\circ f = h\circ f + k\circ f$.

Remarque 2.15. Si U, V, W, W' sont quatre espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$ et $f\colon W\to W'$, $g\colon V\to W$ et $h\colon U\to V$ trois applications linéaires alors $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$.

2.2 Image et noyau d'une application linéaire

2.2.1 Image d'une application linéaire

Définition 2.16 (Image d'une application linéaire)**.** *Soit $f\colon V\to W$ une application linéaire. On note l'*image *de f,* $\mathrm{Im}(f)$*, l'ensemble :*

$$\mathrm{Im}(f) = \{x\in V,\ f(x)\} = f(V).$$

Proposition 2.17. *Soient U un sous-espace vectoriel de V et $f\colon V\to W$ une application linéaire. Alors l'image $f(U)$ de U par f est un sous-espace vectoriel de W.*

Démonstration. On rappelle que pour démontrer que $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de W, il faut montrer que :

(i) $0_W\in f(U)$,

(ii) pour tout $y_1, y_2 \in f(U)$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, on ait $\lambda y_1 + \mu y_2 \in f(U)$.

Comme $f(0) = 0$ (remarque 2.5), on a bien $f(0_V) = 0_W$, d'où $0_W \in f(U)$. Ensuite, si $y_1, y_2 \in f(U)$, il existe $x_1, x_2 \in U$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ (définition 2.16). D'où, pour tous scalaires λ et μ, on a :

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Donc $\lambda y_1 + \mu y_2 \in f(U)$. Ainsi, $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de W. □

Proposition 2.18. *Soit $f : V \to W$ une application linéaire. Si $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ est un sous-espace vectoriel de V alors $f(U) = \langle f(u_1), \dots, f(u_n) \rangle$.*

2.2.2 Noyau d'une application linéaire

Définition 2.19 (Noyau d'une application linéaire)**.** *Soient V et W deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f : V \to W$ une application linéaire de V dans W. Le sous-ensemble de V des vecteurs annulant f est appelé* noyau *de f et est noté* $\mathrm{Ker}(f)$. *Explicitement,*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}.$$

Proposition 2.20. *Soit $f : V \to W$ une application linéaire. Tout comme l'image de f, le noyau de f est un sous-espace vectoriel de V.*

Démonstration. Si $x, y \in \mathrm{Ker}\, f$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, on a :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

Donc $\lambda x + \mu y \in \mathrm{Ker}(f)$. □

Proposition 2.21. *Soit U un sous-espace vectoriel de W et $f : V \to W$ une application linéaire. Alors l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de U par f est un sous-espace vectoriel de V.*

On peut donner une reformulation de la définition 2.16 en terme d'image réciproque.

Définition 2.22 (Noyau d'une application linéaire)**.** *Soit $f : V \to W$ une application linéaire. On appelle* noyau *de f le sous-espace vectoriel $f^{-1}(\{0\})$ de V. On note* $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$.

Proposition 2.23. *Soit $f : V \to W$ une application linéaire.*

1. *L'application linéaire f est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = W$.
2. *L'application linéaire f est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Démonstration. En exercice ! □

2.3 Rang d'une application linéaire

2.3.1 Rang d'une application linéaire

Définition 2.24 (Rang d'une application linéaire)**.** *Soient V et W deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f\colon V \to W$ une application linéaire. Si $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie dans W alors on appelle* rang de l'application linéaire f *(qu'on note $\operatorname{rg} f$) la dimension de $\operatorname{Im} f$.*

Corollaire 2.25. *On suppose que V est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\colon V \to W$ une application linéaire. Alors f est de rang fini dans W.*

2.3.2 Formule du rang

Théorème 2.26 (Formule du rang)**.** *Si V et W sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels (V de dimension finie) et f une application linéaire de V dans W alors f vérifie :*

$$\dim \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{rg} f = \dim V.$$

Démonstration. Comme V est de dimension finie alors on peut trouver une base de cardinal fini de $\operatorname{Ker} f$. On pose $n = \dim V$, $p = \dim \operatorname{Ker}(f)$ et on considère $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. Soit V' un sous-espace supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. D'après le théorème de la base incomplète (théorème 1.65), on peut compléter la base de $\operatorname{Ker} f$ par des vecteurs de V'. Cela donne $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de V. L'image de cette base par f est génératrice de $\operatorname{Im} f$. Donc

$$\operatorname{Im}(f) = \langle f(e_{p+1}), \dots, f(e_n) \rangle .$$

Cette famille est aussi libre car si $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ sont $n-p$ scalaires de $\mathbf{K}$ tels que

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$$

alors

$$f\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0.$$

Mais ceci implique que $\sum \lambda_i e_i = 0$ est élément de $\operatorname{Ker}(f)$. Cette somme est une somme de vecteurs qui sont dans un sous-espaces supplémentaires V' de $\operatorname{Ker}(f)$. La somme est donc éléments de V'. Ainsi, $\sum \lambda_i e_i$ est alors dans $V \cap \operatorname{Ker} f$. La seule possibilité est $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Mais cette famille libre est libre dans V donc $\lambda_i = 0$ pour $p+1 \leq i \leq n$. Ces scalaires ayant été choisi de façon quelconque dans $\mathbf{K}$, la famille $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est libre dans $\operatorname{Im} f$. C'est donc une base de $\operatorname{Im} f$ et

$\dim \operatorname{Im} f = n - p$. Or $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, d'où l'égalité $n = (n-p)+p$ équivaut donc à

$$\dim V = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f.$$

□

2.4 Isomorphismes

Définition 2.27 (Application linéaire bijective)**.** *Soit f une application linéaire d'un* **K***-espace vectoriel V dans le* **K***-espace vectoriel vectoriel W. Alors :*

- *Si $V = W$, f est un* endomorphisme*. L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel V sera noté $\mathscr{L}(U)$.*
- *Si f est bijective, f est un* isomorphisme*.*
- *Si $V = W$ et que f est bijective alors f est un* automorphisme*. L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel V est appelé le* groupe linéaire *de V dans W et est noté* $\mathrm{GL}(V)$*.*

Définition 2.28 (Espaces vectoriels isomorphes)**.** *On dit que deux espaces vectoriels sont* isomorphes *s'il existe un isomorphisme entre ces deux espaces.*

Proposition 2.29. *« Être isomorphe à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des* **K***-espaces vectoriels.*

Démonstration. En exercice. □

Proposition 2.30. *Soient V et W deux espaces vectoriels tels que V est de dimension finie et W isomorphe à V. Alors W est de dimension finie et* $\dim V = \dim W$*.*

Démonstration. Comme V et W sont isomorphes alors il existe un isomorphisme $f\colon V \to W$. On a $\operatorname{Im} f = W$ car f est surjective. Mais $\operatorname{Im} f$ étant de dimension finie, d'après la formule du rang, il en est de même pour W. Cette dimension est égale à $\operatorname{rg} f$. Mais comme f est aussi injective, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 0$. D'où $\dim V = \dim \operatorname{Im} f = \dim W$: V et W ont la même dimension. □

Proposition 2.31 (Réciproque de la proposition 2.30)**.** *Si V et W sont deux* **K***-espaces vectoriels de même dimension alors ils sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $n < +\infty$ la dimension de V. On considère $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de W. On choisit f telle que :

$$f(e_i) = f_i, \qquad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n,$$

c'est-à-dire si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ alors $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$, f est donc linéaire et son noyau est réduit à l'élément nul de V. Son rang est donc égal à n : f est donc surjective. f est donc bine un isomorphisme de V dans W. □

Théorème 2.32. *Tout espace vectoriel V de $\mathbf{K}$ de dimension finie n est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$.*

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. On considère :

$$f \; : \; \begin{array}{rcl} V & \to & \mathbf{K} \\ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

L'application f est bien définie puisque les coordonnées d'un vecteur dans une base sont définies de manière unique. Il n'est pas difficile de voir que f est une application linéaire injective et comme $\dim E = \dim \mathbf{K}^n = n$, f est un isomorphisme. □

Pour finir cette section, on va montrer que l'ensemble des automorphismes d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel forme un groupe. On sait déjà, d'après la proposition 2.10, que $\mathscr{L}(V, W)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On a ensuite défini à la proposition 2.13 une opération de composition d'applications linéaires. On peut alors affirmer le résultat suivant :

Proposition 2.33. *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(V), +, \circ)$ est un anneau unitaire (mais pas toujours commutatif) : l'unité est donnée par l'application identité de V.*

Démonstration. En exercice. □

Proposition 2.34. *L'ensemble des éléments inversibles $\mathscr{L}(V)$ est un groupe pour la loi de composition $\circ$ de $\mathscr{L}(V)$. Ce groupe est le groupe linéaire de V : $\mathrm{GL}(V)$.*

Démonstration. On note $\mathrm{Inv}(V)$ l'ensemble des applications inversibles de $\mathscr{L}(V)$. Si $f \in \mathrm{Inv}(V)$ alors il existe $g \in \mathrm{Inv}(V)$ tel que $f \circ g = g \circ f$, f est donc bijective. Comme c'est une application linéaire, c'est aussi un isomorphisme et donc un élément de $\mathrm{GL}(V)$. Réciproquement, supposons que f est un élément de $\mathrm{GL}(V)$. Pour vérifier que f est un élément de $\mathrm{Inv}(V)$, il suffit de vérifier que l'application réciproque de f est linéaire : on désigne par g cette application réciproque et on montre que g est linéaire. Si y et y' sont élément de V, il existe des éléments de x et x' de V tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Alors si $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$,

$$g(\lambda y + \mu y') = g(\lambda f(x) + \mu f(x')) = g \circ f(\lambda x + \mu x').$$

Cette dernière égalité étant conséquence de la linéarité de f donc $g \circ f = \mathrm{id}_V$. On obtient alors :

$$g(\lambda y + \mu y') = \lambda x + \mu x' = \lambda g(y) + \mu g(y').$$

Ceci prouve donc la linéarité de g. L'égalité entre les deux ensembles $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{Inv}(V)$ est alors assurée. Comme $\mathrm{Inv}(V)$ est un sous-groupe de $\mathscr{L}(V)$ pour la loi de composition, il en va de même pour $\mathrm{GL}(V)$. □

Ainsi, la proposition 2.34 justifie le nom donné à $\mathrm{GL}(V)$: groupe linéaire.

2.5 Exemples d'applications linéaires

2.5.1 Homothéties

Définition 2.35 (Homothétie)**.** *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbf{K}$. On appelle* homothétie *de V par rapport à λ, l'application*

$$\begin{array}{cccc} h & : & V & \to & V \\ & & x & \mapsto & \lambda x \end{array}.$$

Théorème 2.36. *Une homothétie de V est un endomorphisme de V.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

$$\begin{aligned} h_\lambda(\alpha x + \beta y) &= \lambda(\alpha x + \beta y) = \lambda\alpha x + \lambda\beta y \\ &= \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \alpha h_\lambda(x) + \beta h_\lambda(y). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.37. En particulier, id_V est une homothétie de V de rapport 1. C'est donc une application linéaire.

2.5.2 Projecteurs

Proposition 2.38. *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U, U' deux sous-espaces supplémentaires de V. On considère p et p' des endomorphismes de V définies par, pour tout $x \in E$, $x = p(x) + p'(x)$ tels que $p(x) \in U$ et $p(x') \in U'$. Alors p et p' sont linéaires et vérifient*

(i) $p^2 = p$,

(ii) $(p')^2 = p'$,

(iii) $p \circ p' = p' \circ p = 0$,

(iv) $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} p'$,

(v) $\operatorname{Ker} p' = \operatorname{Im} p$.

Démonstration. On montre que p et p' sont bien définies. Soient $x \in V$, $x_1, x_2 \in U$ et $x_1', x_2' \in U'$ tels que $x = x_1 + x_1' = x_2 + x_2'$. Alors

$$\underbrace{x_2 - x_1}_{U} = \underbrace{x_1' - x_2'}_{U'} \tag{2.2}$$

Donc, les deux membres de (2.2) sont à la fois éléments de U et de U'. Ceci n'est pas possible que si chacun des deux membres est nul. Donc $x_1 = x_2$ et $x_1' = x_2'$. p et p' sont donc bien défnies.

On vérifie facilement que ces deux applications sont linéaires. Si x est élément de U alors $p(x) = x$, ce qui prouve que $p^2 = p$. Idem pour p'. Les autres égalités sont évidentes. □

Définition 2.39 (Projecteur)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et Π un endormorphisme de V tel que $\Pi^2 = \Pi$ (on dira que Π est* idempotent*). On dit que Π est un* projecteur *de V.*

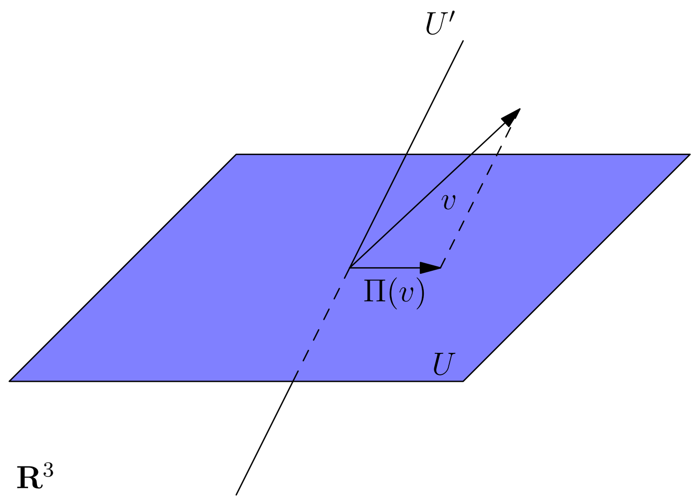


FIGURE 2.1 – Projection sur U parallèlement à U'

Proposition 2.40. *Soit p un projecteur défnie sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel V et $p' = \mathrm{id}_V - p$. on note $U = \mathrm{Im}\, p$ et $U' = \mathrm{Im}\, p'$. Alors U et U' sont supplémentaires dans V et p est le projecteur sur U parallèlement à U'.*

Démonstration. Soit $x \in V$ tel que $x = p(x) + p'(x)$. On a donc U et U' qui vérifient $U + U' = V$. On vérifie facilement que p' est un projecteur ($(p')^2 = p'$). Suppoosns que x est élément de $U \cap U'$. Alors il existe $y \in U$ et $y' \in U'$ tels que $x = p(y) - x = y' - p'(y)$. Appliquons p à ces égalités :

$$p(x) = p^2(y) - x = p(y') - p^2(y) = p(y') - p(y') = 0.$$

Donc $x = 0$, ce qui prouve que la somme $U + U'$ est direct et donc que U et U' sont supplémentaires dans V. □

2.5.3 Symétries

Définition 2.41 (Symétrie)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U, U' deux supplémentaires de V. On considère $x \in V$ tel que x s'écrit $x = u + u'$ avec $u \in U$ et*

$u' \in U'$. L'application :

$$\begin{array}{cccc} s & : & V & \to & V \\ & & x & \mapsto & u - u' \end{array}$$

est appelé symétrie *par rapport à U parallèlement à U'.*

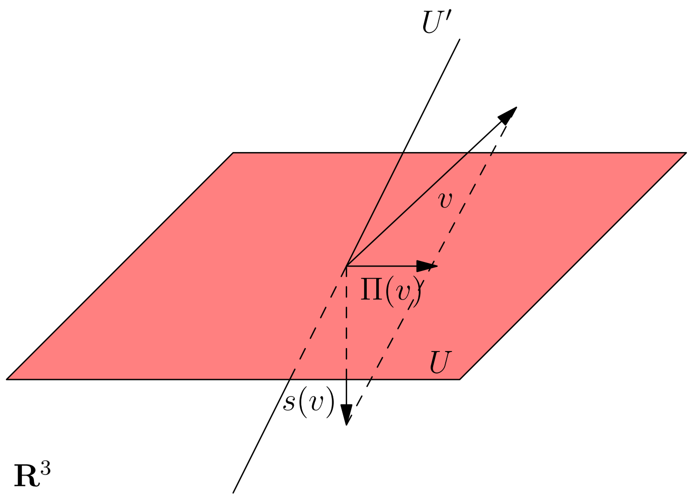


FIGURE 2.2 – Symétrie sur U parallèlement à U'

Propriétés 2.42. *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U, U' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de V. On considère s la symétrie par rapport à U parallèlement à U'.*

1. *s est un automorphisme de V et $s^2 = \mathrm{id}$ (ou $s^{-1} = s$).*
2. *$U = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)$ et $U' = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_V)$.*

Théorème 2.43 (Caractérisation)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $s\colon V \to V$ une application. s est une symétrie si et seulement si s est linéaire et $s^2 = \mathrm{id}_V$. On a alors $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)$ et $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)$ supplémentaires de V et s est le symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)$.*

Théorème 2.44 (Lien projecteur/symétrie)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U, U' deux supplémentaires de V. On note p (resp. p') la projection sur U (resp. U') parallèlement à U' (resp. U) et s (resp. s') la symétrie par rapport à U (resp. U') parallèlement à U' (resp. U). Alors*

1. *$p + p' = \mathrm{id}_V$,*
2. *$p \circ p' = p' \circ p = 0$,*
3. *$s + s' = 0_{\mathscr{L}(V)}$,*

4. $s \circ s' = s' \circ s = -\,\mathrm{id}_V$,
5. $s = 2p - \mathrm{id}_U$,
6. $s' = 2p' - \mathrm{id}_{U'}$.

2.5.4 Affinité

Définition 2.45 (Affinité)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U, U' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de V. On note p la projection sur U parallèlement à U'. Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on appelle* affinité *de base U, de direction U' et de rapport λ, l'application :*

$$\begin{array}{cccc} a_\lambda & : & V & \to & V \\ & & x & \mapsto & \lambda x + (1-\lambda)p(x) \end{array}.$$

Si $x = u + u'$ avec $u \in U$ et $u' \in U'$ alors l'affinité de base U, de direction U' et de rapport λ envoie x sur $u + \lambda u'$.

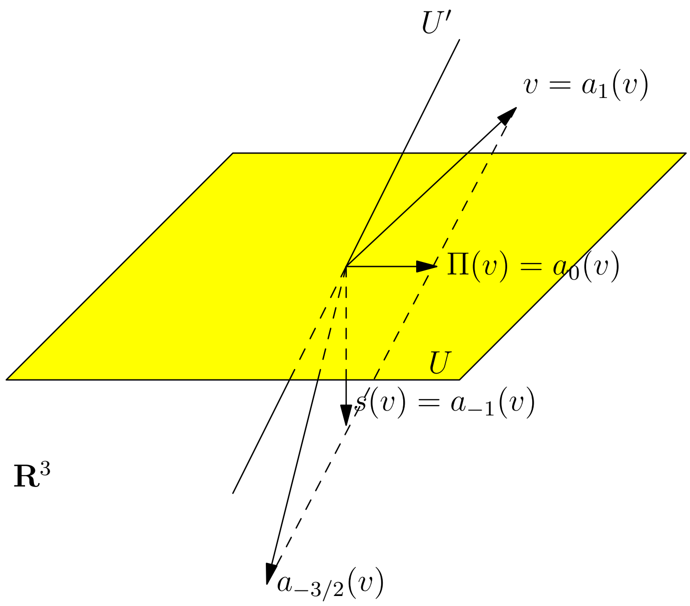


FIGURE 2.3 – Affinité de base U, de direction U' et de rapport λ

2.6 Annexe : Espaces vectoriels quotients

Définition 2.46 (Espace vectoriel quotient)**.** *Soient V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et U un sous-espace de V. On définit sur V la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ suivante :*

$$\forall x, y \in E, \quad x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x - y \in V.$$

On note V/U l'ensemble $V/\mathscr{R}$ des classes d'équivalence de cette relation. V/U a une structure de $\mathbf{K}$*-espace vectoriel.*

Proposition 2.47. *Soient V et W deux espaces vectoriels et $\varphi\colon V \to W$ une application linéaire. On note $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $I = \mathrm{Im}(\varphi)$. On considère $\varphi\colon V \to V/N$ la projection canonique et $j\colon I \to W$ l'injection canonique. Soit $\tilde{\varphi}\colon V/N \to I$ tel que $\varphi = j \circ \tilde{\varphi} \circ p$:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & W \\ V/N \arrow[r, "\tilde{\varphi}"'] & I \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Alors, l'application $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de V/N sur I.

Démonstration. On sait que $\tilde{\varphi}$ est injective et surjective. Si $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $X, Y \in V/N$, $x \in X$ et $y \in Y$, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\lambda X + \mu Y) &= \tilde{\varphi}(\lambda p(x) + \mu p(y)) = \tilde{\varphi}(p(\lambda x + \mu x) \\ &= (\tilde{\varphi} \circ p)(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) = \lambda(\tilde{\varphi} \circ p)(x) + \mu(\tilde{\varphi} \circ p)(y) = \lambda\tilde{\varphi}(X) + \mu\tilde{\varphi}(Y).\end{aligned}$$

□

Exemple 2.48. Soit ψ une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, on suppose d'application ψ de rang $n-1$, ainsi $\mathrm{rg}\,\psi = n-1$ et $\dim \mathrm{Ker}\,\psi = 1$. L'ensemble $H = \mathrm{Im}\,\psi \simeq \mathbf{R}^n / \mathrm{Ker}\,\psi$ est un hyperplan de $\mathbf{R}^n$.

2.7 Exercices

Exercice 2.1. Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires.

1. $$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 \end{array},$$

2. $$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & 4x-3 \end{array},$$

3. $$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array},$$

4. $$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0([0\,,1]) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f(3/4) \end{array},$$

   où $\mathscr{C}^0([0\,,1])$ est l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0\,,1]$.

5. $$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x^2\sin(3x+5y) \end{array}$$

6. $$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

7. $$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0([0\,,1]) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & \max_{t\in[0,1]} f(t). \end{array}$$

8. $$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}^1([0\,,1]) & \to & \mathscr{C}^0([0\,,1]) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

   où $\mathscr{C}^1([0\,,1])$ est l'ensemble des fonctions numétriques ayant une dérivée continue sur $[0\,,1]$.

Exercice 2.2. Soient f et g des applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, définie par $f(z)=\overline{z}$ et $g(z)=\mathrm{Re}(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et non-linéaires sur $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Exercice 2.3. Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$f_1 \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y,x-y) \end{array}$$

$$f_2 \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (xy,x,y) \end{array}$$

$$f_3 \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z,y-z,x+y) \end{array}$$

$$f_4 \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

$$f_5 \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_3[X] & \to & \mathbf{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

où $\mathbf{R}_3[X]$ correspond à l'ensemble des polynômes de degré 3 à coefficients réels.

$$f_6 \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_3[X] & \to & \mathbf{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1),P(0),P(1)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} f_7 & : & \mathbf{R}[X) & \to & \mathbf{R}[X] \\ & & P & \mapsto & P-(X-2)P' \end{array}$$

Exercice 2.4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, on défnit l'application $f\colon F \times G \to \mathbf{R}^n$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 2.5. Soient E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E, on définit l'application $f\colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Appliquer le théorème du rang.

Exercice 2.6. Montrer que V/U a une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Chapitre 3

Systèmes linéaires et matrices

3.1 Systèmes linéaires

3.1.1 Introduction

Le but de ce cours est de résoudre des équations vectorielles :

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = w. \tag{3.1}$$

d'inconnues $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$.

Définition 3.1 (Système linéaire d'équations). *Si, dans* (3.1),

$$v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad \textit{pour } 1 \leq j \leq n,$$

avec $a_{1j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbf{K}$ *et :*

$$w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

avec $y_1, \ldots, y_m \in \mathbf{K}$ *alors on appelle* système d'équations linéaires*, l'équation vectorielle :*

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = w \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Remarque 3.2. L'écriture (3.2) est la plus commode pour représenter un système d'équations linéaires. C'est celle que l'on va utiliser.

Définition 3.3 (Solutions du système)**.** *Soit le système d'équations linéaires* (3.2)*. on appelle* solution *du système* (3.2)*, le vecteur* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ *qui vérifie les* m *équations du système* (3.2)*.*

Définition 3.4 (Système homogène)**.** *Soit le système d'équations linéaires* (3.2)*. On dit que le système est* homogène *si le vecteur* w *est le vecteur nul.*

Remarque 3.5. Dans un système homogène, le vecteur nul dans $\mathbf{K}^n$ est toujours une solution du système qu'on appelle *solution triviale.*

Définition 3.6 (Systèmes équivalents)**.** *Soient les systèmes d'équations linéaires* (3.2) *et :*

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \cdots + a'_{1n}x_1 = y'_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a'_{p1}x_1 + \cdots + a'_{pn}x_n = y'_n \end{cases} . \tag{3.3}$$

On dit que les deux systèmes (3.2) *et* (3.3) *sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions* $(x_1, \dots, x_n)$*.*

Dans ce cours, on veut déterminer les solutions d'un système linéaire de la forme (3.2).

3.1.2 Méthode du pivot de Gauss

Système echelonné

Définition 3.7 (Système echelonné)**.** *Un système* echelonné *d'équations est un système de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{cccccc|l} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + & a_{1j_2}x_{j_2} + \cdots\cdots + & a_{1j_r}x_{j_r} + \cdots + & a_{1m}x_m & = & y_1 & L_1 \\ & a_{2j_2}x_{j_2} + \cdots\cdots + & a_{2j_r}x_{j_r} + \cdots + & a_{2m}x_m & = & y_2 & L_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + & a_{rm}x_m & = & y_r & L_r \\ & & & 0 & = & y_{r+1} & L_{r+1} \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & = & y_m & L_m \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Si on suppose que le premier terme non nul $a_{kj}x_j$ *de la ligne* L_k *apparait à la colonne* C_j *avec* $j = j_k$ *alors on doit avoir :*

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_k < \cdots < j_r.$$

Les lignes $L_{r+1}, \ldots, L_m$ *contiennent que des termes nuls dans le premier membre. Les* échelons *du système sont les colonnes* $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_k}, \ldots, C_{j_r}$*. Les* inconnues d'échelons *seront les inconnues correspondants. Le coefficient* a_{kj_k} *(le premier coefficient) non nul qui apparait à la ligne* L_k *sera le coefficient du pivot de la colonne* C_{j_k}*.*

Exemples 3.8. 1. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc|l} \boxed{x_1} & - & x_2 & & & + & 2x_4 & - & x_5 & = & b_1 & L_1 \\ & & & & \boxed{x_3} & - & x_4 & + & x_5 & = & b_2 & L_2 \\ & & & & & & & & \boxed{2x_5} & = & b_3 & L_3 \\ & & & & & & & & 0 & = & b_4 & L_4 \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Le système (3.5) est echelonné. Ses échelons (encadrés dans (3.7)) se trouvent aux colonnes C_1, C_3 et C_5.

2. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc|l} \boxed{x_1} & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & L_1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 & L_2 \\ & & & & \boxed{x_3} & + & x_4 & = & 0 & L_3 \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Le système (3.6) n'est pas échelonné car le premier terme non nul dans les lignes L_1 et L_2 sont dans la colonne C_1.

Définition 3.9 (Solutions d'un système echelonné)**.** *On considère le système échelonné* (3.4)*, on note* C_i *la* i^e *colonne et* L_j *la* j^e *ligne qui correspond à la* j^e *équation.*

- *Si le vecteur donné* $w = (y_1, \ldots, y_m)$ *ne vérifie pas* $y_{r+1} = \cdots = y_m = 0$ *alors les équations* $L_{r+1}, \ldots, L_m$ *ne seront pas vérifiés, quelles que soient les valeurs données aux inconnues* $x_1, \ldots, x_n$*. Dans ce cas, le système n'a pas de solution.*
- *Si on a* $y_{r+1} = \cdots = y_m = 0$*, les équations* $L_{r+1}, \ldots, L_m$ *seront trivialement vérifiés quelles que soient les valeurs données aux inconnues* $x_1, \ldots, x_n$ *et* (3.4) *se réduit aux seules équations* $L_1, \ldots, L_r$*.*

Proposition 3.10. *Pour tout système de valeurs attribués aux inconnues* x_j *qui ne correspondent pas à des échelons, on pourra donner d'uniques valeurs aux inconnues d'échelons* x_j *(qu'on appelera* paramètre *de sorte que* $(x_1, \ldots, x_n)$ *forme une solution de* (3.4)*.*

Démonstration. On détermine la valeur des inconnues d'échelons en remontant les équations $L_1, \ldots, L_r$. □

Exemple 3.11. On considère le système échelonné (3.5) de l'exemple 3.8-1 et on note $w = (b_1, \ldots, b_4)$.

– Si $b_4 = 0$, L_4 est trivialement vérifiée et résoudre (3.5) équivaut à résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc|c} \boxed{x_1} & - & x_2 & & & + & 2x_4 & - & x_5 & = & b_1 & L_1 \\ & & & & \boxed{x_3} & - & x_4 & + & x_5 & = & b_2 & L_2 \\ & & & & & & & & \boxed{2x_5} & = & b_3 & L_3 \end{array}\right. \tag{3.7}$$

– Si $b_4 \neq 0$ alors L_4 est trivialement fausse et le système n'a pas de solution.

On utilise la proposition 3.10. On voit que x_2 et x_4 ne sont pas des echelons dans (3.7) donc on peut poser $x_2 = u$ et $x_4 = v$ (où u et v sont quelconques dans $\mathbf{K}$). On pourra trouver d'uniques valeurs pour les variables d'échelons x_1, x_3, x_5 telles que $(x_1, \ldots, x_5)$ soit solution de (3.7). On déterminer les valeurs en remontant les équations. La troisième ligne nous donne :

$$2x_5 = b_3 \Leftrightarrow x_5 = \frac{b_3}{2}.$$

La deuxième ligne nous donne :

$$x_3 - x_4 + x_5 = b_2 \Leftrightarrow x_3 - v + \frac{b_3}{2} = b_2 \Leftrightarrow x_3 = v + b_2 - \frac{b_3}{2}.$$

La première ligne nous donne :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_4 - x_5 = b_1 &\Leftrightarrow x_1 - u + 2v - \frac{b_3}{2} = b_1 \\ &\Leftrightarrow x_1 = u - 2v + b_1 + \frac{b_3}{2}. \end{aligned}$$

D'où les solutions du systèmes sont les quintuplets de la forme :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(u - 2v + b_1 + \frac{b_3}{2}, u, v + b_2 - \frac{b_3}{2}, v, \frac{b_3}{2}\right)$$

pour $u, v \in \mathbf{K}$ quelconques.

Algorithme du pivot de Gauss

Dans cette section, on souhaite transformer un système d'quations linéaires en un système écheloné équivalent. Pour cela, on fait une série d'opérations élémnetaires sur les lignes qui ne changent pas les solutions du système.

Définition 3.12 (Opérations élémentaies)**.** *Soit le système d'équations linéaires* (3.2)*. On note L_i la i^e ligne du système pour $1 \leq i \leq n$. Les opérations suivantes sont appelées* opérations élémentaires *sur les lignes.*

- *Transposition de ligne : la ligne L_1 devient la ligne L_j et vice et versa.*
- *Homothétie : on multiplie la ligne L_i par un scalaire non nul λ.*
- *Homothétie-transposition : on ajoute un multiple de la ligne L_j à la ligne L_i.*

Proposition 3.13. *Le système $(L'_1, \dots, L'_n)$ obtenu par une transformation élémentaire (ou opération élémentaire sur les lignes) a le même ensemble de solutions que $(L_1, \dots, L_n)$.*

Démonstration. On peut retrouver $(L_1, \dots, L_n)$ à partir de $(L'_1, \dots, L'_n)$ par une transformation inverse élémentaire. Par exemple, si

$$\begin{cases} L'_1 = L_1 \\ \quad \vdots \\ L'_i = L_i + \lambda L_J \\ \quad \vdots \\ L'_n = L'_n \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} L_1 = L'_1 \\ \quad \vdots \\ L_i = L'_i + \lambda L'_j \\ \quad \vdots \\ L_n = L'_n \end{cases}$$

□

Remarque 3.14. À propos de l'appelation « opération élémentaires sur les lignes », on pourrait se demnader si on peut faire la même chose sur les colonnes. Il n'en est rien !

On utilise les opérations élémentaires pour transformer un système d'équations linéaires en système échelonné équivalent. C'est ce qu'on appelle la *méthode du pivot de Gauss.*

Remarque 3.15. Pour éviter d'avoir des « ' » (prime) un peu partout, on notera de la manière « informaticienne » la transformation sur les lignes par :

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

(la ligne L_i est transformé en faisant la somme de la ligne L_i par λ fois L_j).

Exemple 3.16. Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et $w = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbf{K}^4$ donné. On veut résoudre

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = w \tag{3.8}$$

d'inconnus x_1, x_2, x_3, x_4.

$$(3.8) \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl|l} \boxed{x_1} & + & x_2 & & & - & x_4 & = & y_1 & L_1 \\ \boxed{-x_1} & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & y_2 & L_2 \\ \boxed{x_1} & + & x_2 & + & x_3 & & & = & y_3 & L_3 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & y_4 & L_4 \end{array} \right. \tag{3.9}$$

où $\boxed{x_1}$ est le terme pivot et $\boxed{-x_1}$, $\boxed{x_1}$ sont les termes à annuler. On transforme (3.9) en système echelonné équivalent par une suite d'opérations élémentaires.

$$(3.9) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr|l} \boxed{x_1} & + & x_2 & & & - & x_4 & = & y_1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ & & \boxed{x_2} & + & 2x_3 & & & = & y_1 + y_2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & -y_1 + y_3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ & & \boxed{x_2} & + & x_3 & - & x_4 & = & y_4 & L_4 \leftarrow L_4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr|l} \boxed{x_1} & + & x_2 & & & - & x_4 & = & y_1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ & & \boxed{x_2} & + & 2x_3 & & & = & y_1 + y_2 & L_2 \leftarrow L_2 \\ & & & & \boxed{x_3} & + & x_4 & = & -y_1 + y_3 & L_3 \leftarrow L_3 \\ & & & & \boxed{-x_3} & - & x_4 & = & -(y_1 + y_2) + y_4 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr|l} \boxed{x_1} & + & x_2 & & & - & x_4 & = & y_1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ & & \boxed{x_2} & + & 2x_3 & & & = & y_1 + y_2 & L_2 \leftarrow L_2 \\ & & & & \boxed{x_3} & + & x_4 & = & -y_1 + y_3 & L_3 \leftarrow L_3 \\ & & & & & & 0 & = & -2y_1 - y_2 + y_3 + y_4 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \right.$$

Le système admet au moins une solution $(x_1, \ldots, x_4)$ si et seulement si $w = (y_1, \ldots, y_4)$ donné vérifie :

$$0 = -2y_1 - y_2 + y_3 + y_4.$$

On a :

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle &= \langle (1,-1,1,0),(1,0,1,1),(0,2,1,1),(-1,1,0,1)\rangle \\ &= \{w,\ w = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4\} \\ &= \{w = (y_1,y_2,y_3,y_4),\ -2y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0\}\,.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x_4 = u$ donné, on pourra trouver d'uniques valeurs pour x_1, x_2, x_3 tel que (x_1, x_2, x_3, x_4) soit solution. L'ensemble des solutions peut être paramétré par $x_4 = v$. On peut par exemple prendre le système homogène suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.10}$$

$x_4 = v$ quelconque, la troisième ligne nous donne $x_3 = -u$. La deuxième ligne nous donne

$$x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 - 2u = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2u.$$

La première ligne nous donne :

$$x_1 + x_2 - x_3 = x_1 + 2u - u = 0 \Leftrightarrow x_1 = -u.$$

Conclusion : les solutions de (3.10) sont les quadruplets de la forme :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-u, 2u, -u, u).$$

Remarque 3.17. Dans l'exemple 3.16, la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas libre. On obtient la relation entre v_1, v_2, v_3, v_4 :

$$\begin{aligned}-1\cdot v_1 + 2\cdot v_2 - 1\cdot v_3 + 1\cdot v_4 = 0 &\Leftrightarrow -v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4 = 0 \\ &\Leftrightarrow v_4 = v_1 - 2v_2 + v_3. \end{aligned} \tag{3.11}$$

On a alors :

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \langle v_1, v_2, v_3\rangle\,,$$

c'est-à-dire que tout vecteur w combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3, v_4 peut se réécrire comme combinaison linéaire des seuls v_1, v_2, v_3 en utilisant (3.11). Les vecteurs v_1, v_2, v_3 forment une famille libre.

$$\begin{aligned}x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 &\Leftrightarrow x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0\end{aligned}$$

d'après la forme obtenue par les solutions de cette équation. On peut en dire plus de la famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_4)$, c'est une base du sous-espace

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4),\ y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 = 0\} \subseteq \mathbf{K}^4.$$

Tout vecteur $w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ tel que $-y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 0$ s'écrit de façon unique :

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_4 + 0 v_4 = w.$$

Applications de la méthode du pivot

Proposition 3.18 (Description de l'espace engendré par des vecteurs)**.** *On considère le système* (3.2)*. On a alors :*

$$\begin{aligned} \langle v_1, \dots, v_n \rangle &= \{w,\ w = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \text{ pour } x_1, \dots, x_n \in \mathbf{K}\} \\ &= \{w,\ (3.2) \text{ a une solution}\}. \end{aligned}$$

À partir de la forme echelonée, on obtient

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{w = (y_1, \dots, y_n),\ y_{r+1} = \cdots = y_n = 0\}$$

Ainsi, dans l'exemple 3.16, on obtient :

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{w = (y_1, \dots, y_n),\ -2y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0\}.$$

On rappelle trois définitions :

Définition 3.19 (Famille génératrice)**.** *Une famille de vecteurs $v_1, \dots, v_m$ forment une* famille génératrice *de $\mathbf{K}^m$ si et seulement si $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \mathbf{K}^m$. Ce qui équivaut à, pour tout $w \in \mathbf{K}^m$, l'équation $x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = w$ possède au moins une solution.*

Définition 3.20 (Famille libre)**.** *Une famille de vecteurs $v_1, \dots, v_m$ est dite* libre *si pour tout vecteur $w \in \mathbf{K}^m$ l'équation $x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = w$ admet au plus une solution. La solution est la solution triviale ($x_1 = \cdots = x_m = 0$).*

Définition 3.21 (Base)**.** *Une famille de veecteurs $v_1, \dots, v_m$ forme une* base *de $\mathbf{K}^m$, si, pour tout vecteur w, l'équation $x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = w$ admet exactement une solution.*

Proposition 3.22. *(i) Des vecteurs $v_1, \dots, v_m$ forment une famille génératrice si et seulement si l'équation $x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = w$ est équivalente à un système echelonné de la forme suivante :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1j_1} x_{j_1} + \cdots + & a_{1j_2} x_{j_2} & + \cdots + & a_{1j_m} x_{j_m} & = & y_1 \\ & a_{2j_2} x_{j_2} & + \cdots + & a_{2j_m} x_{j_m} & = & y_2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{nj_m} x_{j_m} & = & y_n \end{array}\right.$$

où toutes les lignes prennent des inconnues. Ceci entraine $n \geq m$.

(ii) *Des vecteurs $v_1, \dots, v_m$ forment une famille libre de $\mathbf{K}^n$ si et seulement si l'équation $x_1v_1 + \cdots + x_mv_m = w$ est équivalent à un système échelonné de la forme suivante :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + & a_{1j_2}x_{j_2} & + \cdots + & a_{1j_m}x_{j_m} & = & y_1 \\ & a_{2j_2}x_{j_2} & + \cdots + & a_{2j_m}x_{j_m} & = & y_2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{nj_m}x_{j_m} & = & y_n \\ & & & 0 & = & y_{n+1} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & = & y_m \end{array}\right.$$

où toutes les colonnes sont des échelons. Ceci suppose que $n \leq m$.

(iii) *Une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_m)$ forme une base de $\mathbf{K}^m$ si et seulement si l'équation $x_1v_1 + \cdots + x_mv_m = w$ est équivalent à un système échelonné complet :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

Toutes les colonnes forment des échelons et toutes les lignes contiennent des inconnues. Ce qui suppose que $n = m$.

Exemple 3.23. Considérons l'équation vectorielle (3.8).

(i) La famille considérée n'est pas génératrice.

(ii) Elle n'est pas une famille libre. On peut expliciter une relation non triviale $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = 0$ liant ecs vecteurs en résolvant le système pour une valeur attribuée à l'inconnu $x_4 = 1$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & 1 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 1 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \end{array}\right.$$

On a ainsi la relation suivante :

$$-v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4 = 0$$

(iii) Ce n'est ni une fammile génératrice, ni une famille libre donc ce n'est pas une base.

Proposition 3.24. *(i) Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ forment une famille génératrice de $\mathbf{K}^m$ et $n = m$ alors ils forment une base de $\mathbf{K}^m$.*

(ii) Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ forment une famille libre de $\mathbf{K}^m$ et $n = m$ alors ils forment une base de $\mathbf{K}^m$.

Exemple 3.25. Soient les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On montre que (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbf{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc|l} x_1 & + & x_2 & & & = & y_1 & L_1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & y_2 & L_2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & y_3 & L_3 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc|l} x_1 & + & x_2 & & & = & y_1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & y_2 - y_1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & y_3 & L_3 \leftarrow L_3 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc|l} \boxed{x_1} & + & x_2 & & & = & y_1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ & & \boxed{-x_2} & + & x_3 & = & y_2 - y_1 & L_2 \leftarrow L_2 \\ & & & & \boxed{2x_3} & = & y_3 + y_2 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Donc : (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbf{R}^3$, d'après la proposition 3.22.

3.1.3 Applications

Sous-espaces supplémentaires

Exemple 3.26. On considère les hyperplans :

$$\begin{aligned}
H_1 &= \Big\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \ x + y + z = 0 \Big\} \\
H_2 &= \Big\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \ y + z = 0 \Big\}.
\end{aligned}$$

1. On veut déterminer $H_1 \cap H_2$, c'est-à-dire

$$H_1 \cap H_2 = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \ (x, y, z) \text{ vérifie } (3.12) \Big\}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{ccccccc|c} x & + & y & + & z & = & 0 & L_1 \\ & & y & + & z & = & 0 & L_2 \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Les solutions de ce système peuvent se décrire par un paramètre libre $z \in \mathbf{R}$ et des variables x, y que l'on écrit en fonction de z en remontant les équations L_1 et L_2. La deuxième ligne donne $y = -z$ et la première :

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z \Leftrightarrow x = z - z = 0.$$

On en déduit que $v \in H_1 \cap H_2$ si et seulement si v est de la forme :

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$H_1 \cap H_2 = \left\{ v \in \mathbf{R}^3,\ v = \lambda(0, -1, -1) \right\} = \langle (0, -1, 1) \rangle.$$

En particulier, $H_1 \cap H_2 \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$.

2. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H_1 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z.$$

D'où $v \in H_1$ si et seulement si v s'écrit :

$$v = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $y, z \in \mathbf{R}$ quelconques. Donc :

$$H_1 = \left\{ v \in \mathbf{R}^3,\ v = \lambda_1(-1, 1, 0) + \mu_1(-1, 0, 1) \right\} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle.$$

On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H_2 \Leftrightarrow y + z = 0 \Leftrightarrow y = -z$$

avec $x, y \in \mathbf{R}$ quelconques (x n'intervient pas dans l'équation). Donc $v \in H_2$ si et seulement si v s'écrit :

$$v = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $x, z \in \mathbf{R}$ quelconques. Donc :

$$H_2 = \left\{v \in \mathbf{R}^3,\ v = \lambda_2(1,0,0) + \mu_2(0,-1,1)\right\} = \langle (1,0,0), (0,-1,1)\rangle .$$

On a alors :

$$\begin{aligned} H_1 + H_2 &= \left\{v \in \mathbf{R}^3,\ v = \lambda_1(-1,1,0) + \mu_1(-1,0,1) + \lambda_2(1,0,0) + \mu_2(0,-1,1)\right\} \\ &= \langle (-1,1,0), (-1,0,1), (1,0,0), (0,-1,1)\rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H_1 + H_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \mu_1 + \lambda_2 + 0 \\ -\lambda_1 + 0 + 0 + \mu_2 \\ 0 + \mu_1 + 0 + \mu_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl|l} -\lambda_1 & + & \mu_1 & + & \lambda_2 & & & = & x & L_1 \\ -\lambda_1 & & & & & - & \mu_2 & = & y & L_2 \\ & & \mu_1 & & & + & \mu_2 & = & z & L_3 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{3.13}$$

On cherche $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ dans (3.13). Pour cela, on utilise la méthode du pivot de Gauss [1].

$$\begin{aligned} (3.13) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl|l} \boxed{-\lambda_1} & + & \mu_1 & + & \lambda_2 & & & = & x & L_1 \leftarrow L_1 \\ \boxed{-\lambda_1} & & & & & - & \mu_2 & = & y & L_2 \leftarrow L_2 \\ & & \mu_1 & & & + & \mu_2 & = & z & L_3 \leftarrow L_3 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl|l} \boxed{-\lambda_1} & + & \mu_1 & + & \lambda_2 & & & = & x & L_1 \leftarrow L_1 \\ & & \boxed{-\mu_1} & + & \lambda_2 & - & \mu_2 & = & x+y & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ & & \boxed{\mu_1} & & & + & \mu_2 & = & z & L_3 \leftarrow L_3 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl|l} \boxed{-\lambda_1} & - & \mu_1 & + & \lambda_2 & & & = & x & L_1 \leftarrow L_1 \\ & & \boxed{-\mu_1} & + & \lambda_2 & & \boxed{-\mu_2} & = & y & L_2 \leftarrow L_2 \\ & & & & \boxed{\lambda_2} & & & = & z & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{3.14}$$

On a encadré en vert la variable libre (qui ne contribue pas à la partie échelonné). (3.14) a des solutions quelque soit le vecteur $v = (x, y, z)$ donné. Pour obtenir une solution, il suffit d'attribuer une valeur quelconque à la

1. Encadré en noir, les pivots et en rouge, les termes à éliminer.

variable libre μ_2 et de remonter les équations pour déterminer $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2$. En conclusion de tout cela, tout vecteur $v = (x, y, z)$ peut se décomposer en :

$$v = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où $H_1 + H_2 = \mathbf{R}^3$ (mais ces espaces ne sont pas en somme directe et donc pas supplémentaires).

Rang d'un système linéaire

Définition 3.27 (Rang d'un système linéaire)**.** *On considère le système linéaire* (3.2) *et sa forme échelonné* (3.4)*. On appelle* rang du système linéaire*, le nombre de pivot qu'on trouve après triangularisation du système (système echelonné) par la méthode du pivot de Gauss.*

Exemple 3.28. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc|l} x & + & 3y & + & 2z & & & = & 0 & L_1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 & L_2 \\ x & & & & & - & t & = & 0 & L_3 \end{array} \right. \qquad (\mathscr{S})$$

On cherche le rang de $(\mathscr{S})$. Pour cela, on utilise la méthode du pivot de Gauss pour trouver un système échelonné équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc|l} \boxed{x} & + & 3y & + & 2z & & & = & 0 & L_1 \leftarrow L_1 \\ & & \boxed{-2y} & - & z & + & t & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & & & & & \boxed{-t} & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

Il y a trois pivots donc $\mathrm{rg}\,(\mathscr{S}) = 3$.

Recherche de l'image et du noyau d'une application linéaire

Exemple 3.29. Soit f la fonction définie par :

$$f \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & x + 3y + 2z, x + y + z + t, x - t \end{array}.$$

On veut déterminer $\mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ x \in \mathbf{R}^4,\ f(x) \right\}.$$

Il suffit de déterminer les images de la base canonique de $\mathbf{R}^4$ qui est :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$f(e_1) = (1,1,1), \; f(e_2) = (3,1,0), \; f(e_3) = (2,1,0), \; f(e_4) = (0,1,-1).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, \; x(1,1,1) + y(3,1,0) + z(2,1,0) + t(0,1,-1)\Big\} \\ &= \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \rangle . \end{aligned}$$

En ce qui concerne la détermination de $\operatorname{Ker}(f)$, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.15}$$

car

$$\operatorname{Ker}(f) = \Big\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4, \; f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)\Big\}$$

ou encore :

$$\operatorname{Ker}(f) = \Big\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4, \; x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ \text{et } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_4 = 0\Big\}.$$

Après résolution (en exercice !) du système (3.15), on obtient :

$$\operatorname{Ker}(f) = \{(x_4, 3x_4, -5x_4, x_4), \; x_4 \in \mathbf{R}\} = \langle u \rangle$$

où $u = (1,3,-5,1)$.

Compléter une base

Pour traiter l'exemple qui va suivre, on a besoin de la définition d'une matrice.

Définition 3.30 (Matrice de la famille de vecteurs). *Soient $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de $\mathbf{K}^n$ et*

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

une famille de vecteurs dans $\mathbf{K}^n$. *On appelle* matrice de la famille de vecteurs $v_1, \ldots, v_m$, *dans la base* $(e_1, \ldots, e_n)$, *un tableau de dimension* $n \times m$ *de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{(e_1,\ldots,e_n)}.$$

On rappelle le théorème de la base incomplète.

Théorème 3.31 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit* $(u_1, \ldots, u_r)$ *une famille de vecteurs dans un espace vectoriel* V *de dimension finie. On peut alors compléter cette famille par des vecteurs* $u_{r+1}, \ldots, u_n$ *pour constituer une base de* V.

Exemple 3.32. Soit la famille de vecteurs considérée à l'exemple 3.16 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on note :

$$H = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \left\{ (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbf{R}^4,\ -2y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0 \right\}.$$

1. On extrait une famille libre maximale de v_1, v_2, v_3, v_4 pour former une base de H. On forme la matrice de (v_1, v_2, v_3, v_4) dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}.$$

On échelonne cette matrice

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix}$$

On a donc $\dim H = 3$ car $\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3$. On sélectionne les vecteurs v_1, v_2, v_3 qui forment une sous famille libre maximale de $v_1, \dots, v_4$ et donc une base de H. On retrouve ainsi que $H \subsetneq \mathbf{R}^4$ puisque $\dim H < \dim \mathbf{R}^4$.

2. On veut compléter v_1, v_2, v_3 pour avoir une base de $\mathbf{R}^4$. On ajoute les vecteurs de la base canonique :

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi une famille génératrice $(\langle v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3, e_4\rangle)$ de $\mathbf{R}^4$. On reprend l'échelonnement pour cette famille de vecteurs pour extraire une sous famille libre maximale de cette famille de vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & \boxed{-1} & \boxed{-1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \right.$$

Le résultat montre que v_1, v_2, v_3, e_1 forme une base de $\mathbf{R}^4$ (on a plusieurs choix possibles pour compléter v_1, v_2, v_3 de façon à consituer une base de $\mathbf{R}^4$).

3.2 Matrices

3.2.1 Généralités sur les matrices

Définition 3.33 (Matrice)**.** *On appelle* matrice *tout tableau rectangulaire de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Définition 3.34 (Ligne et colonne)**.** *Soit la matrice* (3.16)*. On dit que la matrice a* m lignes *et* n colonnes*. L'élément (ou* coefficient*)* $a_{ij} \in \mathbf{K}$ *se trouve à l'intersection de la* i^e *ligne et de la* j^e *colonne.*

Définition 3.35 (Dimension)**.** *Soit la matrice* (3.16)*. On dit que la matrice est une matrice* (m, n) *ou* $m \times n$*. Le couple* (m, n) *est appelé* dimension *de la matrice.*

Définitions 3.36 (Matrice ligne, colonne)**.** *1. On appelle* matrice ligne*, toute matrice de dimension* $(1, n)$*.*

2. On appelle matrice colonne*, toute matrice de dimension* $(m, 1)$*.*

Définition 3.37 (Ensemble des matrices)**.** *L'ensemble des matrices de dimension* (m, n) *à coefficients dans* $\mathbf{K}$ *est noté* $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{K})$*.*

Exemple 3.38. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A a pour dimension $(2, 3)$. On a $a_{12} = 2$ et $a_{21} = 2$.

3.2.2 Opérations matricielles

Addition matricielle

Définition 3.39. *Soient deux matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

de même dimension (m,n). *L'*addition matricielle *consiste à additionner terme par terme les deux matrices A et B, c'est-à-dire :*

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.40. Soient les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice $A+B$ est égale à :

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+2 & 2+1 & 1+0 \\ 4+0 & 1+1 & 0+0 \\ 1+0 & 3+0 & 2+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.41 (Matrice opposée)**.** *Soit la matrice :*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On note la matrice opposée *de A :*

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Définition 3.42 (Matrice nulle)**.** *La matrice* nulle *est la matrice*

$$O=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés 3.43. *Soient A,B,C trois matrices de dimension (m,n) et O la matrice nulle de dimension (m,n). Alors,*

1. *$+$ est associative, c'est-à-dire $(A+B)+C=A+(B+C)$,*
2. *$+$ a un élément neutre, la matrice nulle telle que $A+O=A$,*
3. *Chaque matrice a un élément opposé pour l'addition, c'est-à-dire : $A+(-A)=0$.*
4. *$+$ est commutative, c'est-à-dire $A+B=B+A$.*

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition 3.44 (Multiplication d'une matrice par un scalaire). *Soit la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

de dimension (m,n) et $\lambda \in \mathbf{K}$. On note la matrice $\lambda \cdot A$, la matrice des coefficients de A multipliés par λ, c'est-à-dire :

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Remarques 3.45.

1. Si la matrice A a pour dimension (m,n) alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, la matrice $\lambda \cdot A$ a pour dimension (m,n).
2. La matrice opposée à A est obtenue en multipliant -1 la matrice A, c'est-à-dire $-A = (-1) \cdot A$.

Exemple 3.46. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\lambda = 3$. Alors,

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \times 3 & 1 \times 3 & 2 \times 3 \\ 4 \times 3 & 1 \times 3 & 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 3.47. *Soient A et B deux matrices de dimension (m,n) et λ, μ deux réels. Alors,*

(i) $\cdot$ *est distributive à droite, c'est-à-dire $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.*

(ii) $\cdot$ *est distributive à gauche, c'est-à-dire $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$.*

(iii) $\cdot$ *est associative, c'est-à-dire $(\lambda \times \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$.*

(iv) on a : $1 \cdot A = A$ et $0 \cdot A = O$ (où O est la matrice nulle de dimension (m,n)).

Proposition 3.48. *Muni des opérations $+$ et $\cdot$, $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Multiplication matricielle

Définition 3.49. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

une matrice de dimension $(n, \mathbf{p})$ *et*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

une matrice de dimension $(\mathbf{p}, q)$*. Le* produit matriciel $C = A \times B$ *a pour dimension* (n, q) *et les coefficients* c_{ij} *se calcule :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \qquad \textit{pour tout } 1 \leq i \leq n \textit{ et } 1 \leq j \leq q.$$

Remarques 3.50.

1. Le produit AB n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (ici, $\mathbf{p}$).
2. La multiplication de deux matrices n'est pas commutative.
3. La figure 3.1 propose un moyen mémotechnique pour multiplier des matrices 2×2.

$$\begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & \boxed{b_{12}} \\ \boxed{b_{21}} & \boxed{b_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

FIGURE 3.1 – Moyen mémotechnique pour multiplier deux matrices de dimension $(2, 2)$

Exemple 3.51. Soients :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le produit de A par B est :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times -4 + 1 \times 0 & 2 \times 2 + 1 \times 2 \\ 1 \times -4 + 4 \times 0 & 1 \times 2 + 4 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Propriétés 3.52. *Soient quatres matrices :*

– A *de dimension* (n, p),
– B *de dimension* (p, q),
– C *de dimension* (q, s),
– D *de dimension* (p, q),
– E *de dimension* (q, n).

Alors :

(i) $\times$ *est associative, c'est-à-dire* $(AB)C = A(BC)$ *(*ABC *est de dimension* (n, s)*),*

(ii) $\times$ *est distributive à gauche, c'est-à-dire* $A(B + D) = AB + AD$ *(les matrices* AB *et* AD *ont pour dimension* (n, q)*),*

(iii) $\times$ *est distributive à droite, c'est-à-dire* $(B + D)E = BE + DE$ *(les matrices* BE *et* DE *ont pour dimension* (p, n)*).*

Transposition de matrice

Définition 3.53. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On appelle matrice transposée *de* A *(qu'on note* A^T*), la matrice :*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.54. Si A a pour dimension (m, n) alors A^T a pour dimension (n, m).

Exemple 3.55. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice transposée de A est :

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés 3.56. *Soient A, B deux matrices de dimension (n, p), C une matrice de dimension (p, q) et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors,*

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(ii) $(A^T)^T = A$,

(iii) $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$,

(iv) $(AC)^T = C^T A^T$.

3.2.3 Matrices particulières

Matrice carrée

Définition 3.57. *On appelle* matrice carrée*, toute matrice ayant le même nombre de lignes que de colonnes. On dit qu'elle est* d'ordre n *si elle est de dimension (n, n).*

Remarque 3.58. L'addition et la multiplication de deux matrices carrées d'ordre n et la multiplication d'un scalaire par une matrice carrée d'ordre n donne des matrices carrées d'ordre n.

Matrice diagonale

Définition 3.59 (Diagonale d'une matrice)**.** *Soit :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La diagonale *de A est constituée des éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.*

Exemple 3.60. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La diagonale de A est constituée des éléments $(1, 3, 1)$.

Définition 3.61 (Matrice diagonale)**.** *Une matrice carrée D est dite* diagonale *si tous ses éléments non diagonaux sont nuls.*

Exemple 3.62. Les matrices suivantes sont diagonales :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matrice identité

Définition 3.63 (Matrice identité, unité)**.** *On appelle* matrice identité *(ou* unité *d'ordre n, une matrice diagonale de dimension (n, n) qui ne comporte que des 1 en sa diagonale.*

Exemple 3.64.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice identité (ou unité) d'ordre 3.

Propriété 3.65. *Soit une matrice A de dimension (n, p). Alors :*

$$AI_p = I_nA = A.$$

Définition 3.66 (Matrice scalaire)**.** *On appelle* matrice λ-scalaire, *toute matrice diagonale dont les élément diagonaux sont tous égaux à λ.*

Exemple 3.67.

$$3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice inversible

Définition 3.68 (Matrice inversible)**.** *Une matrice carré A d'ordre n est dite* inversible *s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que :*

$$AB = BA = I_n.$$

Proposition 3.69. *La matrice B dans la définition précédente est* unique*.*

Définition 3.70 (Inverse d'une matrice)**.** *Soit A une matrice inversible d'ordre n. On appelle matrice inverse de A (noté A^{-1}) la matrice telle que :*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

On donne une méthode pour calculer la matrice inverse de A à la page 77.

Matrice symétrique

Définition 3.71 (Matrice symétrique)**.** *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit qu'elle est* symétrique *si $A^T = A$.*

Exemple 3.72. La matrice suivante est symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice triangulaire

Définition 3.73 (Matrice triangulaire)**.** *On appelle* matrice triangulaire inférieure *(resp. supérieure) si tous les élements au dessus (resp. en dessous) de la diagonale principale sont tous nuls.*

Exemples 3.74. 1. La matrice suivante est une matrice triangulaire supérieure :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice suivante est une matrice triangulaire inférieure :

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.2.4 Changement de coordonnées

On se donne une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de coordonnées dans une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $\mathbf{K}^m$. On donne une autre base $(f_1, \ldots, f_m)$ de $\mathbf{K}n$ et on veut trouver un moyen d'exprimer les coordonnées de $(v_1, \ldots, v_n)$ dans la base $(f_1, \ldots, f_m)$.

Définition 3.75 (Matrice d'une famille de vecteurs)**.** *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \ldots, e_m)$ constituée de m vecteurs. La matrice d'une famille de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de V est une matrice $m \times n$ noté :*

$$M_{(e_1,\ldots,e_m)}(v_1, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{(e_1,\ldots,e_m)} \tag{3.17}$$

dont la j^e colonne est le vecteur :

$$\begin{array}{c} v_j \\ \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}_{(e_1,\dots,e_m)} \end{array},$$

ce sont les coordonnées *de v_j dans la base $(e_1, \dots, e_m)$.*

Exemple 3.76. On se donne deux bases dans $\mathbf{R}^3$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de (f_1, f_2, f_3) dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$M_{(e_1,e_2,e_3)}(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.77 (Multiplication d'un vecteur par une matrice)**.** *Soit la matrice* (3.17) *de taille (m, n) et un vecteur à n lignes :*

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \cdots + a_{1j}b_j + \cdots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{i1}b_1 + \cdots + a_{ij}b_j + \cdots + a_{in}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + \cdots + a_{mj}b_j + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}.$$

On multiplie le coefficient de la ligne i avec les coefficients du vecteur colonne. Le résultat de l'opération est un vecteur à n lignes.

Exemple 3.78. On considère les deux bases définies à l'exemple 3.76. on rappelle que

$$M_{(e_1,e_2,e_3)}(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit

$$v = f_1 = 1 \times f_1 + 0 \times f_2 + 0 \times f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(f_1,f_2,f_3)}$$

   un vecteur dont les coordonnées sont exprimés selon la base (f_1, f_2, f_3). Pour avoir v dans les coordonnées de la base (e_1, e_2, e_3), on fait le calcul :

$$M_{(e_1,e_2,e_3)}(f_1, f_2, f_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   cela donne,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 \\ 1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 \\ 0 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $w = f_1 - 2 \times f_2 + f_3$ ou encore :

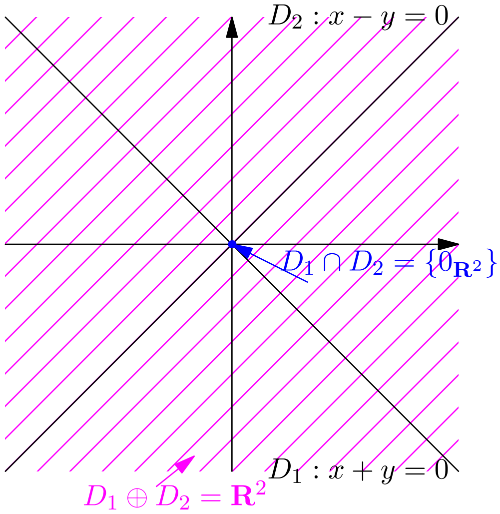
$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{(f_1,f_2,f_3)}$$

   dans la base (f_1, f_2, f_3). On cherche les coordonnées du vecteur w dans la base canonique. À calculer :

$$M_{(e_1,e_2,e_3)}(f_1, f_2, f_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + -2 \times 1 + 0 \\ 1 \times 1 + -2 \times 0 + 1 \\ 0 + -2 \times 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Définition 3.79 (Matrice de changement de base)**.** *Soit V un* **K***-espace vectoriel munie de deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$. On appelle* matrice de changement de base*, la matrice $M_{(e_1,e_2,e_3)}(f_1, f_2, f_3)$.*

Cette matrice permet d'effectuer le changement de coordonnées.



On voudrait une méthode pour calculer $Q = M_{(f_1,f_2,f_3)}(e_1, e_2, e_3)$ de coordonnées de l'ancienne base à la nouvelle qui permet d'effectuer cette opération. Une mathode consiste à résoudre les équations :

$$e_i = y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n$$

pour déterminer les coordonnées de chaque vecteur e_i dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$.

Exemple 3.80. On reprend les données de l'exemple 3.78. On a :

$$\begin{aligned} e_1 = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} y_1 & + & y_2 & & & = & 1 \\ y_1 & & & + & y_3 & = & 0 \\ & & y_2 & + & y_3 & = & 0 \end{array} \right. . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Après résolution de (3.18), on obtient

$$e_1 = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} f_3.$$

On peut faire de même pour e_2 et e_3 :

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{2} f_3, \\ e_3 &= -\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{2} f_3. \end{aligned}$$

D'où

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.81. La matrice $M_{(f_1,f_2,f_3)}(e_1,e_2,e_3)$ est la matrice inverse de la matrice $M_{(e_1,e_2,e_3)}(f_1,f_2,f_3)$.

On va donner une méthode équivalente en donnant une nouvelle interprétation sur les lignes du système. On fera les opérations qui interviennent dans la méthode du pivot directement sur les lignes de la matrice des vecteurs $M_{(e_1,\dots,e_n)}(f_1,\dots,f_n)$.

Proposition 3.82. *Soit un vecteur colonne $v=(x_1,\dots,x_n)_{(e_1,\dots,e_n)}$ représentant les coordonnées du vecteur v dans la base $(e_1,\dots,e_n)$. On décrit les opéreations élémentaires et les changements effectués sur la base.*

1. *Transposition de lignes :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(e_1,\dots,e_i,\dots,e_j,\dots,e_n)} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(e'_1,\dots,e'_i,\dots,e'_j,\dots,e'_n)}.$$

2. *Homothétie :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(e_1,\dots,e_i,\dots,e_n)} \xrightarrow{L_i \leftarrow \lambda L_i} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(e'_1,\dots,e'_i,\dots,e'_n)}.$$

3. *Transposition-Homothétie :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(e_1,\dots,e_i,\dots,e_j,\dots,e_n)} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j+\lambda x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(e'_1,\dots,e'_i,\dots,e'_j,\dots,e'_n)}.$$

Démonstration. Explicitons la troisième opération. Le résultat représente aussi les coordonnées de v dans une nouvelle base $(e'_1, \dots, e'_n)$ de V qui est déterminée par $(e_1, \dots, e_n)$ par les relations :

$$\begin{cases} e_i = e'_i + \lambda e'_j & \\ e_k = e_k & \text{pour } k \neq i. \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \cdots + x_i e_i + \cdots + x_j e_j + \cdots + x_n v_n \\ &= x_1 e'_1 + \cdots + x_i (e'_i + \lambda e'_j) + \cdots + x_j e'_j + \cdots + x_n e'_n \\ &= x_1 e'_1 + \cdots + x_i e'_i + \cdots + (x_j + \lambda x_i) e'_j + \cdots + x_n e_n. \end{aligned}$$

On pourra expliciter de la même façon les opérations de transposition et d'homothétie. □

On explicite la méthode du pivot de Gauss pour la recherche de la matrice inverse.

Exemple 3.83. On reprend les données de l'exemple 3.78. On a :

$$M_{(e_1,e_2,e_3)}(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le but de la manœuvre est de mettre face à face la matrice identité (coordonnées de (e_1, e_2, e_3) dans (e_1, e_2, e_3)) et $M_{(e_1,e_2,e_3)}(f_1, f_2, f_3)$, de transformer la dernière matrice en la matrice identité (coordonnés de (f_1, f_2, f_3) dans (f_1, f_2, f_3)) par des transformations élémentaires sur les lignes et la matrice obtenue en dernière étape est $M_{(f_1,f_2,f_3)}(e_1, e_2, e_3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\1/2 & -1/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}}_{M_{(f_1,f_2,f_3)}(e_1,e_2,e_3)} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ L_2 + L_3\\ L_3 \end{array}\right.$$

3.2.5 Matrice d'une application linéaire

Définition 3.84 (Matrice d'une application linéaire)**.** *Soient V et W deux espaces vectoriels munis respectivement d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_q)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ et $f\colon V \to W$ une application linéaire. On appelle* matrice de l'application linéaire f *dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ (notée $M_{(\mathscr{B},\mathscr{B}')}(f)$, la matrice A de taille (p, q) à coefficients dans $\mathbf{K}$ dont les coefficients de la j^e colonne sont les coordonnées de $f(e_j)$ sand la base $\mathscr{B}'$.*

Remarques 3.85.

1. Si $V = W$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, on dira que A est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. Une application linéaire f est nulle si et seulement si $M_{(\mathscr{B},\mathscr{B}')}(f) = 0$.

Exemple 3.86. Soit l'application f définie de la manière suivante :

$$f \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y, x) \end{array}.$$

On note (e_1, e_2) (resp. (e'_1, e'_2, e'_3) la base canonique de $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$) On définit $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, -1)$ des vecteurs de $\mathbf{R}^2$ et $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$ des vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

1. On montre que (u_1, u_2) (resp. (v_1, v_2, v_3)) est une base de $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$). On établit :

$$M_{(e_1,e_2)}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_{(e'_1,e'_2,e'_3)}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

et on trigonalise les deux matrices par le procédé du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1\\ L_2 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1\\0 & \boxed{-2}\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1\\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1\\ L_2\\ L_3 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

Dans les deux cas, dans chaque ligne et chaque colonne, on trouve un pivot donc (u_1, u_2) forme une base de $\mathbf{R}^2$ et (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbf{R}^3$.

2. On cherche :

   (a) la matrice de f dans les bases (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2, e'_3). Pour cela, on calcule :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = (1,1,1) = 1e'_1 + 1e'_2 + 1e'_3 \\ f(e_2) &= f(0,1) = (1,-1,0) = 1e'_1 - 1e'_2 + 0e_2. \end{aligned}$$

   D'où :

$$M_{((e_1,e_2))}((e'_1, e'_2, e'_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) la matrice de f dans les bases (e_1, e_2) et (v_1, v_2, v_3).

$$f(1,0) = (1,1,1) = x(1,1,0) + y(1,-1,1) + z(0,1,1) \tag{3.19}$$
$$f(0,1) = (1,-1,0) = x(1,1,0) + y(1,-1,1) + z(0,1,1). \tag{3.20}$$

   Pour trouver les inconnues x, y, z dans (3.19), on résout :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array} \right. \tag{3.21}$$

   de solutions :

$$\begin{cases} x = 2/3 \\ y = 1/3 \\ z = 2/3 \end{cases}.$$

   Pour trouver les inconnues x, y, z dans (3.20), on résout :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.22}$$

de solutions :

$$\begin{cases} x = 1/3 \\ y = 2/3 \\ z = -2/3 \end{cases}.$$

D'où :

$$M_{(e_1,e_2)}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Soit le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = y_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = y_m \end{cases}. \tag{3.23}$$

Définition 3.87 (Matrice d'un système linéaire)**.** *On note*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la matrice des coefficients de (3.23)*,*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est le vecteur des inconnues et

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

est le vecteur colonne des constante. On a ainsi $AX = B$.

Définition 3.88 (Rang d'une matrice)**.** *On appelle* rang d'une matrice *A le nombre de vecteurs colonnes* **K***-linéairement indépendants.*

Proposition 3.89. *Compte-tenu de la correspondance matrice-système linéaire et la définition 3.27, le rang de la matrice A est le nombre de pivots obtenus par la méthode de Gauss (triangularisation de la matrice).*

Exemple 3.90. On veut calculer le rang de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour cela, on « triangularise » la matrice en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2 \times L_2 \end{array} \right.$$

On obtient trois pivots d'où $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Proposition 3.91. *Soit A une matrice de taille (n, n). La matrice est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.*

Exemple 3.92. Reprenons les données de l'exemple 3.90. On a obtenu après algorithme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

et on a déduit que $\mathrm{rg}(A) = 3$. On obtient donc, d'après la proposition 3.91, que la matrice A est inversible.

3.3 Exercices

Exercice 3.1. Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$

Exercice 3.2. Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & 2y & - & z & + & t & = & \lambda \\ 2x & + & y & - & z & & & = & \lambda-1 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & & & = & 2\lambda \\ (\lambda+2)x & + & (\lambda+2)y & - & z & & & = & 3\lambda+a \\ 3x & & & - & z & + & 3t & = & -\lambda^2 \end{array}\right. \qquad (S)$$

Exercice 3.3. Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & + & 4z & + & 7t & = & b_1 \\ x & + & 3y & + & 4z & + & 5t & = & b_2 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & 2t & = & b_3 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & b_4 \end{array}\right. \qquad (S_1)$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & + & 5z & + & 3t & = & b_1 \\ x & + & 4y & + & 7z & + & 3t & = & b_2 \\ & & y & + & 2z & & & = & b_3 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & b_4 \end{array}\right. \qquad (S_2)$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & - & t & = & b_1 \\ -x & + & 3y & & & + & t & = & b_2 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & - & 2t & = & b_3 \\ & & 2y & + & z & & & = & b_4 \end{array}\right. \qquad (S_3)$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & b_1 \\ -2x & - & 4y & - & 2z & + & 4t & = & b_2 \\ -x & - & 2y & - & z & - & 2t & = & b_3 \\ 3x & + & 6y & + & 3z & + & 6t & = & b_4 \end{array}\right. \qquad (S_4)$$

Exercice 3.4. Donner une base de l'ensemble des solutions de :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} 3x & & & + & 2z & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & +z & +t & =0 & & & \\ 2x & - & y & + & z & - & t & =0 & \end{array}\right. .$$

Exercice 3.5. Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 3 \end{array}\right. \qquad (S_1)$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{array}\right. \qquad (S_2)$$

Quel est le rang des systèmes linéaires précédents (suivant les valeurs de m) ?

Exercice 3.6. Quel est le rang du système linéaire suivant (discuter selont les valeurs λ, a, b, c, d) ?

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}(1+\lambda)x & + & y & + & z & + & t & = & a\\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & + & t & = & b\\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & + & t & = & c\\ x & + & y & + & z & + & (1+\lambda)t & = & d\end{array}\right.$$

Exercice 3.7. Soit l'application

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^4 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z, x-y+2z, 4x+5y-7z, 3y-5z) \end{array}.$$

Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3.8. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}^3 \\ & & (x,y,z,t) & \mapsto & x+3y+2z, x+y+z+t, x-t \end{array}.$$

1. En vous servant des résultats de l'exemple 3.29, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. En déduire la dimension de chacun d'eux.
2. Compléter la bse de $\mathrm{Ker}(f)$ en une base de $\mathbf{R}^4$ et celle de $\mathrm{Im}(f)$ en une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 3.9. Donner une base de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. Quelle est la dimension de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{K})$?

Exercice 3.10. Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Exercice 3.11. On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 0\\ 5 & 4 & 1 & 3\\ 6 & -2 & -1 & 7\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}7 & 2\\ -5 & 2\\ 3 & 1\\ 6 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 6\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

1. Calculer AB puis $(AB)C$.
2. Calculer BC puis $A(BC)$.
3. Que remarque-t-on ?

Exercice 3.12. On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5.

Exercice 3.13. Écrire la matrice transposée des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.14. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(AC)^T = C^T A^T$.

Exercice 3.15. Soit la matrice :

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Donner une relation des coefficients a_{ij} (pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$) de la matrice T_n en fonction de i et j.

Exercice 3.16. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - I_3.$$

1. Calculer B.
2. Calculer B^2, B^3. En déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier n.

3. Développer $(B+I_3)^n$ par la formule de binôme et simplifier. (*Indication : La formule du binôme pour les matrices est :*

$$(A+B)^n = \sum_{i=1}^{n} A^i B^{n-i}$$

).

4. En déduire A^n pour tout entier n.

Exercice 3.17. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^3 - A$ et en déduire que A est inversible. Calculer A^{-1}.

Exercice 3.18. Soit $E = \mathbf{R}^3$. On définit la famille de vecteurs :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) forme une base $\mathbf{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées de $v = (5, 7, 12)$ dans cette base.

Exercice 3.19. On suppose que les matrices suivantes sont inversibles, calculer leur matrice inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbf{R}, \; a \neq -20.$$

Exercice 3.20. Avec les données de l'exemple 3.86, calculer :

$$M_{(u_1,u_2)}(e'_1, e'_2, e'_3) \quad \text{et} \quad M_{(u_1,u_2)}(v_1, v_2, v_3).$$

Exercice 3.21. Dans l'exercice 3.19, on a supposé que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbf{R}, \; a \neq -20.$$

sont inversibles. Montrer, donc, qu'elles sont tous inversibles.

Chapitre 4

Déterminants

Dans ce chapitre, on va étudier un autre moyen de déterminer si une matrice est inversible ou non. Les déterminants permettent aussi de calculer la matrice inverse et déterminer si les vecteurs qui la constitue sont linéairement indépendants ou non.

4.1 Formes n-linéaires alternées

Proposition 4.1. *Le produit cartésien de n $\mathbf{K}$-espace vectoriel, V (qu'on note généralement V^n) est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Définition 4.2 (Application n-linéaire)**.** *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On dit que $f\colon V^n \to W$ est une* application multialternée *(ou* n-linéaire *si elle est linéaire par rapoort à chacune de ses variables, c'est-à-dire si $x_i = u_i + v_i$:*

$$f(x_1, \ldots, u_i + v_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, u_i, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, v_i, \ldots, x_n)$$

et pour $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$f(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Définition 4.3 (Forme n-linéaire)**.** *Dans la définition 4.2, si $W = \mathbf{R}$ alors on dit que f est une* forme n-linéaire*.*

Définition 4.4 (Applicaton multilinéaire alternée)**.** *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f\colon V^n \to \mathbf{R}$ une forme n-linéaire. On dit que f est* alternée *si*

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{dès que } x_i = x_j \text{ pour } i \neq j.$$

4.2 Déterminant d'une matrice carrée

4.2.1 Premières définitions

Théorème 4.5. *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors, il existe une unique forme n-linéaire et alternée $f \colon V^n \to \mathbf{R}$ tel que $f(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n) = 1$.*

Définition 4.6 (Déterminant)**.** *On appelle* déterminant *l'unique forme n-linéaire et alternée qui vérifie les conditions du théorème 4.5*

Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

des vectuers de V dont les coordonnés sont dans la base $\mathscr{B}$. On note :

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Définition 4.7 (Déterminant d'une matrice carrée)**.** *Soit A une matrice carrée de dimension (n, n) et à coefficients dans $\mathbf{K}$. On appelle* déterminant de A *le déterminant des vecteurs colonnes.*

4.2.2 Propriétés des déterminants

Propriétés 4.8. *Soit A une matrice carrée de dimension (n, n).*

1. *(a) Si A a une ligne (ou une colonne) de zéros alors* $\det(A) = 0$.

   (b) Si A a deux lignes (ou deux colonnes) identiques alors $\det(A) = 0$.
2. *Si on échange deux lignes (deux colonnes) d'un déterminant alors on change le signe de ce déterminant.*
3. *On ne modifie pas un déterminant si on ajoute une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes).*
4. *Si on multiplie une ligne (resp. une colonne) d'un déterminant par un scalaire λ, alors le déterminant est lui-même multiplié par λ.*

5. *Si A est une matrice triangulaire d'ordre n alors* $\det(A)$ *correspond au produit des termes diagonaux.*
6. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
7. $\det(A^T) = \det(A)$.
8. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
9. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Remarques 4.9. Compte tenu des propriétés 4.8,

1. $\det(A^n) = \det(A)^n$.
2. $\det(I_n) = 1$.

4.2.3 Calcul pratique de déterminants

Matrice carrée d'ordre 2

Définition 4.10. *Soit A un matrice carrée d'ordre 2 telle que :*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice A est :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - c \times b.$$

C'est la différence des produis des termes diagonaux.

Exemple 4.11. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors le déterminant de A est :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 5 = -1.$$

Matrice carrée d'ordre 3

Définition 4.12. *Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La formule suivante (appelée règle de Sarrus*) permet de calculer le déterminant de A :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Exemple 4.13. Soit la matrice M suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, d'après la règle de Sarrus,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1\times1\times0+2\times1\times1+1\times0\times1-1\times1\times1+2\times0\times0+1\times1\times1 \\ &= 0+2+0-1-0-1=0. \end{aligned}$$

Remarque 4.14. La *règle de Sarrus* n'est valable que pour les matrices carrées *d'ordre* 3 et n'est absolument pas généralisable.

Calcul d'un déterminant d'ordre n

Définition 4.15 (Mineur d'un coefficient)**.** *Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et on considère :

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On appelle mineur *du coefficient a_{ij} (noté Δ_{ij}), le déterminant d'ordre $n-1$ extrait de* $\det(A)$ *en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne.*

Définition 4.16 (Cofacteur d'un coefficient)**.** *Soient A et Δ de la définition 4.15. On appelle* cofacteur *du coefficient a_{ij},*

$$X_{ij} = (-1)^{ij}\Delta_{ij}.$$

Proposition 4.17 (Développement selon une ligne)**.** *Soit :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Alors :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij} \tag{4.1}$$

est le développement de Δ par rapport à la i^e ligne.

Proposition 4.18 (Développement selon une colonne)**.** *Soit :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Alors :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}X_{ij} \tag{4.2}$$

est le développement de Δ par rapport à la j^e colonne.

Théorème 4.19. *Les égalités (4.1) et (4.2) sont valables pour tout $1 \leq i \leq n$ (pour (4.1)) et $1 \leq j \leq n$ (pour (4.2)).*

Exemple 4.20. Pour calculer la matrice ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

nous pourrions calculer le déterminant grâce à la règle de Sarrus (développée à la section précédente). Nous allons utiliser la *méthode des cofacteurs* pour calculer le déterminant de A. On remarque que si nous faisons $L_1 \leftarrow L_1 - (L_2 + L_3)$, on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant n'est pas changé (voir les propriétés 4.8). Il suffit maintenant de développer selon la première ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 1) = 3.$$

4.3 Applications

4.3.1 Interprétation géométrique

Proposition 4.21 (Déterminant et volume)**.** *Soient $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On considère S le parallélépipède déterminé par :*

$$S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n u_n,\ \alpha_i \in [0\,,1] \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}.$$

Si $V(S)$ est le volume de S (ou surface si $n = 2$) alors :

$$V(S) = |\det(v_1, \ldots, v_n)|.$$

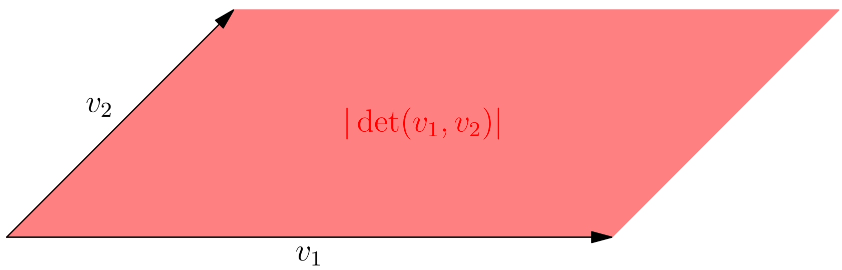


FIGURE 4.1 – Déterminant et aire d'un parrallélogramme

4.3.2 Indépendance linéaire

Proposition 4.22 (Déterminant et indépendance linéaire)**.** *Soit V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On considère $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs dans V. $(v_1, \ldots, v_n)$ sont linéairement indépendants si et seulement si* $\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

Remarque 4.23. On considère les données de la proposition 4.22. D'après la proposition 3.24-(ii), on a aussi « $(v_1, \dots, v_n)$ est une base si et seulement si $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ ».

Exemple 4.24. On souhait étudier l'indépendance linéaire des vecteurs de $\mathbf{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on compose la matrice $M_{(e_1,e_2,e_3,e_4)}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ telle que (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de $\mathbf{R}^4$

$$A = M_{(e_1,e_2,e_3,e_4)}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant le déterminant de A. Pour cela, on remarque que si on fait $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient à la première colonne, une colonne avec un 1 en première ligne et que des 0 ensuite :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut ensuite développer selon la dernière ligne du dernier déterminant :

$$\det(A) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2(6 \times 2 - 0 \times 4) = -24.$$

D'où (v_1, v_2, v_3, v_4) sont linéairement indépendants.

4.3.3 Déterminant et inverse d'une matrice

Théorème 4.25 (Critère d'inversibilité)**.** *Soient V et W deux $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n munis respectivement de la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. On considère $f \colon V \to W$ une application linéaire et $M = M_{(\mathscr{B},\mathscr{B}')}(f)$. f est un isomorphisme (ce qui est équivalent à dire que M est inversible) si et seulement si* $\det(M) \neq 0$.

Définition 4.26 (Matrice adjointe, co-matrice)**.** *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle* matrice adjointee *A (ou* co-matrice *de A) la matrice des cofacteurs X_{ij} des éléments a_{ij} de A (qu'on noté* $\operatorname{adj}(A)$ *ou* $\operatorname{com}(A)$*).*

Exemple 4.27. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice adjointe de A est :

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.28. *Soit A une matrice carrée d'ordre n et inversible (donc $\det(A) \neq 0$). On a alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\operatorname{adj}(A))^T.$$

Exemple 4.29 (Cas d'une matrice carrée d'ordre 2)**.** Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} c & -d \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix} = \frac{1}{(ac - bd)} \begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}.$$

4.3.4 Système de Cramer

Soit le système d'équation linéaires carré suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.3}$$

où les coefficients $a_{ij} \in \mathbf{K}$ et $b_i \in \mathbf{K}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$. On rappelle que si :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

(4.3) se réécrit $AX = B$.

Proposition 4.30. *On considère le système d'équations linéaires* (4.3). (4.3) *admet une unique solution si et seulement si* $\det(A) = 0$.

Définition 4.31 (Système de Cramer)**.** *On dit que le système d'équations linéaires carré* (4.3) *est de* Cramer *si* $\det(A) \neq 0$.

Proposition 4.32. *Pour* $1 \leq i \leq n$*, on définit* A_i *la matrice obtenue en remplaçant dans* A*, la* i^e *colonne par le vecteur* B*. Les solutions d'un système de Cramer s'écrivent alors :*

$$x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(M)}, \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Exemple 4.33. On veut résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} 2x & - & 3y & + & z & = 1 \\ x & + & y & - & z & = 0 \\ 3x & + & y & + & z & = 1 \end{array}\right. \tag{4.4}$$

On obtient alors :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $\det(A) = 14 \neq 0$ donc A est inversible et (4.4) est de Cramer. Les solutions sont donc :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{14},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{7}.$$

4.4 Exercices

Exercice 4.1. On dit qu'une matrice A est *nilpotente* s'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $A^m = 0$. Calculer le déterminant d'une matrice A nilpotente.

Exercice 4.2. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.3. Calculer, grâce à la règle de Sarrus, le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.4. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 26 & 13 & 6 & 6 \\ 13 & 7 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 102 & 51 & 26 & 12 & 12 \\ 51 & 26 & 13 & 6 & 6 \\ 26 & 13 & 7 & 3 & 3 \\ 12 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et comparer le résultat avec A de l'exemple précédent.

Exercice 4.5. Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -6 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ b & 0 & -b \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \ a, b \in \mathbf{R}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.6. Étudier l'indépendancce linéaire des familles de vecteurs :

1. $\{(1, 7, 3), (4, 9, 2), (6, 8, 1)\}$,
2. $\{(2, 3, -3, 1), (-1, 4, -1, 0), (1, -6, -3, 2), (1, 1, 3, 2)\}$.

Exercice 4.7. Calculer la matrice adjointes des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.8. 1. Dire si les deux matrices suivantes sont inversibles ou non :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Si oui, calculer la matrice inverse.
3. Déterminer le rang de A et de B.

Exercice 4.9. Vérifier si les systèmes suivants sont des systèmes de Cramer et les résoudre, par la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x - y + z = 5 \\ x + y - 2z = 6 \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_1)$$

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda + 1 \\ x + y + \lambda z = 3 \end{cases}. \qquad (\mathscr{S}_2)$$

Bibliographie

[1] J.-P. Marco, L. Lazzarini, *Mathématiques L1*, Pearson Education.

[2] J. Pichon, *Algèbre linéaire*, Ellipses.

[3] R. Dupont, *Algèbre linéaire, 117 exercices corrigés*, Nickel, Vuibert Superieur.

[4] J.-C. Savioz, *Algèbre linéaire, cours et exercices*, Vuibert.

[5] F. Cottet-Enard, *Algèbre linéaire et bilinéaire*, de boeck.

[6] F. Bories-Longuet, *Algèbre linéaire*, Ellipses.

[7] C. Boulonne, *Notes de Cours M101 : Fondements de l'algèbre*, L1 Mathématiques, Semestre 1 (2006–2007).

[8] C. Boulonne, *Notes de Cours M102 : Fondements de l'analyse 1*, L1 Mathématiques, Semestre 1 (2006–2007).

[9] C. Bertault, *Introduction à l'algèbre linéaire*, URL : `http://bkristof.free.fr/`.

[10] J.-F. Grosjean, *Chapitre 1 : Espaces vectoriels*, 2008–2009, URL : `http://www.iecn.u-nancy.fr/~grosjean/Enseignement.html`.

[11] J.-F. Grosjean, *Chapitre 2 : Applications linéaires*, 2008–2009.

[12] J.-F. Grosjean, *Chapitre 3 : Matrices*, 2008–2009.

[13] J.-F. Grosjean, *Chapitre 4 : Matrices et applications linéaires*, 2008–2009.

[14] J.-F. Grosjean, *Chapitre 5 : Déterminants*, 2008–2009.

Index