

Notes de Cours
M201 : ALGÈBRE LINÉAIRE ET AFFINE 2

Clément BOULONNE

Web : <http://clementboulonne.new.fr>

Mail : clement.boulonne@gmail.com

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R de Mathématiques Pures et Appliquées
Licence de Mathématiques — Semestre 3

Table des matières

Chapitre I	Déterminants	1
I.1	Formes multilinéaires alternés	1
I.2	Permutations	2
I.3	Déterminants	4
1	Définitions et propriétés	4
2	Déterminant d'une matrice carrée	7
3	Déterminant d'un endomorphisme	9
I.4	Méthodes de calcul de déterminants	11
1	Développement par blocs	11
2	Développement selon une ligne et une colonne	13
I.5	Rang	15
I.6	Exercices	18
Chapitre II	Réduction d'endomorphismes	23
II.1	Valeurs et vecteurs propres	23
II.2	Polynôme caractéristique	25
II.3	Endomorphismes diagonalisables	26
II.4	Trigonalisation	29
II.5	Sous-espaces stables	30
II.6	Théorème de Cayley-Hamilton	32
II.7	Polynôme minimal	33
II.8	Décomposition de Dunford	36
1	Préliminaires	36
2	Théorème de décomposition de Dunford	38
3	Exemples	40
4	Application à la trigonalisation	41
II.9	Exercices	43
Chapitre III	Systèmes différentielles linéaires	47
III.1	Introduction	47
III.2	Exponentielle de matrice	47
III.3	Systèmes différentielles linéaires	49
1	Résolution des systèmes homogènes	50

2	Cas général, variation de la constante	54
3	Application aux équations différentielles d'ordre n	55
III.4	Exemples en dimension 2	55
1	Systèmes homogènes	55
2	Équations différentielles du second ordre	56
III.5	Études d'exemples	57
III.6	Exercices	62

PROGRAMME DU COURS

M201 : **Algèbre linéaire et affine 2** [S3, 5 ECTS]

Prérequis : M104

- (16 h) Déterminants. Définition via les applications multilinéaires alternées ; déterminant d'un système de n vecteurs en dimension n , d'une application linéaire, d'une matrice carrée. Propriétés et méthodes de calcul. Rang.
- (22 h) Réduction des endomorphismes. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme. Diagonalisation, trigonalisation. Cayley-Hamilton. Décomposition de Dunford (somme diagonale plus nilpotent qui commutent).
- (12 h) Applications aux systèmes différentiels linéaires.

CHAPITRE I

DÉTERMINANTS

I.1 Formes multilinéaires alternés

Définition I.1 (Application multilinéaire). Soient E et F deux \mathbf{R} -espaces vectoriels de dimension n . On considère $(E_i)_{i \in I}$ une famille de \mathbf{R} -espaces vectoriels. Une application :

$$\begin{aligned} \varphi & : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \rightarrow F \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

est dite multilinéaire si, en tout points, les p applications partielles sont linéaires (on dit que φ est linéaire par rapport à chacune des variables).

Soit un indice i compris entre 1 et p . On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_i & : E_i \rightarrow F \\ x & \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

où x est la variable et les x_k (pour $k \neq i$ compris entre 1 et p) sont fixés. On dit que φ est une application multilinéaire si, pour tout $1 \leq i \leq p$, les φ_i sont linéaires.

Définition I.2 (Application linéaire). On dit que les φ_i sont des applications linéaires si pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et $x, y \in E_i$, on a :

$$\varphi_i(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi_i(x) + \mu \varphi_i(y).$$

Définition I.3 (Forme). Dans la définition [I.1](#), si $F = \mathbf{R}$ alors on dit que φ est une forme p -linéaire. Si $p = 1$ (resp. $p = 2$), on dit que φ est une forme linéaire (resp. forme bilinéaire).

Exemple I.4. Soient $E = \mathbf{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$. L'application :

$$\varphi(a, b) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

est une application bilinéaire. C'est en fait :

$$\varphi(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Définition I.5 (Forme multilinéaire alternée). Une forme p -linéaire sur E (tous les E_i sont égaux à E) :

$$\begin{aligned} \varphi & : E \times \cdots \times E \rightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

est dite alternée si $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0$ chaque fois que deux vecteurs parmi x_i sont égaux (avec $1 \leq i \leq p$).

Propriété I.6. Soit φ une forme p -linéaire alternée sur E , on ne change pas la valeur de $\varphi(x_1, \dots, x_p)$ en ajoutant à un des vecteurs x_i une combinaison linéaire des autres.

Exemple I.7. On considère les données de l'exemple I.4. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(a, b + \lambda a) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + \lambda a_1 \\ a_2 & b_2 + \lambda a_2 \end{vmatrix} = a_1(b_2 + \lambda a_2) - a_2(b_1 + \lambda a_2) \\ &= a_1 b_1 + \lambda a_1 a_2 - a_2 b_1 - \lambda a_1 a_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \varphi(a, b). \end{aligned}$$

Démonstration de la propriété I.6. On considère x_1, \dots, x_p des vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des scalaires de \mathbf{R} . On calcule :

$$\begin{aligned} & \varphi \left(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n \lambda_k x_k, x_{i+1}, \dots, x_p \right) \\ &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p) = \varphi \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \sum_{k=1, k \neq i}^n \lambda_k x_k, x_{i+1}, \dots, x_p \right) \\ & \stackrel{\varphi \text{ alternée}}{=} \varphi(x_1, \dots, x_p) + \sum_{k=1, k \neq i}^n \lambda_k \underbrace{\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_k, x_{i+1}, \dots, x_p)}_{=0} \end{aligned}$$

□

Conséquence I.8. $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0$ si et seulement si les vecteurs x_1, \dots, x_p sont linéairement dépendants.

On rappelle la définition de vecteurs linéairement dépendants.

Définition I.9 (Vecteurs linéairement dépendants). On dit que x_1, \dots, x_n sont linéairement dépendants si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p \neq 0$ tels que :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0.$$

I.2 Permutations

Définition I.10 (Groupe de permutations). Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On appelle groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$ noté \mathcal{S}_n (ou Σ_n), le groupe des bijections de $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ et on a $\text{card}(\mathcal{S}_n) = n!$.

On note σ la permutation de \mathcal{S}_n par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Exemple I.11. Si $n = 2$ alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \{\sigma, \sigma: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}\} \\ &= \left\{ \text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Il y a 2 permutations dans \mathcal{S}_2 .

Définition I.12 (Transposition). *On appelle transposition sur i et j , la permutation qui échange i et j et fixe les autres $1 \leq p \leq n$ tels que $p \neq i$ et $p \neq j$.*

On note $\tau_{i,j}$ la transposition sur i et j par :

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Théorème I.13. *Toute permutation se décompose en produit de transpositions (produit au sens de composition). Le produit n'est pas unique mais, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ fixé, la parité du nombre de transpositions dans la décomposition de σ est fixé.*

Définition I.14 (Signature). *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle signature notée $\varepsilon(\sigma)$ le nombre appartenant à $\{-1, 1\}$ définie par :*

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sigma(i) - \sigma(j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} i - j}$$

Propriété I.15. *Soient σ et σ' deux permutations dans \mathcal{S}_n . Alors :*

$$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma').$$

Proposition I.16. *Soit φ une forme p -linéaire sur E . φ est alternée si et seulement si, pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on a :*

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) \times \varphi(x_1, \dots, x_p).$$

Exemple I.17. On considère φ de l'exemple I.4, c'est-à-dire $\varphi(a, b) = a_1 - a_2b_1$. On a :

$$\varphi(b, a) = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - b_2a_1 = -\varphi(a, b).$$

Proposition I.18. *Soit φ une forme p -linéaire sur E . φ est alternée si et seulement si, pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_p$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$:*

$$\varphi(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(p)}) = -\varphi(x_1, \dots, x_p).$$

Démonstration. (\Rightarrow) On suppose que φ est alternée et on considère deux indices distincts i et k compris entre 1 et p . On note τ_{ik} la transposition qui échange i et k (c'est-à-dire $\tau_{ik}(i) = k$, $\tau_{ik}(k) = i$ et pour tout $1 \leq h \leq p$ différent de i et k , $\tau_{ik}(h) = h$). On a :

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, \underbrace{x_i + x_k}_{i^{\text{e}} \text{ place}}, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, \underbrace{x_k + x_i}_{k^{\text{e}} \text{ place}}, x_{k+1}, \dots, x_p) = 0 \\ & = \varphi(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i^{\text{e}} \text{ place}}, \dots, \underbrace{x_k}_{k^{\text{e}} \text{ place}}, \dots, x_p) + \varphi(x_1, \dots, \underbrace{x_k}_{i^{\text{e}} \text{ place}}, \dots, \underbrace{x_i}_{k^{\text{e}} \text{ place}}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$0 = \varphi(x_1, \dots, x_p) + \varphi(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(k)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_p),$$

d'où le résultat.

(\Leftarrow) On suppose que toute transposition τ , on a :

$$\varphi(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = -\varphi(x_1, \dots, x_p)$$

et on démontre que φ est alternée, c'est-à-dire qu'elle s'annule à chaque fois que deux vecteurs du p -uplet (x_1, \dots, x_p) sont égaux. Soient $1 \leq i < k \leq p$ et on suppose que $x_i = x_k$. On démontre que $\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_p) = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) &= -\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_p) \\ &= \varphi(x_1, \dots, \underbrace{x_k}_{i^{\text{e}} \text{ place}}, \dots, \underbrace{x_i}_{k^{\text{e}} \text{ place}}, \dots, x_p) \\ &= \varphi(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{=x_k}, \dots, \underbrace{x_k}_{=x_i}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

d'où le résultat : $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0$ et $x_i = x_k$. □

I.3 Déterminants

1 Définitions et propriétés

Théorème I.19. *Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n . L'ensemble des formes n -linéaires alternés sur E est un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension 1. De plus, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors il existe une unique forme n -linéaire alternée Δ telle que $\Delta(e_1, \dots, e_n) = 1$.*

Démonstration. On se fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et on considère des vecteurs

$$x_1, \dots, x_n \in E.$$

Pour $1 \leq j \leq n$, on note $(x_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de x_j dans la base \mathcal{B} . On a alors :

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} e_i = x_{1j} e_1 + \dots + x_{nj} e_n.$$

On considère une forme n -linéaire alternée φ .

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n x_{i1} e_1, \sum_{i=1}^n x_{i2} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n x_{in} e_i \right).$$

En utilisant la linéarité de φ par rapport à chaque variable et le fait que φ soit alternée, on obtient :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

D'après la proposition I.16, c'est une somme sur toutes les permutations de \mathcal{S}_n . On a donc :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

$\varphi(e_1, \dots, e_n)$ est une constante qui ne dépend pas des vecteurs (x_1, \dots, x_n) . On note

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}.$$

On doit montrer que $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ est une application multilinéaire alternée. Qu'elle soit multilinéaire est évident, on montre donc que cette application est alternée. Soient (x_1, \dots, x_n) des vecteurs de E et \mathcal{A}_n le groupe alternée tel que :

$$\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

On se fixe i et k des indices compris entre 1 et n et on suppose que $x_i = x_k$. On montre alors que $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \notin \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \notin \mathcal{A}_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}. \end{aligned}$$

On considère la transposition qui échange i et k :

$$\begin{aligned} \tau &: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma &\mapsto \sigma \circ \tau \end{aligned}$$

On a alors (du fait que $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (x_1, \dots, x_n)$ car $x_i = x_k$) :

$$\sigma \circ \tau = \sigma' \circ \tau \Leftrightarrow \sigma \circ \tau \circ \tau^{-1} = \sigma' \circ \tau \circ \tau^{-1} \Leftrightarrow \sigma = \sigma',$$

d'où l'injectivité .

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \notin \mathcal{A}_n} x_{\sigma \circ \tau(1)1} \cdots x_{\sigma \circ \tau(n)n}.$$

Or, pour tout j tel que $j \neq i$ et $j \neq k$, $\tau(j) = j$, $\tau(i) = k$ et $\tau(k) = i$. On a suppose de plus que $x_i = x_k$ donc, pour tout $1 \leq h \leq n$, $x_{ih} = x_{hk}$. D'où :

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} = 0$$

□

Définition I.20 (Déterminant d'un système de vecteurs). *Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Le déterminant des vecteurs $x_1, \dots, x_n \in E$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la forme multilinéaire alternée définie par :*

$$\det_{\mathcal{B}} = \Delta_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}$$

où $(x_{\sigma(1)1}, \dots, x_{\sigma(n)n})$ sont les coordonnées de (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} .

Théorème I.21. *Soient (x_1, \dots, x_n) des vecteurs de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) les vecteurs x_1, \dots, x_n sont linéairement indépendants,
- (ii) pour toute base \mathcal{B} de E , $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$,
- (iii) il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle on a $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration. ((i) \Rightarrow (ii)) On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0.$$

D'où :

$$x_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} x_n = \sum_{j=0}^n \beta_j x_j.$$

Or :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}} \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \sum_{j=0, j \neq i}^n \beta_j x_j, \dots, x_n \right) \\ &= \sum_{j=0, j \neq i}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

car $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme multilinéaire.

((ii) \Rightarrow (iii)) évident.

((iii) \Rightarrow (i)) Soit \mathcal{B} une base de E tel que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$. Si φ est une forme multilinéaire alternée :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Donc, pour toute forme multilinéaire alternée, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$. Si les vecteurs (x_1, \dots, x_n) étaient linéairement indépendant, ils formeraient une base et il existerait une forme alternée prenant la valeur 1 sur cette base : ce qui est contradictoire. \square

Définition I.22 (Déterminant dans une autre base). *Si \mathcal{B}' est une autre base de E et si $\varphi = \det_{\mathcal{B}'}$ alors :*

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) &= \varphi(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \varphi(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Définitions I.23 (Matrice carrée et déterminant). *Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est un tableau de valeurs de la forme suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On note l'ensemble des matrices carrées de dimension $n \times n$ et à valeurs dans \mathbf{R} , $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Le déterminant $\det A$ est égal au déterminant des vecteurs colonnes de A :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Propriétés I.24. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Alors :*

1. $\det(A^T) = \det(A)$,
2. $\det A$ dépend linéairement des colonnes ou des lignes de A ,
3. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
4. $\det(A) \neq 0$ si et seulement A est inversible,
5. $\det(AB) = \det A \times \det B$,
6. si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Démonstration. 1. Soient :

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ \det(A^T) &= \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\rho) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$:

$$\det(A^T) = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)\rho \circ \sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)\rho \circ \sigma(n)}.$$

Soit $\rho \in \mathcal{S}_n$, on pose $\sigma \circ \rho^{-1}$, le produit $a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}$ est égal à $a_{\rho^{-1}(1)1} \cdots a_{\rho^{-1}(n)n}$.
Donc :

$$\det(A^T) = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\rho) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} a_{\rho^{-1}(1)1} \cdots a_{\rho^{-1}(n)n}.$$

Or l'application $\rho \mapsto \rho^{-1}$ est bijective et $\varepsilon(\rho\rho^{-1}) = \varepsilon(\rho)\varepsilon(\rho^{-1}) = 1$, d'où :

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et :

$$c_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i.$$

On a alors,

$$\det_A = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_n),$$

d'où la linéarité par rapport à chaque colonne.

3. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On veut montrer que $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. On a :

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) &= \det_{\mathcal{B}}(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n) \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_n) \quad (\text{par multilinéarité du déterminant}) \\ &= \lambda^n \det(A).\end{aligned}$$

4. Si $\det A \neq 0$ alors les vecteurs c_1, \dots, c_n linéairement indépendants, cela veut dire que (c_1, \dots, c_n) est une base de E . D'où A est inversible car A est la matrice des vecteurs (c_1, \dots, c_n) dans la base de (e_1, \dots, e_n) et A^{-1} est la matrice exprimant les vecteurs (e_1, \dots, e_n) dans la base (c_1, \dots, c_n) .

5. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On définit :

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

telle que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \det C &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\sum_{k=1}^n a_{\sigma(1)k} \cdots b_{k1} \right) \times \cdots \times \left(\sum_{k=1}^n a_{\sigma(n)k} b_{kn} \right) \\ &= \cdots \\ &= \det A \times \det B. \end{aligned}$$

6. Si A est inversible alors $\det A \neq 0$. On a :

$$\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

D'où $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

□

3 Déterminant d'un endomorphisme

On rappelle la définition d'une application linéaire.

Définition I.25 (Application linéaire). *Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel. Une application φ définie sur E est dite linéaire si, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ et $(x_1, x_2) \in E^2$, :*

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2).$$

Définitions I.26 (Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes). Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel.

- Les applications linéaires de E dans E sont appelées endomorphismes noté $\mathcal{L}(E)$.
- Les application linéaires bijectives sont appelées des isomorphismes.
- Les endomorphismes bijectives sont les automorphismes noté $\text{GL}(E)$.

Proposition I.27. Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} . On note

$$\det u := \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E , P la matrice de coordonnées des vecteurs (e'_1, \dots, e'_n) dans la base \mathcal{B} et P^{-1} la matrice des coordonnées des vecteurs (e_1, \dots, e_n) dans la base \mathcal{B}' . On considère A la matrice de l'endomorphisme dans la base \mathcal{B} et A' la matrice de l'endomorphisme de la base \mathcal{B}' . On a alors $A' = PAP^{-1}$. D'où :

$$\det A' = \det(P^{-1}AP) = (\det(P^{-1}))(\det A)(\det P) = (\det P)^{-1}(\det A)(\det P) = \det A. \quad (\text{I.1})$$

□

Remarque I.28. Attention ! Dans l'égalité (I.1), $PAP^{-1} \neq A$ car le produit de matrices n'est pas commutatif.

Proposition I.29. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et pour toute forme n -linéaire alternée φ , on a :

$$\varphi(u(x_1), \dots, u(x_n)) = (\det u)\varphi(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{I.2})$$

avec $u \in \mathcal{L}(E)$.

Démonstration. 1. Si les vecteurs (x_1, \dots, x_n) sont linéairement dépendants alors les vecteurs $(u(x_1), \dots, u(x_n))$ sont également dépendants. On a alors :

$$(\text{I.2}) \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ vraie.}$$

2. Si les vecteurs (x_1, \dots, x_n) sont linéairement indépendants (donc forment une base de E) et $u(x_1), \dots, u(x_n)$ sont linéairement indépendants, par définition, alors :

$$\det u = \det_{(x_1, \dots, x_n)}(u(x_1), \dots, u(x_n)).$$

On a encore l'égalité.

3. Si les vecteurs (x_1, \dots, x_n) et $(u(x_1), \dots, u(x_n))$ sont linéairement indépendants alors si on note Δ la forme n -linéaire alternée qui vérifie $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 1$ alors pour tout φ forme n -linéaire alternée :

$$\varphi(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \underbrace{\Delta(u(x_1), \dots, u(x_n))}_{\det_{(x_1, \dots, x_n)} u(x_1, \dots, x_n) = \det u} \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

□

Proposition I.30. Soient u et v deux endomorphismes de E .

- (i) $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$,
- (ii) $\det(\text{id}_E) = 1$,
- (iii) si $u \in \text{GL}(E)$ alors $\det u \neq 0$ et $\det u^{-1} = (\det u)^{-1}$.

Démonstration. (i) Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(u \circ v(x_1), \dots, u \circ v(x_n)) &= \det(u \circ v) \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \det u \cdot \underbrace{\varphi(v(x_1), \dots, v(x_n))}_{\det v \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n)} = \det u \det v \varphi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\det(\text{id} \circ u) = \det \text{id} \times \det u = \det u,$$

ce qui implique que $\det \text{id}_E = 1$.

(iii) On a :

$$\det u \circ u^{-1} = \det \text{id} = 1 = \det u \times \det u',$$

ce qui implique que $(\det u^{-1}) = (\det u)^{-1}$.

□

I.4 Méthodes de calcul de déterminants

1 Développement par blocs

Définition I.31. Soit A la matrice de la famille de vecteurs (c_1, \dots, c_n) . On a alors :

$$\det A = \det(c_1, \dots, c_n) = \det \left(c_1, \dots, c_{k-1}, \sum_{i=1, i \neq k}^n \lambda_i c_i, c_{k+1}, \dots, c_n \right).$$

Théorème I.32 (Développement par blocs). Soit M une matrice carrée d'ordre n de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

où

- A est une matrice de dimension $p \times p$,
- C est une matrice de dimension $n - p \times p$,
- O est une matrice nulle de dimension $p \times n - p$ (c'est-à-dire que tous les coefficients de la matrice sont nuls),
- B est une matrice de dimension $n - p \times n - p$.

On a alors :

$$\det M = \det A \cdot \det B.$$

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E , $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E' et $\mathcal{B}'' = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E'' . On a donc : $E = E' \oplus E''$. Soit la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & c_{p1} & \cdots & c_{pn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{p+1,p+1} & \cdots & b_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{p+1,n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

On considère l'application :

$$f : \begin{array}{l} (E')^p \rightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p, c_{p+1} + b_{p+1}, \dots, x_n + b_n) \end{array}$$

qui est une forme p -linéaire altérée. On a donc, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E'^p$:

$$f(x_1, \dots, x_p) = f(e_1, \dots, e_p) \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_p).$$

Or :

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_p) &= \det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_p, b_{p+1} + c_{p+1}, \dots, b_n + c_n) \\ f(e_1, \dots, e_p) \times \det_{\mathcal{B}'}(a_1, \dots, a_p) & \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

et :

$$\begin{aligned} f(e_1, \dots, e_p) &= \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p, b_{p+1} + c_{p+1}, \dots, b_n + c_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p, b_{p+1}, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Alors :

$$(\text{I.3}) = \det_{\mathbf{B}}(e_1, \dots, e_p, b_{p+1}, \dots, b_n) \times \det A. \quad (\text{I.4})$$

On pose :

$$g : \begin{array}{l} (E'')^q \rightarrow \mathbf{R} \\ (x_{p+1}, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p, x_{p+1}, \dots, x_n) \end{array} \quad \text{avec } q = n - p.$$

On remarque que $g(b_{p+1}, \dots, b_n) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p, b_{p+1}, \dots, b_n) = f(e_1, \dots, e_p)$ et g est une forme q -linéaire alternée sur E'' (de dimension q). Donc :

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= g(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}'}(x_{p+1}, \dots, x_n) \\ g(b_{p+1}, \dots, b_n) &= g(e_1, \dots, e_n) \underbrace{\det_{\mathcal{B}''}(b_{p+1}, \dots, b_n)}_{\det \mathcal{B}} \\ g(e_{p+1}, \dots, e_n) &= \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n) = 1. \end{aligned}$$

D'où :

$$(\text{I.4}) = \det B \times \det A.$$

□

2 Développement selon une ligne et une colonne

Définitions I.33 (Mineur et cofacteur d'un élément). Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. On appelle mineur de l'élément a_{ij} , le déterminant Δ_{ij} de la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne. Le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij} .

Théorème I.34. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times n$ et $(A_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ la matrice des cofacteurs. Alors, pour tout i, j , on a :

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}.$$

Démonstration. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et des vecteurs colonnes :

$$a_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k.$$

On se fixe un indice j compris entre 1 et n . On a :

$$\begin{aligned} \det A &= \det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n) = \det_{\mathcal{B}} \left(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k, a_{j+1}, \dots, a_n \right) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{kj} \det_{\mathcal{B}} \underbrace{(a_1, \dots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, a_n)}_{:=D_{kj}}. \end{aligned}$$

Or :

$$D_{kj} = (-1)^{j-1} \det_{\mathcal{B}}(e_k, a_1, \dots, a_{j-1}, \dots, a_n). \quad (\text{I.5})$$

Soit $\mathcal{B}' = (e_k, e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n)$ alors on a, pour tout (u_1, \dots, u_n) ,

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \underbrace{\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}}_{(-1)^{k-1}} \cdot \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

Alors :

$$(\text{I.5}) = (-1)^{j-1} (-1)^{k-1} \det_{\mathcal{B}'}(e_k, a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) \quad (\text{I.6})$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{kj} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

et

$$(\text{I.6}) = (-1)^{j+k} \det M_{kj} = A_{kj}.$$

□

Exemple I.35. On veut calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Pour cela, on va développer le déterminant selon la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 \times 4.$$

Définition I.36 (Matrice des cofacteurs). Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n . Alors $\tilde{A} = (A_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est appelé la matrice des cofacteurs ou comatrice.

Proposition I.37. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On a :

$$\tilde{A}^T A = A \tilde{A}^T = \det(A) I_n.$$

Corollaire I.38. Si $\det A \neq 0$ alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T.$$

Démonstration. On note :

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk},$$

c'est-à-dire γ_{ij} sont les coefficients de la matrice $A \tilde{A}^T$. Soit M la matrice obtenue en remplaçant la j^{e} ligne de A par une ligne quelconque β_1, \dots, β_n . On a alors, en développant par rapport à la j^{e} ligne :

$$\det M = \sum_{k=1}^n \beta_k A_{jk}.$$

Pour $l \neq j$,

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} A_{jk} = \delta_{ij} \det A.$$

Ce qui prouve que les coefficients de la matrice $A \tilde{A}^T$ sont égaux à :

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ij} A_{jk} = \delta_{ij} \det A,$$

d'où :

$$A \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \det(A) I_n.$$

□

I.5 Rang

Définition I.39 (Rang). Soient E et F deux \mathbf{R} -espaces vectoriels.

1. Soit $u: E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de u (noté $\text{rg } u$), la dimension de l'image de u . On rappelle que l'image de u est le sous-espace vectoriel de F :

$$\text{Im } u = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = u(x)\}$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. On appelle rang de la matrice A (noté $\text{rg } A$), la dimension du sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension n engendré par les colonnes de A .
3. Soit (x_1, \dots, x_p) des vecteurs d'un espace vectoriel E . On appelle rang du système (x_1, \dots, x_p) , noté $\text{rg}(x_1, \dots, x_p)$, la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par (x_1, \dots, x_p) ou le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants (x_1, \dots, x_p) .

Définition I.40 (Matrice d'une application linéaire). Soient E et F deux \mathbf{R} -espaces vectoriels munies respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ et $u: E \rightarrow F$. La matrice de u est la matrice :

$$M_u = \left(\begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} \right)_{(f_1, \dots, f_p)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

D'où $u(e_i) = \sum_{k=1}^p a_{ki} f_k$.

Proposition I.41. Soit A une matrice de dimension $n \times p$ à coefficients dans \mathbf{R} .

1. Si $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ (c'est-à-dire P est une matrice carrée $n \times n$ inversible) alors $\text{rg } PA = \text{rg } A$.
2. Si $Q \in \text{GL}_p(\mathbf{R})$ alors $\text{rg } AQ = \text{rg } A$.

Démonstration. Soient :

$$f : \quad \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^n$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$$

et :

$$g : \quad \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^n$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto PAX$$

Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{rg} PA = \operatorname{rg} g = \dim \operatorname{Im} g$. Or P est supposé inversible donc :

$$\operatorname{Ker} g = \{X, PAX = 0\} = \{X, AX = 0\} = \operatorname{Ker} f.$$

et $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = p$ et $\dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Ker} g = p$. On note a_i la i^{e} colonne de A . On a alors :

$$AX = x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p = \langle a_1, \dots, a_p \rangle.$$

Soit Q une matrice inversible et X_i la i^{e} vecteur colonne de Q . Les vecteurs $AX_i \in \langle a_1, \dots, a_p \rangle$ donc les vecteurs colonnes de AQ appartiennent au même sous-espace vectoriel $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$. D'où $\operatorname{rg} AQ \leq \operatorname{rg} A$. On a, de plus, $A = (AQ)Q^{-1}$, ainsi, pour les mêmes raisons, les vecteurs colonnes de la matrice A sont dans l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de la matrice AQ . D'où $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} AQ$ et on obtient donc l'égalité. \square

Théorème I.42. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et r un entier tel que $1 \leq r \leq \min(p, n)$. On note J_r la matrice suivante :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

où O sont des matrices nulles qui complètent les lignes et colonnes de la matrice J_r . On a $\operatorname{rg} A = r$ si et seulement s'il existe $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbf{R})$ et $Q \in \operatorname{GL}_p(\mathbf{R})$ telles que $PAQ = J_r$.

Démonstration. On définit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ (resp. base de \mathbf{R}^p et de \mathbf{R}^n) et A , la matrice d'un endomorphisme u .

(\Leftarrow) Il est clair que $\operatorname{rg} I_r = r$ donc si $PAQ = J_r$, avec P et Q inversible, on a

$$\operatorname{rg} PAQ = \operatorname{rg} AQ = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_r = r.$$

(\Rightarrow) Supposons que $\operatorname{rg} A = r$. Or $\operatorname{rg} A = r = \dim \operatorname{Im} u$. D'après le théorème du rang¹, $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = p$. On considère une base de \mathbf{R}^p dont les $p-r$ premiers vecteurs forment une base de $\operatorname{Ker} u$, c'est-à-dire $x_{r+1}, \dots, x_p \in \operatorname{Ker} u$. Pour $1 \leq i \leq r$, on pose $y_i = u(x_i)$. Or

$$\operatorname{Im} u = \langle u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_r), u(x_{r+1}), \dots, u(x_p) \rangle$$

avec $u(x_{r+1}), \dots, u(x_p)$ sont tous nuls. On note

$$(y_1, y_2, \dots, y_r) := (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_r)).$$

On complète $(y, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_n)$ de \mathbf{R}^n :

$$J_r = \begin{pmatrix} u(x_1) & \cdots & u(x_r) & u(x_{r+1}) & \cdots & u(x_n) \\ \hline & & & & & \end{pmatrix}_{y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_n}$$

1. $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^p .

On a alors :

$$J_r = (u(x_1), \dots, u(x_p))_{(y_1, \dots, y_n)} = (f_1, \dots, f_n)_{(y_1, \dots, y_n)} \times (u(e_1), \dots, u(e_p))_{(f_1, \dots, f_n)} \\ \times (x_1, \dots, x_r)_{(e_1, \dots, e_p)},$$

c'est-à-dire $PAQ = J_r$.

□

Corollaire I.43. *Le rang de la matrice A est égale au rang de sa matrice transposée.*

Définition I.44 (Matrices équivalentes). *Soient A et B deux matrices de dimension $n \times p$ à coefficients dans \mathbf{R} . On dit qu'elles sont équivalentes s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ et $Q \in \text{GL}_p(\mathbf{R})$ tels que*

$$B = PAQ.$$

Théorème I.45. *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Démonstration du théorème I.45. (\Rightarrow) Soit A et B deux matrices équivalentes. Donc il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ et $Q \in \text{GL}_p(\mathbf{R})$ tels que $B = PAQ$. D'après la proposition I.41, $\text{rg } B = \text{rg } A$ car P et Q sont inversibles.

(\Leftarrow) Soit A et B deux matrices tels que $\text{rg } A = \text{rg } B = r$. D'après le théorème I.42, les matrices A et J_r et B et J_r sont équivalentes, d'où les matrices A et B sont équivalentes.

□

Définition I.46 (Matrice extraite). *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Une matrice extraite $B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbf{R})$ avec $r \leq n$ et $q \leq p$ est une matrice dont les éléments de B appartiennent à la matrice A .*

Théorème I.47. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et r un entier compris 1 et $\min(p, n)$. Le rang de A est inférieur ou égal à r si et seulement s'il existe une matrice carrée d'ordre r inversible extraite de A .*

Démonstration. (\Rightarrow) On suppose que $\text{rg } A \geq r$. On note c_1, \dots, c_p les vecteurs colonnes de A . On a donc c_1, \dots, c_r sont linéairement indépendants. On complète pour obtenir une base de \mathbf{R}^p $c_1, \dots, c_r, e'_{r+1}, \dots, e'_p$. On a ainsi :

$$\det_{(e_1, \dots, e_p)}(c_1, \dots, c_r, e'_{r+1}, \dots, e'_p) \neq 0,$$

ce qui implique l'existence d'un déterminant $r \times r$ non nul extrait de A .

(\Leftarrow) Supposons qu'il existe une matrice B carrée d'ordre r tel que $\det B \neq 0$ et B est une matrice extraite de A . On note (c_1, \dots, c_r) les vecteurs colonnes de B . Comme $\det B \neq 0$, les vecteurs sont linéairement indépendants d'où $\text{rg } A = r$.

□

Corollaire I.48. *Le rang d'une matrice est l'ordre maximum d'un déterminant extrait non nul de cette matrice.*

I.6 Exercices

Exercice I.1. Déterminer lesquels des ensembles E_1 , E_2 , E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^3 . Calculer leurs dimensions.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y - z = x + y + z = 0\}, \\ E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 - z^2 = 0\}, \\ E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, e^x e^y = 0\}, \\ E_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\}. \end{aligned}$$

Exercice I.2. Soient dans \mathbf{R}^4 les vecteurs $\vec{e}_1(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e}_2(1, -2, 3, -3)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$?

Exercice I.3. Les familles suivantes sont-elles libres?

1. $\vec{v}_1(1, 0, 1)$, $\vec{v}_2(0, 2, 2)$ et $\vec{v}_3(3, 7, 1)$ dans \mathbf{R}^3 .
2. $\vec{v}_1(1, 0, 0)$, $\vec{v}_2(0, 1, 1)$ et $\vec{v}_3(1, 1, 1)$ dans \mathbf{R}^3 .
3. $\vec{v}_1(1, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{v}_2(2, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{v}_3(1, 0, 1, 1, 0)$ et $\vec{v}_4(0, 1, 0, 0, 1)$ dans \mathbf{R}^5 .
4. $\vec{v}_1(2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $\vec{v}_2(1, 1, 2, 1, 3, 1)$ et $\vec{v}_3(0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans \mathbf{R}^6 .
5. $\vec{v}_1(2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $\vec{v}_2(-1, 1, -2, 2, -3, 3)$ et $\vec{v}_3(1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans \mathbf{R}^6 .

Exercice I.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f + \text{id}$. Montrer que f est un automorphisme.

Exercice I.5. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de \mathbf{R}^3 et λ un nombre réel. Démontrer que la donnée de

$$\begin{cases} \phi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_3 \end{cases}$$

définit une application linéaire de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 . Écrire l'image du vecteur $\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective? surjective?

Exercice I.6. On considère dans \mathbf{R}^n une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Les familles suivantes sont-elles libres?

1. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
2. (\vec{e}_1, \vec{e}_3) .
3. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4)$.
4. $(3\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.
5. $(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_2 - \vec{e}_1)$.

Exercice I.7. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^n , on définit l'application $f: F \times G \rightarrow \mathbf{R}^n$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice I.8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f une application linéaire de E dans E ; montrer que les propriétés (i) à (iii) sont équivalentes :

- (i) $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$,
- (ii) $\text{Im } f = \text{Im } f^2$,
- (iii) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

Exercice I.9. Déterminer m tel que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 2 & 1 & 0 \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice I.10. Montrer, sans le développer, que

$$\begin{vmatrix} 84 & 35 & 62 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice I.11. s désignant une racine cubique de 1. Montrer que $\Delta_3 = 0$ avec

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & 1 \\ s^2 & s^2 & s \end{vmatrix}.$$

Généraliser à Δ_n déterminant dont la première ligne est constitué pour les $(s^i)_{0 \leq i \leq n-1}$, s étant une racine n^{e} de 1 et dont les colonnes sont des permutations de ces $(s^i)_{0 \leq i \leq n-1}$.

Exercice I.12. Calculer les déterminants suivants :

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice I.13. Montrer que $\det(X_1 + A, X_2 + A, X_3 + A) = 0$ pour $X_2 = \frac{X_1 + X_3}{2}$ et que

$$\det(X_1, X_2, X_3) \neq 0 \Leftrightarrow \det(X_1 + X_2, X_2 + X_3 + X_3 + X_1) \neq 0.$$

Exercice I.14. Calculer les déterminants suivants :

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice I.15. Montrer que, pour t réel et n entier naturel, le déterminant :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ \cos nt & \cos(n+1)t & \cos(n+3)t \\ \sin nt & \sin(n+1)t & \sin(n+3)t \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré ≤ 3 en x , divisible par $x^2 + 2x \cos t + 1$. Donner la valeur de $\Delta(x)$.

Exercice I.16. On considère le déterminant :

$$\bar{Q}_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & (x+1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_p^1 & C_p^2 & C_p^3 & \cdots & C_p^{p-1} & (x+1)^p \\ 1 & C_{p+1}^1 & C_{p+1}^2 & C_{p+1}^3 & \cdots & C_{p+1}^{p-1} & (x+1)^{p+1} \end{vmatrix}.$$

Calculer $\bar{Q}_p(x) - \bar{Q}_p(x-1)$ puis $\bar{Q}_p(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

CHAPITRE II

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES

Le but de ce chapitre est de chercher des bases d'un endomorphisme tel qu'on peut avoir une matrice simple. On considère, dans tout ce chapitre, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , E est un \mathbf{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

II.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition II.1 (Valeurs et vecteurs propres). *Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et u une application linéaire. On dit que λ est une valeur propre de u s'il existe $x \neq 0$ dans E tel que :*

$$u(x) = \lambda x.$$

On dit que x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ .

Remarque II.2. Le vecteur x est valeur propre de u associé à la valeur propre λ si et seulement $u - \lambda \text{id}_E(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$u(x) = \lambda x = u - \lambda \text{id}_E(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(u - \lambda \text{id}_E).$$

Définition II.3 (Sous-espace propre). *Soit λ une valeur propre de u . L'ensemble E_λ définie par :*

$$E_\lambda = \{x \neq 0, x \in E, u(x) = \lambda x\} = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$$

est un sous-espace propre de E associé à la valeur propre λ .

On rappelle la définition d'un polynôme.

Définition II.4 (Polynôme). *P est un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ si :*

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n.$$

Une fonction polynôme est l'application suivante :

$$\begin{aligned} P & : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ X & \mapsto P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \end{aligned}$$

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $P(u)$ est l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} P(u) &: E \rightarrow E \\ x &\mapsto a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_nu^n(x) \end{aligned}$$

où u^n est la composée n -fois de l'application linéaire u .

Proposition II.5. *Si P est un polynôme et x est un vecteur propre de u associée à la valeur propre λ alors x est un vecteur propre de $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.*

Démonstration. Soient u une application linéaire et x un vecteur de E tels que $u(x) = \lambda x$. On montre, par récurrence sur n que :

$$u^n(x) = \lambda^n x.$$

La propriété est vraie pour $n = 1$. On suppose que, pour un n fixé, $u^n(x) = \lambda^n x$ alors on a bien

$$u^{n+1}(x) = u(u^n(x)) = \lambda^n u(x) = \lambda^{n+1} x.$$

Soit x tel que $u(x) = \lambda x$:

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_nu^n(x) \\ &= a_0x + a_1\lambda x + \cdots + a_n\lambda^n x \\ &= (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n)x^n \\ &= P(\lambda)x. \end{aligned}$$

□

Corollaire II.6. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres de u et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ leurs sous-espaces propres associés. On a :*

$$\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}$$

(c'est-à-dire que les sous-espaces propres sont en somme directe).

Démonstration. On suppose qu'il existe des vecteurs $x_i \in E_{\lambda_i}$, pour $1 \leq i \leq r$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 0$. Notons r' le nombre des vecteurs des E_{λ_i} tels que :

$$x_1 + \cdots + x_{r'} = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} u(x_1 + \cdots + x_{r'}) - \lambda_1(x_1 + \cdots + x_{r'}) &= 0 \\ \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} x_2 + \cdots + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} x_{r'} &= 0. \end{aligned}$$

On aboutit donc à une contradiction.

□

II.2 Polynôme caractéristique

Définition II.7 (Polynôme caractéristique). Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et A une matrice dans une base \mathcal{B} de E . On appelle polynôme caractéristique de u (ou de A), le polynôme :

$$P_u(x) = P_A(x) = \det(A - XI_n) = \det(u - x \text{id}_E).$$

On rappelle la définition de trace d'une matrice.

Définition II.8 (Trace d'une matrice). Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients $a_{ij} \in \mathbf{R}$. On appelle trace de la matrice de A , le nombre :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Proposition II.9. On a, la formule suivante :

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^n \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + \det A.$$

On a :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_n) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - X & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

où les coefficients b_{ij} sont définis de la manière suivante :

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} - X & \text{sinon} \end{cases},$$

d'où,

$$(\text{II.1}) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma \neq \text{id}} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n}.$$

On a de plus :

$$\deg_x \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma \neq \text{id}} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} \leq n - 2.$$

Proposition II.10. Soient $\lambda \in \mathbf{K}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et P_u le polynôme caractéristique de u . λ est une valeur propre de u si et seulement si $P_u(\lambda) = 0$.

Démonstration. λ est valeur propre de u si et seulement si $\ker(u - \lambda \text{id}_E) \neq 0$. Donc il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. On a donc que $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas bijective et donc $\det(u - \lambda \text{id}_E) = P_u(x) = 0$. Soit, maintenant $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = u - x \text{id}_E$. On a :

$$\dim E = \underbrace{\dim \text{Im } f}_{\leq n-1} + \underbrace{\dim \ker f}_{\geq 1}.$$

Si (x_1, \dots, x_n) est une base de E , $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ engendrent un espace de dimension $\leq n - 1$. \square

Théorème II.11. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, P_u le polynôme caractéristique de u , λ une valeur propre de u (c'est-à-dire racine de P_u) et m_λ sa multiplicité dans E_λ (sous-espace propre associé à λ). Alors, on a :

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda.$$

Démonstration. On note $m = m_\lambda$ alors :

$$P_u(x) = (\lambda - x)^m Q(x) \quad \text{avec } Q(\lambda) \neq 0.$$

λ est racine de P si et seulement si $(X - \lambda) \mid P(X)$. Notons $p = \dim E_\lambda$, considérons (e_1, \dots, e_p) une base de E_λ . On la complète en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_m)$. Dans cette base, la matrice de u est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_p & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \det(A - XI_n) &= \begin{vmatrix} (\lambda - X)I_p & C \\ O & B - XI_{n-p} \end{vmatrix} = \det((\lambda - X)I_p) \times \det(B - XI_{n-p}) \\ &= \det(\lambda - X)^p \det(B - XI_{n-p}). \end{aligned}$$

On a donc $(\lambda - X)^p$ divise $P_u(x)$, ce qui implique $p \leq m$. \square

II.3 Endomorphismes diagonalisables

Définition II.12 (Matrice diagonale). On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est diagonale si les coefficients a_{ij} sont nuls en dehors de la diagonale. C'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & & & \\ & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

Définition II.13 (Endomorphisme diagonalisable). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

Définition II.14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est diagonalisable sur \mathbf{K} s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Théorème II.15. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est diagonalisable,
- (ii) P_u admet toutes ces racines de \mathbf{K} et, pour tout λ racine de P_u de multiplicité m_λ , on a : $\dim E_\lambda = m_\lambda$.
- (iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}.$$

Démonstration. ((i) \Rightarrow (ii)) Si u est diagonalisable, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres de multiplicité respective m_1, \dots, m_r :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$P_u(x) = \det(A - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - X)^{n_i} = \prod_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i}.$$

((ii) \Rightarrow (iii)) Soit

$$P_u(X) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - X)^{m_i},$$

avec, $1 \leq i \leq r$, $m_i = \dim E_{\lambda_i}$. Si on note $F = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$, alors

$$\dim F = m_1 + \dots + m_r = n = \dim E,$$

c'est-à-dire $F = E$.

((iii) \Rightarrow (i)) Supposons que $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$. On note \mathcal{B}_i une base de E_{λ_i} , la base

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$$

est une base de E puisque E est somme directe de E_{λ_i} . Ainsi, il existe une base de E formée de vecteurs propres de u , ce qui prouve que u est diagonalisable. \square

Exemple II.16. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On cherche des vecteurs $X = (x, y)$ de \mathbf{R}^2 tels que $AX = 2X$ ou $AX = 3X$.

$$AX = 2X \Leftrightarrow x = y \quad (x = y \text{ définit une droite de vecteurs propres})$$

$$AX = 3X \Leftrightarrow x = 2y.$$

Soit u l'endomorphisme dans la base (i, j) :

$$\begin{aligned}u(i) &= 4i + j, \\u(j) &= 2i + j.\end{aligned}$$

La matrice de u dans la base (i, j) est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on définit $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (2, 1)$, on a :

$$u(e_1) = 2e_1 \quad \text{et} \quad u(e_2) = 3e_2.$$

Dans la base (e_1, e_2) , la matrice de u est

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple II.17. Soient $E = \mathbf{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = (1 - X)^2(2 - X).$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 1 avec la multiplicité 2 et 2 avec la multiplicité 1. On a :

$$\begin{aligned}E_1 &= \{U \in \mathbf{R}^3, AU = U\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y + z = 0\}.\end{aligned}$$

$e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 0, 1)$ sont linéairement indépendants, ils forment une base de E_1 . La matrice P est donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base (e_1, e_2, e_3) , la matrice u est :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

II.4 Trigonalisation

Définition II.18 (Matrice triangulaire supérieure). *On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n est dite triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$.*

Définition II.19 (Matrice trigonalisable). *On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est dite trigonalisable s'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire.*

Théorème II.20. *$u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si P_u a toutes ses racines dans \mathbf{K} .*

Remarque II.21. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ alors toutes les matrices sont trigonalisables.

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons que u est trigonalisable. Alors il existe une base de E dans laquelle A de u s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$P_u(X) = \det(A - IX) = (a_1 - X)(a_2 - X) \cdots (a_n - X).$$

(\Leftarrow) On démontre la propriété par récurrence sur n , la dimension de E .

Initialisation Si $n = 1$ alors il n'y a rien à démontrer !

Hérédité Fixons n arbitrairement et suppose la propriété vraie pour $n - 1$. On démontre qu'elle est, alors, vraie pour n . Soit E de dimension n , on considère $P_u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que P_u a toutes ses racines sur \mathbf{K} . Soient λ une racine de P_u , x_1 un vecteur propre associé à λ , H un hyperplan supplémentaire de la droite $\mathbf{K}x_1$ (de base (x_1, \dots, x_n)). Dans cette base, la matrice de u s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$P_u(X) = (\lambda - X) \det(M - X \text{id}_H) = (\lambda - X)P_M(X).$$

Notons v l'endomorphisme de H dont la matrice dans la base (x_1, \dots, x_n) est égale à M . Par hypothèse de récurrence, M est trigonalisable. En effet,

$$P_u(X) = (\lambda - X)P_v(X) = (\lambda - X)P_M(X).$$

Par conséquent, il existe une base (y_2, \dots, y_n) de H dans laquelle dans la matrice de v est triangulaire, ainsi dans la base (x_1, y_2, \dots, y_n) , la matrice de u est triangulaire.

□

Exemple II.22. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = (3 - X)(2 - X)^2$$

et les sous-espaces propres de A sont :

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(x, y, z), x = y = z\} = \mathbf{R}e_1 \quad \text{où } e_1 = (1, 1, 1) \\ E_2 &= \{(x, y, z), x = z \text{ et } 4y = 3z\} = \mathbf{R}e_2 \quad \text{où } e_2 = (2, 3, 4). \end{aligned}$$

On obtient $\dim E_3 = 1$ et $\dim E_2 = 1$. Or, la multiplicité de la valeur propre 2 est 2 donc A est trigonalisable.

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 3e_1 \\ u(e_2) &= 2e_2 \end{aligned}$$

Remarquons que le vecteur $e_3 = (0, 0, 1)$ n'appartient pas au plan engendré par e_1 et e_2 . On exprime $u(e_3)$ dans les bases (e_1, e_2, e_3) :

$$u(e_3) = 6e_1 + e_2 + 2e_3.$$

On obtient donc :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

II.5 Sous-espaces stables

Définition II.23 (Sous-espace stable). Soient V un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que V est stable par u si, pour tout $x \in V$, $u(x) \in V$.

Proposition II.24. Si V est stable par u alors, pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, V est stable par $P(u)$.

Démonstration. Si V est stable par u alors pour tout $x \in V$, $u(x) \in V$ donc $u(u(x)) \in V$ et ainsi, par récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u^k(x) \in V$. Or V est stable par combinaison linéaire donc $P_u(x) \in V$. □

Proposition II.25. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\ker v$ et $\text{Im } v$ est stable par u .

Démonstration. Soit $x \in \ker v$.

$$v(x) = 0 \Rightarrow u(v(x)) = 0 \Rightarrow v(u(x)) = 0.$$

Donc $u(x) \in \ker v$. Soit $y \in \operatorname{Im} v$ alors :

$$u(y) = u \circ v(y) = v \circ u(y) = v(u(x)).$$

Donc : $u \in \operatorname{Im} v$. □

Proposition II.26. *Soit V un sous-espace vectoriel de E , stable pour $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de $u|_V \in \mathcal{L}(E)$ divise P_u . De plus, si W est un sous-espace vectoriel supplémentaire de V stable par u alors :*

$$P_u = P_u|_V + P_u|_W.$$

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de V , on complète cette base de E par des vecteurs (e_{p+1}, \dots, e_n) . La matrice de u dans cette base s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} A & U \\ O & B \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de $u|_V$ dans la base (e_1, \dots, e_p) . On a alors :

$$P_u(X) = \det(M - XI_n) = \underbrace{\det(A - XI_p)}_{=P_u|_V} \cdot \underbrace{\det(B - XI_{n-p})}_{=P_u|_W}.$$

Le polynôme caractéristique de $u|_V$ divise bien P_u . Si $E = V \oplus W$ alors W est stable par u . □

Proposition II.27. *On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres. $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$, les sous-espaces propres correspondants. Si V est un sous-espace vectoriel stable par u , on a :*

$$V = (V \cap E_{\lambda_1}) \oplus (V \cap E_{\lambda_2}) \oplus \dots \oplus (V \cap E_{\lambda_r}).$$

Avant de démontrer la proposition, on a besoin du résultat suivant :

Proposition II.28. *Si x est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ alors x est un vecteur propre de $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.*

Démonstration. On sait que $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$. Soit $x \in E$ tel que $x = x_1 + \dots + x_r$ et $x_i \in E_{\lambda_i}$, pour $1 \leq i \leq r$. Le sous-espace vectoriel V est stable par u donc par $P(u)$, pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$. On note, pour $1 \leq i \leq r$:

$$P_i(X) = (\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_{i-1} - X)(\lambda_{i+1} - X) \cdots (\lambda_r - X) = \prod_{j=1, j \neq i}^r (\lambda_j - X).$$

On a, pour tout $j \neq i$, $P(\lambda_j) = 0$ et $P(\lambda_i) = 0$. Soit $x \in V$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_r$ et $x_i \in E_{\lambda_i}$, pour $1 \leq i \leq r$. On veut démontrer que, pour tout i , $x_i \in V \cap E_{\lambda_i}$ et donc, pour tout i , $P_i(u)(x) \in V$ car V est stable par $P(u)$. Donc :

$$P_i(u)(x) = \underbrace{P_i(u)(x_1)}_{=0} + \cdots + \underbrace{P_i(u)(x_{i-1})}_{=0} + \underbrace{P_i(u)(x_i)}_{=P_i(\lambda_i)x_i} + \cdots + \underbrace{P_i(u)(x_r)}_{=0}.$$

On se sert de la proposition II.28, pour chaque P_i , $1 \leq i \leq r$, si $x \in V$, $P_i(u)(x) \in V$ implique que $P_i(\lambda_i)x_i \in V$. Donc, pour tout $1 \leq i \leq r$, x_i appartient à V et $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$ avec $x_i \in V \cap E_{\lambda_i}$. \square

II.6 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème II.29 (Théorème de Cayley-Hamilton). *s*

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et P_u son polynôme caractéristique. Alors : $P_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et P_A son polynôme caractéristique. Alors, $P_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.

Précisons un peu. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ alors P s'écrit :

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k x^k.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P_u(u) &: E \rightarrow E \\ x &\mapsto P(x)x \end{aligned}$$

et

$$P_A(A) = \sum_{k=0}^d a^k A^k \quad \text{où } A^0 = I_n.$$

Démonstration. Soient $n = \dim E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice de u dans une base \mathcal{B} de E . La démonstration se fait par récurrence sur n .

Initialisation Si $n = 1$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} u &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

la matrice A est la matrice de dimension 1×1 de coefficients a , son polynôme caractéristique est $P_A(X) = a - X$. On a bien $P_A(A) = 0$.

Hérédité Si on se fixe n arbitrairement, on suppose la propriété vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$, c'est-à-dire, pour toute matrice $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$, $P_{A'}(A') = 0$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et on démontre que $P_A(A) = 0$. On se place dans le cas où le polynôme P_A a toutes ses

racines dans \mathbf{K} donc A est diagonalisable. On se place dans une base où la matrice de u est triangulaire.

$$T = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (e_1, \dots, e_n).$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = P_u(X) = P_T(X) = (b_{11} - X)(b_{22} - X) \cdots (b_{nn} - X).$$

On considère F , le sous-espace vectoriel de E engendré par (e_1, \dots, e_{n-1}) , stable par u . On a alors :

$$\begin{aligned} v := u|_F & : F \rightarrow F \\ y & \mapsto v(y) = u(y) \end{aligned}$$

qui est dans $\mathcal{L}(F)$. Soit T' la matrice de v dans la base (e_1, \dots, e_{n-1})

$$T' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K}).$$

Par hypothèse de récurrence, $P_{T'}(T') = 0$. Ainsi, $P_v(v) = 0_{\mathcal{L}(F)}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in F$, $P_v(v)(x) = 0$. Or, F est stable donc $P_v(v)(x) = 0$ implique $P_u(u)(x) = 0$. Pour démontrer que $P_u(u) = 0$, il faut démontrer que pour tout $x \in E$, $P_u(u)(x) = 0$. Soit $x \in E$, on peut l'écrire $x = x_F + x_n e_n$ avec $x_F \in F$. On obtient : $u(x) = u(x_F) + x_n u(e_n)$. Or :

$$u(e_n) = \underbrace{t_{1n}e_1 + \cdots + t_{n-1,n}e_{n-1}}_{\in F} + t_{nn}e_n = y + t_{nn}e_n.$$

$$\begin{aligned} (t_{nn} - \text{id}_E - u)(e_n)(e_n) &= t_{nn}e_n - y - t_{nn}e_n = -y \in F \\ P_u(X) &= (t_{nn} - X)P_v(X) = P_v(X)(t_{nn} - X) \\ P_u(u)(e_n) &= P_v(u) \circ (t_{n-1,n} \text{id}_E - u)(e_n) = P_u(u)(X) = 0. \end{aligned}$$

En effet, $P_v(u)(x) = 0$, d'où $P_u(u)(x) = 0$.

□

II.7 Polynôme minimal

Proposition II.30. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que :*

(i) Q est unitaire.

(ii) si $P \in \mathbf{K}[X]$ vérifie $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $Q \mid P$.

Définition II.31. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle Q_u le polynôme unitaire le polynôme qui vérifie les propriétés de la proposition II.30.

Démonstration. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $n = \dim E$. On a :

$$P_u(X) = (-1)^n X^n + \cdots + \det u.$$

$(-1)^n P_u$ est un polynôme unitaire qui s'annule en u . On considère l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{P \text{ unitaire, } P(u) = 0\} \neq \emptyset.$$

On peut avoir dans \mathcal{E} un polynôme Q de degré minimale. On a : $Q(u) = 0$ et

$$tQ(u) = T(u) \cdot Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. On a alors $\deg P \geq \deg Q$ (car Q a été choisi de degré minimal). On peut donc écrire :

$$P = TQ + R \Rightarrow \underbrace{P(u)}_{=0} = \underbrace{T(u) \cdot Q(u)}_{=0} + R(u) \Rightarrow R(u) = 0.$$

On aboutit donc une contradiction donc $Q \mid P$. □

Proposition II.32. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. λ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si λ est racine du polynôme minimal de u .

Démonstration. (\Leftarrow) Soit P_u le polynôme caractéristique de u . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_u(u) = 0$. Par définition du polynôme minimal, Q_u divise P_u (c'est-à-dire qu'il existe $T \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P_u = Q_u T$). Si $Q_n(X) = 0$ alors $P_u(\lambda) = 0$ donc λ est valeur propre de u .

(\Rightarrow) Si λ est valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de P_u , pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$.

En particulier, si $P = Q$, le polynôme de u , on a : $Q(\lambda)$ est valeur propre de $Q(u)$.

Or $Q(u)$ est l'endomorphisme nul donc 0 est la seule valeur propre d'où $Q(\lambda) = 0$. □

Proposition II.33. L'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans \mathbf{K} et que ces racines sont simples.

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres. On considère le polynôme $Q(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_r)$ et pour $1 \leq i \leq r$,

$$P_i(X) := \frac{Q(X)}{X - \lambda_i} = \prod_{j=1, j \neq i}^r (X - \lambda_j).$$

On a ainsi :

$$Q(X) = (X - \lambda_i)P_i(X) = P_i(X)(X - \lambda_i).$$

Pour tout $x \in E_{\lambda_i}$, $(u - \lambda_i \text{id}_E)(x) = 0$. Donc $Q(X) = 0$. Mais ceci est vraie pour tout i et u est diagonalisable donc $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$. Soit $x \in E$, $x = x_1 + \dots + x_r$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}$:

$$Q(u)(x) = \underbrace{Q(u)(x_1)}_{=0} + \dots + \underbrace{Q(u)(x_r)}_{=0} = 0.$$

Donc : $Q(u) = 0$.

(\Leftarrow) Supposons que Q_u a toutes ses racines dans \mathbf{K} et que ses racines sont simples.

$Q_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ implique que $\text{Ker}(Q_u(u)) = E$.

$$Q_u(u) = (u - \lambda_1 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_{i-1} \text{id}_E) \circ (u - \lambda_{i+1} \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_r \text{id}_E)$$

avec λ_i racine de Q_u . Alors :

$$\text{Ker } Q_u(u) = \text{Ker}(u - \lambda_1 \text{id}_E) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(u - \lambda_r \text{id}_E).$$

Ceci prouve que u est diagonalisable. □

Exemple II.34 (Application à la trigonalisation). Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = (2 - X)(1 - X)^2.$$

Le polynôme minimal de A , $Q_A(X)$ peut être égal à $P_A(X)$ ou à $(2 - X)(1 - X)$. Notons $Q(X) = (2 - X)(1 - X)$.

$$\begin{aligned} Q_A(A) &= (2I - A)(I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

donc Q n'est pas le polynôme minimal, donc $Q_u = P_u$ et P_u n'a pas toutes ses racines simples. Donc : A n'est pas diagonalisable.

II.8 Décomposition de Dunford

1 Préliminaires

On rappelle la proposition suivante :

Proposition II.35. *Soient $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ où les E_{λ_i} sont les espaces propres associés aux valeurs propres λ_i et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est diagonalisable (c'est-à-dire que son polynôme caractéristique a toutes ses racines dans \mathbf{K}) alors :*

$$E = \text{Ker}(u - \lambda_1 \text{id}_E)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(u - \lambda_r \text{id}_E)^{m_r}$$

où les λ_i sont des valeurs propres de multiplicité m_i .

Lemme II.36 (Lemme des noyaux). *Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si P et Q sont premiers entre eux alors :*

$$\text{Ker } PQ(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u).$$

Avant de démontrer le lemme, on rappelle l'énoncé du théorème de Bézout :

Théorème II.37 (Théorème de Bézout). *Si P et Q sont premiers entre eux alors il existe $U, V \in \mathbf{K}[X]$ tels que $PU + QV = 1$.*

Démonstration. On a, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$P(u) \circ U(u) = Q(u) \circ V(u) = \text{id}_E.$$

Pour tout $x \in E$, $x = (P(u) \circ U(u))(x) + (Q(u) \circ V(u))(x)$. Si $x \in \text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u)$, on a alors :

$$x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x) = U(u)(0) + V(u)(0) = 0.$$

Donc,

$$\text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u) = \{0\}.$$

Soit $x \in \text{Ker } PQ(u) = \text{Ker}(P \circ Q(u))$, x s'écrit donc :

$$x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x)$$

car

$$Q(u)[U(u) \circ P(u)(x)] = U(u) \circ \underbrace{P(u) \circ Q(u)(x)}_{=0}.$$

□

Définition II.38 (Sous-espace caractéristique). *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de multiplicité m . Le sous-espace $N = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)^m$ est appelé sous-espace caractéristique.*

Proposition II.39. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que P_u ait toutes ses racines dans \mathbf{K} :

$$P_u(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \cdots (\lambda_r - X)^{m_r}$$

et $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i}$ des sous-espaces caractéristiques. Alors :

- (i) N_i est stable par u ;
- (ii) $E_{\lambda_i} \subset N_i$;
- (iii) $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$;
- (iv) $\dim N_i = m_i$.

Démonstration. (i) Soit $x \in N_i$, on a :

$$(u - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i}(u(x)) = u(-\lambda_i \text{id}_E)^{m_i} \circ u(x) = u \circ \underbrace{(u - \lambda_i)^{m_i}(x)}_{=0}.$$

Donc $u(x) \in N_i$, d'où N_i est stable par u .

(ii) Soit $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)$. Si $x \in E_{\lambda_i}$ alors $(u - \lambda_i \text{id}_E)(x) = 0$. Donc, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $(u - \lambda_i \text{id}_E)^k(x) = 0$. D'où $x \in N_i$.

(iii) Comme $P_u(x) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \cdots (\lambda_r - X)^{m_r}$, on a ¹ :

$$\text{Ker } P_u(u) = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r.$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\text{Ker } P_u(u) = \text{Ker } 0_{\mathcal{L}(E)} = E.$$

D'où :

$$E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r.$$

(iv) Soit $v_i = u|_{N_i} \in \mathcal{L}(N_i)$. Si $i \neq j$ alors $N_i \cap N_j = \{0\}$. La seule valeur propre de N_i est λ_i . On a donc $P_{v_i} = (\lambda_i - X)^{\dim N_i}$ et :

$$P_u = P_{v_1} \cdots P_{v_r} = (\lambda_1 - X)^{\dim N_1} \cdots (\lambda_r - X)^{\dim N_r} = (\lambda_1 - X)^{m_1} \cdots (\lambda_r - X)^{m_r}.$$

D'où, pour tout $1 \leq i \leq n$, $m_i = \dim N_i$. □

Définition II.40 (Endomorphisme nilpotent). On dit que l'endomorphisme u (ou la matrice A) est nilpotent(e) s'il existe un entier k tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou $A^k = 0$.

Proposition II.41. Si u est nilpotent, son unique valeur propre est 0. Donc $P_u(X) = (-1)^n X^n$.

1. c'est le lemme des noyaux généralisé par récurrence

Démonstration. Il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^k = 0$. Cela veut dire que :

$$\det A^k = 0 \Leftrightarrow (\det A)^k = 0 \Leftrightarrow \det A = 0.$$

Donc l'endomorphisme u de matrice A n'est pas bijective. Son noyau n'est pas réduit à 0. Donc 0 est valeur propre car il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = 0$. Supposons que λ soit valeur propre de u . Donc il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^k(x) = 0$. Or si x est vecteur propre de λ : $u^k(x) = \lambda^k x$. On a donc $\lambda^k x = 0$ avec $x \neq 0$. D'où :

$$\lambda^k = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

□

2 Théorème de décomposition de Dunford

Théorème II.42 (Décomposition de Dunford, version endomorphisme). *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que P_u ait toutes ses racines dans \mathbf{K} . Alors il existe des uniques endomorphismes de E , n et d où n est nilpotent et d diagonalisable tels que :*

- (i) $u = n + d$,
- (ii) $n \circ d = d \circ n$.

Théorème II.43 (Décomposition de Dunford, version matricielle). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que P_A ait toutes ses racines dans \mathbf{K} . Alors il existe des uniques matrices N et D où N est nilpotent et D diagonalisable tels que :*

- (i) $A = N + D$,
- (ii) $ND = DN$.

Lemme II.44. *Si u est diagonalisable et V est un sous-espace de E stable par u alors $u|_V$, la restriction de u à V , est diagonalisable.*

Démonstration. u est diagonalisable si et seulement si $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ et si V est stable par u alors

$$V = (V \cap E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus (V \cap E_{\lambda_r})).$$

On considère $v = u|_V \in \mathcal{L}(E)$. On a : $\text{Ker}(v - \lambda_i \text{id}_V) = V \cap \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)$. Les vecteurs propres, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de v appartiennent à l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ des valeurs propres de u . Donc V s'écrit :

$$V = V_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_s},$$

d'où v est diagonalisable. □

Lemme II.45. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors, il existe une base de E composée de vecteurs propres de u et de v .*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de v . On note :

$$V_i = \{x \in E, u(x) = \lambda_i x\}.$$

Ce qui prouve que $u(x) \in V_i$; Donc V_i est stable par u , c'est-à-dire que $u|_{V_i}$ est diagonalisable. Il existe une base \mathcal{B}_i de V_i composée de vecteurs propres de v ($u|_{V_i}$ est diagonalisable). On a alors

$$E = V_i \oplus \dots \oplus V_r$$

car v est diagonalisable. Ainsi $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ est une base de E composée de vecteurs propres de u et de v . \square

Démonstration du théorème II.42 et II.43. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que P_u a toutes ses racines dans \mathbf{K} , c'est-à-dire :

$$P_u(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \dots (\lambda_r - X)^{m_r}.$$

On considère pour $1 \leq i \leq r$, $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i}$ et $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_r$. On définit d sur chaque N_i par $d(x) = \lambda_i x$, pour tout $x \in N_i$ et $n = u - d$. Pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, \dots, x_r) \in N_1 \times \dots \times N_r$ tels que $x = x_1 + \dots + x_r$. On a alors :

$$d(x) = d(x_1) + \dots + d(x_r) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r.$$

1. Par construction, d est diagonalisable. Soit \mathcal{B}_i une base de N_i et $\mathcal{B} = \bigcup_{1 \leq i \leq r} \mathcal{B}_i$ une base de E et la matrice de d s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

2. Soit

$$n_i = n|_{N_i} = (u - d)|_{N_i} = u|_{N_i} - \lambda_i \text{id}_{N_i}.$$

On a donc $n_i^{m_i} = 0$ car $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id})^{m_i}$. On considère $m = \sup_{1 \leq i \leq r} m_i$ alors $n^m = 0$ sur chaque N_i . Or $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_r$ donc si $x \in E$ alors on peut écrire :

$$x = x_1 + \dots + x_r.$$

Donc $n^m = 0$ donc n est nilpotent.

3. On vérifie que $n \circ d = d \circ n$. Soit $x \in E$, on écrit $x = x_1 + \dots + x_r$, où les $x_i \in N_i$.

$$n \circ d(x) = n \circ d(x_1) + \dots + n \circ d(x_r) = d \circ n(x_1) + \dots + d \circ n(x_r)$$

sur N_i , $d = \lambda_i \text{id}$ commute avec n .

4. Unicité : on suppose qu'il existe (n, d) et (n', d') tels que $v = n + d = n' + d'$ et $n \circ d = d \circ n$, $n' \circ d' = d' \circ n'$ (avec n et n' nilpotents et d et d' diagonalisables). On a alors :

$$\begin{aligned} u = d + n + d' + n &\Leftrightarrow d' \circ u = d \circ d' + d' \circ n' = u \circ d' \\ &\Leftrightarrow (u - \lambda_i \text{id})^{m_i} \circ d'(x) = d'(u - \lambda_i \text{id})^{m_i}(x) = 0 \quad \text{si } x \in N_i. \end{aligned}$$

On a alors : $d|_{N_i} = \lambda_i \text{id}_{N_i}$ stable par d' , d et d' commutent sur N_i alors $d = d'$ est diagonalisable. Or $n = u - d$, $n' = u - d'$ donc n et n' commutent, nilpotents. On obtient :

$$n - n' = d - d' = 0.$$

□

3 Exemples

Exemple II.46. Si on veut calculer A^k , on utilise la décomposition de Dunford. On a alors : $A = N + D$ avec $ND = DN$ et :

$$A^k = (N + D)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i N^i D^{k-i}$$

Exemple II.47. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que A se décompose en :

$$A = D + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où N est nilpotent et D diagonalisable. Mais ce n'est pas la décomposition de Dunford car $ND \neq DN$. Le polynôme caractéristique de A , P_A est $(1 - X)^2(2 - X)$ alors :

$$E = \text{Ker}(A - I_3)^2 \oplus \text{Ker}(A - 2I_3).$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A - 2I) &= \{(x, y, z), y = z \text{ et } x = 2z\} = \langle (2, 1, 1) \rangle, \\ \text{Ker}(A - I) &= \{(x, y, z), y = z = 0\} = \langle (1, 0, 0) \rangle. \end{aligned}$$

On calcule $(A - I)^2$:

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\text{Ker}(A - I)^2 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$. On note :

$$N_1 = \text{Ker}(A - I)^2 = \mathbf{R}e_1 + \mathbf{R}e_2 \quad \text{et} \quad N_2 = \text{Ker}(A - 2I) = \mathbf{R}e_3.$$

On définit d dans la base (e_1, e_2, e_3) par :

$$d(e_1) = e_1, \quad d(e_2) = e_2, \quad d(e_3) = 2e_3.$$

La matrice D' de d dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Or :

$$u(e_1) = e_1, \quad u(e_2) = e_2 + e_1, \quad u(e_3) = 2e_3.$$

La matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base (e_1, e_2, e_3) :

$$d(e_1) = e_1, \quad d(e_2) = e_2, \quad d(e_3) = 2e_1 + e_2 + 2e_3.$$

D'où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Application à la trigonalisation

Dans la section II.4, on a démontré qu'un polynôme qui a toutes ses racines dans \mathbf{R} est trigonalisable dans \mathbf{R} . Par contre, on a laissé assez libre le choix de la base de trigonalisation : on ne demandait au troisième vecteur de cette base d'être linéairement indépendant des deux premiers (qui sont des vecteurs propres). La décomposition de Dunford permet de choisir la base de trigonalisation de manière à obtenir naturellement la décomposition de Dunford de la matrice triangulaire obtenue.

Soit u un endomorphisme, on suppose que son polynôme caractéristique a toutes ses racines dans \mathbf{R} . On écrit :

$$P_u(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \cdots (\lambda_r - X)^{m_r}.$$

On a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$ où $N_i = \text{Ker}(\lambda_i - u)^{m_i}$. On sait que chaque N_i est stable par u et soit \mathcal{B}_i une base de N_i alors la base de E est $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_i$. La matrice u est une matrice par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix}$$

où A_i est la matrice de $u_i = u|_{N_i}$. On trigonalise alors chaque A_i . On a :

$$P_u(X_i) = (\lambda_i - X)^{m_i}.$$

On choisit une base de $\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)$ et on a :

$$\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E) \subset \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^2 \subset \cdots \subset \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i}.$$

Exemple II.48. Soit A la matrice de l'endomorphisme u suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A , P_A est :

$$P_A(X) = (X + 1)(X - 2).$$

On va déterminer les sous-espaces caractéristiques :

$$N_{-1} = F = \text{Ker}(u + \text{id}_E)$$

$$N_2 = G = \text{Ker}(u - 2 \text{id}_E) \subset \text{Ker}(u - 2 \text{id}_E).$$

L'espace F est la droite vectorielle engendré par $e_1 = (0, 1, 1)$ et l'espace G est la droite engendré par le vecteur $e_2 = (1, 1, 1)$. Si e_3 est un vecteur de G indépendant de e_2 alors la base (e_1, e_2, e_3) , la matrice u sera de la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On choisit un vecteur e_3 dans $N_2 \setminus E_2$. On a :

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

d'où $\text{Ker}(A - 2I)^2 = \{(x, y, z), x = z\}$ est un plan vectoriel. Le vecteur $e_3 = (1, 0, 1)$ est dans N_2 mais pas dans E_2 et les vecteurs e_1, e_2, e_3 forment une base de E . On calcule $u(e_1)$ et on identifie :

$$u(e_3) = (1, -1, 1) = a(1, 1, 1) + 2(1, 0, 1),$$

d'où $a = 1$. La matrice u dans la base (e_1, e_2, e_3) est triangulaire, elle s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a donc $T = P^{-1}AP$. Cette triangularisation permet d'obtenir la décomposition de Dunford en écrivant :

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_M.$$

On a alors $PTP^{-1} = P\Delta P^{-1} + PMP^{-1}$. Si on note $D = P\Delta P^{-1}$ et $N = PMP^{-1}$, la matrice D est diagonalisable, la matrice N est nilpotente et ce sont les matrices de la décomposition de Dunford.

II.9 Exercices

Exercice II.1. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice II.2. Soit J la matrice

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

Exercice II.3. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

$$AB - BA = A.$$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotent, c'est-à-dire

$$\exists k \in \mathbf{N}, \quad A^k = 0.$$

On note E l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et on considère l'application :

$$\begin{aligned} \psi &: E \rightarrow E \\ M &\mapsto MB - BM \end{aligned}$$

1. Montrer que ψ est linéaire de E dans E .
2. Montrer, par récurrence que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\psi(A^k) = kA^k$.
3. On suppose que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k \neq 0$. Montrer que ψ a une infinité de valeurs propres.
4. Conclure.

Exercice II.4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A . Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice II.5. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de dimension n . Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si f est non injective.

Exercice II.6. Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A . De même, montrer que si x est un vecteur propre de A alors \bar{x} est aussi un vecteur propre complexe de A .

Exercice II.7. A étant une matrice carrée inversible, exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A .

- Exercice II.8.**
1. Soit A une matrice carrée ayant λ pour valeur propre. Montrer que λ^n est valeur propre de A^n .
 2. Soient A et B des matrices respectivement de taille $n \times m$ et $m \times n$. Montrer que toute valeur propre non nulle de AB , l'est aussi de BA .
 3. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n .
 - (a) Montrer que si 0 est valeur propre de AB , alors 0 l'est aussi de BA .
 - (b) Montrer que AB et BA ont mêmes valeurs propres.

Exercice II.9. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de E de dimension n , sur \mathbf{K} , ayant chacun n valeurs propres distinctes dans \mathbf{K} . Montrer que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g ont les mêmes valeurs propres.

Exercice II.10. Soit A une matrice complexe d'ordre n admettant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbf{C}^n$ tel que $(x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0)$ soit une base de \mathbf{C}^n . Écrire A dans cette base.
2. Soit B une matrice qui commute avec A . On note $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ les coordonnées de Bx_0 dans la base donnée à la question 1. Montrer qu'alors :

$$B = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i.$$

3. En déduire que (I, A, \dots, A^{n-1}) est une base de $\{B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{C}), AB = BA\}$.

Exercice II.11. On considère $E = \mathbf{R}_n[X]$ et l'application f qui à $P \in E$ fait correspondre $Q = f(P)$ définie par :

$$Q = (X - a)[P' - P(n)] - 2[P - P(n)].$$

1. Montrer que f est endomorphisme de E .
2. Montre que pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $u_k = (X - a)^k$ est un vecteur propre de f , dont on précisera la valeur propre.
3. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice II.12. Soit E l'espace $\mathbf{R}_2[X]$. On considère un réel m . Pour $P \in E$, on pose :

$$u_m(P) = (X^2 - mX)P' - 2XP.$$

1. Montrer que u_m est un endomorphisme de E .
2. Déterminer ses valeurs propres.
3. Montrer que, pour $m \neq 0$, u_m est diagonalisable.
4. Montrer que u_0 n'est pas diagonalisable.

Exercice II.13. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme minimal de A . En déduire A^{-1} , A^3 et A^5 .

Exercice II.14. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $A^3 = -A$ et $A \neq 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice II.15. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ telles que

$$A^2 - 3A + 2 \text{id} = 0.$$

Même question pour

$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18 \text{id} = 0.$$

Exercice II.16. Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie qui annule les polynômes $P = 1 - X^3$ et $Q = X^2 - 2X + 1$?

Exercice II.17. Mettre sous forme triangulaire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

CHAPITRE III

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution d'un système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x'_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

d'inconnu :

$$\begin{aligned} X &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\mapsto X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

On pose $X' = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

L'équation (III.1) se transforme en :

$$X' = AX + B.$$

III.2 Exponentielle de matrice

Définition III.1 (Développement en série de l'exponentielle). *Soit $x \in \mathbf{R}$ alors :*

$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Définition III.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice définie par :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n \right)$$

est appelée exponentielle de la matrice A , on la note $\exp(A)$.

Remarque III.3. Si A est diagonale, c'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors :

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

et ainsi :

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Propriétés III.4. 1. Si $A = 0$ alors $\exp A = I_n$.

2. Si $AB = BA$ alors $\exp(A + B)$.

3. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\exp A$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

4. Si P est inversible alors $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

Démonstration. 1. Si $A = 0$ alors :

$$e^A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_n + 0 + \frac{1}{2} \times 0 + \dots + 0 \right) = I_n.$$

2. On pose

$$\Delta_n = \left(\sum_{i=0}^n \frac{A^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^n \frac{B^j}{j!} \right) - \sum_{k=0}^n \frac{(A+B)^k}{k!}.$$

Or $AB = BA$ donc, pour tout $k \leq n$, on a :

$$\frac{(A+B)^k}{k!} \sum_{i+j=k} \frac{C_k^i}{k!} A^i B^j = \sum_{i+j=k} \frac{A^i B^j}{i! j!}.$$

D'où :

$$\|\Delta_n\| = \sum_{\substack{n+1 \leq i+j \leq 2n \\ 0 \leq i, j \leq n}} \sum_{i+j=k} \frac{\|A^i\| \|B^j\|}{i! j!} = \left(\sum_{i=0}^n \frac{\|A\|^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^n \frac{\|B\|^j}{j!} \right) - \sum_{k=0}^n \frac{(\|A\| + \|B\|)^k}{k!}$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

3. Comme A et $-A$ commutent :

$$\begin{aligned} \exp(0) = \exp(A - A) &= \exp(A) \exp(-A) \Leftrightarrow I_n = \exp(A) \exp(-A) \\ &\Leftrightarrow (\exp A)^{-1} = \exp(-A). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \exp(P^{-1}AP) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (P^{-1}P + P^{-1}AP + \dots + (P^{-1}AP)^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (P^{-1}P + P^{-1}AP + \dots + P^{-1}A^nP) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{-1} \cdot \left(I_n + A + \dots + \frac{A^n}{n!} \right) \cdot P \\ &= P^{-1}(\exp A)P. \end{aligned}$$

□

Exemple III.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Il existe une unique matrice D diagonalisable et une unique matrice N nilpotente telles que :

$$A = N + D \quad \text{et} \quad ND = DN.$$

On a alors :

$$\exp A = \exp(N + D) = \exp N \cdot \exp D.$$

$\exp N$ est facile à calculer car c'est une somme finie. Pour calculer $\exp D$, on remarque que, comme D est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}\Delta P$ avec Δ diagonale. Donc :

$$\exp D = \exp(P^{-1}\Delta P) = P^{-1} \cdot \exp \Delta \cdot P$$

et on voit qu'on peut toujours calculer une exponentielle de matrice dans \mathbf{C} .

III.3 Systèmes différentielles linéaires

Proposition III.6. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, I un intervalle de \mathbf{R} et $B: I \rightarrow \mathbf{R}^n$. Si S_0 est solution du système

$$X' = AX + B \tag{III.2}$$

alors toute solution s'écrit $S + S_0$ où S solution du système homogène $X' = AX$.

Démonstration. Soient $S, S_0: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ telles que $S'(t) = AS(t)$ et $S'(t) = AS_0(t) + B(t)$, pour tout $t \in I$. On a alors :

$$(S + S_0)' = AS + AS_0 + B = A(S + S_0) + B,$$

donc $S + S_0$ est solution de (III.2). Soit u une solution de (III.2) alors :

$$(u - S_0)'(t) = u'(t) - S_0'(t) = Au(t) + B(t) - AS_0(t) - B(t) = A(u - S_0)(t).$$

Ainsi, $u - S_0$ est solution du système homogène et on a $u = S_0 + (u - S_0)$, ce qui démontre la proposition. □

1 Résolution des systèmes homogènes

Proposition III.7. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et λ un vecteur propre de A . Alors la fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\mapsto e^{\lambda t}V \end{aligned}$$

où V est un vecteur propre associé de \mathbf{R}^n est solution de $X' = AX$.

Démonstration. Soit l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\mapsto e^{\lambda t}V \end{aligned} .$$

On a alors

$$S'(t) = \lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}\lambda V = e^{\lambda t}AV = A(e^{\lambda t}V) = AS(t).$$

□

Exemple III.8. Soit à résoudre :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

On a alors une équation du type $X' = AX$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En diagonalisant la matrice A , on trouve des matrices :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

telles que $A = PDP^{-1}$. On a donc que $S(t) = e^{2t}(1, 1)$ est une solution de $X' = AX$.

Proposition III.9. Soient $Y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inversible. PY est une solution du système $X' = AX$ si et seulement si Y est solution de $X' = (P^{-1}AP)X$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} PY \text{ est solution de } X' = AX &\Leftrightarrow (PY)' = A(PY) = PY' = (AP)Y \\ &\Leftrightarrow Y' = (P^{-1}AP)Y. \end{aligned}$$

□

Proposition III.10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. L'application :

$$\begin{aligned} R &: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t &\mapsto \exp(tA) \end{aligned}$$

est dérivable et on a :

$$R'(t) = AR(t) \quad \text{avec } R'(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Démonstration. On peut écrire

$$R(t) = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

On note $R_k(t) := \frac{1}{k!} t^k A^k$ et on a ainsi :

$$R'_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^k = AR_{k-1}(t) = A \sum_{k=0}^{+\infty} R'_k(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} AR_k(t) = AR(t).$$

□

Théorème III.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, les solutions du système homogène $X' = AX$ sont les fonctions :

$$\begin{aligned} S &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\mapsto \exp(tA) \cdot V \end{aligned}$$

où $V \in \mathbf{R}^n$, $V = (v_1, \dots, v_n)$ ou encore

$$V = v_1 E_1 + v_2 E_2 + \dots + v_n E_n$$

avec (E_1, \dots, E_n) la base canonique de \mathbf{R}^n .

Démonstration. On écrit :

$$S(t) = \exp(tA) \cdot V = \sum_{k=1}^n N_k(\exp(tA)) E_k.$$

On pose $Sk(t) = \exp(tA) E_k$ et on a :

$$S'(t) = \sum_{k=1}^n v_k S'_k(t) = \sum_{k=1}^n v_k AS_k(t) = AS(t).$$

On considère S une solution de $X' = AX$, soit :

$$\begin{aligned} F &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\mapsto f(t) = \exp(-tA) S(t) \end{aligned}$$

Alors :

$$F'(t) = A \exp(-tA)S(t) + \exp(-tA)S'(t) = -A \exp(-tA)S(t) + \exp(-tA)AS(t) = 0.$$

Dans la pratique, on va devoir intégrer $X' = AX$. Soit P une matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP = D + N$, B étant triangulaire, D diagonale et N nilpotente. On sait que PY est solution de $X' = AX$ si et seulement si Y est solution de $X' = BX$ (avec $B = P^{-1}AP$). On intègre le système $Y' = AY$, soit :

$$Y(t) = \exp(tB) \cdot V, \quad V \in \mathbf{R}^n.$$

On obtient les solutions de $X' = AX$ en écrivant $X' = PY$

$$X(t) = P \exp(tB) \cdot V, \quad V \in \mathbf{R}^n.$$

□

Proposition III.12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. L'ensemble des solutions du système $X' = AX$ est un espace vectoriel de dimension n .

Démonstration. Le fait que ce soit un espace vectoriel est évident. On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions, \mathcal{S} est un espace vectoriel. Soit u l'application :

$$u : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{S} \\ V \mapsto S$$

avec

$$S : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \\ t \mapsto \exp(tA) \cdot V$$

u est une application linéaire, on peut considérer :

$$\text{Ker } u = \{V \in \mathbf{R}^n, S_V = 0\}$$

où 0 représente l'application nulle

$$= \{V \in \mathbf{R}^n, \exp(tA) \cdot V = 0, \forall t \in \mathbf{R}\} = \{0_{\mathbf{R}^n}\}$$

car la matrice $\exp(tA)$ est inversible. u est donc inversible, c'est un isomorphisme donc \mathbf{R}^n et \mathcal{S} ont la même dimension. □

Les colonnes de la matrice $\exp(tA)$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions du système différentiel $X' = AX$.

Proposition III.13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonalisable sur \mathbf{R} . On note $V = (V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Alors les fonction $S_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$, pour $1 \leq i \leq n$, forment une base de l'espace des solutions du système $X' = AX$.

Démonstration. On montre que ces solutions sont linéairement indépendantes. En effet, si a_1, \dots, a_n sont des réels tels que

$$a_1 S_1(t) + \dots + a_n S_n(t) = 0.$$

Cette égalité est vraie pour tout t , elle est vraie en particulier pour $t = 0$ où elle devient :

$$a_1 V_1 + \dots + a_n V_n = 0,$$

ce qui implique $a_1 = \dots = a_n = 0$ car les V_i forment une base de \mathbf{R}^n . Comme l'espace des solutions est de dimension n , les S_i forment une base. Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs V_1, \dots, V_n . Si $X = PY$ est solution de $X' = AX$ alors Y est solution de $Y' = P^{-1}AP = D$ (où D est une matrice diagonale). On a :

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases},$$

d'où $Y(t) = (k_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, k_n e^{\lambda_n t})$. □

Comme corollaire du théorème, on va démontrer l'unicité de la solution sous conditions initiales.

Proposition III.14. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $t_0 \in \mathbf{R}$ et $X_0 \in \mathbf{R}^n$. Il existe une unique solution S_0 du système différentiel $X' = AX$ qui vérifie $S_0(t_0) = X_0$, c'est la fonction $S_0: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie par :*

$$S_0(t) = (\exp(t - t_0)A)X_0.$$

Démonstration. On pose :

$$S_0(t) = (\exp(t - t_0)A)X_0 = \exp(tA) \exp(-t_0A)X_0 = \exp(tA)Y_0.$$

D'après le théorème III.11, S est solution de $X' = AX$ et :

$$S_0(t_0) = \exp(0 \cdot A)X_0 = I_n X_0 = X_0.$$

S'il existe une autre solution S_1 de $X' = AX$ vérifiant $S_1(t_0) = X_0$ alors on a :

$$S_1(t) = \exp(tA) \cdot V \quad \text{et} \quad \exp(t_0A) \cdot V = X_0,$$

c'est-à-dire $V = \exp(-t_0A)X_0$ donc $V = Y_0$ et $S_1(t) = S_0(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On a donc démontré que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension n et que si l'on impose la condition $X(t_0) = X_0$, il y a unicité de la solution. □

2 Cas général, variation de la constante

On cherche maintenant à obtenir la solution générale du système $X' = AX + B$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $B: I \rightarrow \mathbf{R}^n$. Connaissant la solution générale du système homogène $X' = AX$, on va chercher une solution du système non homogène.

Soit (S_1, \dots, S_m) une base de l'espace vectoriel des solutions $X' = AX$, toute solution de ce système s'écrit donc :

$$S(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(t)$$

où les α_i , $1 \leq i \leq n$ sont des réels. On va chercher une solution du système $X' = AX + B$ sous la forme :

$$S(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) S_i(t)$$

où les fonctions α_i sont des fonctions dérivables sur I . On a alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$S'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) S'_i(t) + \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t) S_i(t) = AS(t) + \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t) S_i$$

car $S'_i(t) = AS_i(t)$, on identifie alors :

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i(t) S_i(t) = B(t).$$

Les colonnes de la matrice $R(t) = \exp(tA)$ forment une base de l'espace des solutions de $X' = AX$. À partir de cette base, on cherche une solution de $X' = AX + B$ sous la forme $S(t) = R(t)F(t)$, d'où

$$\begin{aligned} F &: I \rightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\mapsto F(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

on peut écrire sous la forme matricielle

$$S'(t) = R'(t)F(t) + R(t)F'(t) = AR(t)F(t) + R(t)F'(t) = AS(t) + R(t)F'(t),$$

ainsi, en identifiant, on a :

$$R(t)F'(t) = B(t),$$

ce qui nous donne :

$$F'(t) = R^{-1}(t)B(t) = \exp(-tA)B(t).$$

Il ne reste plus qu'à intégrer terme à terme $F'(t)$, c'est-à-dire les $\alpha_i(t)$.

3 Application aux équations différentielles d'ordre n

On va voir comment des méthodes d'algèbre linéaire permettent de résoudre des problèmes d'analyse. On considère une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (\text{III.4})$$

où la fonction inconnue est une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . On introduit les fonctions auxiliaires :

$$y = y_1 \quad \text{et} \quad y_i = y'_{i-1} = y^{(i-1)}, \quad \forall 2 \leq i \leq n.$$

Pour intégrer l'équation (III.4), on intègre le système :

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = -a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - \dots - a_n y_1 \end{cases},$$

c'est-à-dire $Y' = AY$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

III.4 Exemples en dimension 2

1 Systèmes homogènes

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Les solutions du système $X' = AX$ sont des applications de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^2 qui peuvent être représentées par des courbes paramétrées. On a :

$$X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y'(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases}.$$

Si l'application :

$$S : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto (x(t), y(t))$$

est solution de $X' = AX$, l'ensemble

$$S(\mathbf{R}) = \{S(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R}\}$$

est appelé *trajectoire*.

Les solutions constantes sont les applications $S(t) = X_0 \in \mathbf{R}^2$, pour tout $t \in \mathbf{R}$. On a donc $S'(t) = 0$, c'est-à-dire $AX_0 = 0$. Le vecteur X_0 est appelé *point d'équilibre du système*, le point $(0, 0)$ est toujours à l'équilibre.

Proposition III.15. *Les trajectoires du système $X' = AX$ sont disjointes ou confondues.*

Démonstration. Soient S_1 et S_2 deux solutions du système homogène $X' = AX$. On a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $S_1'(t) = AS_1(t)$ et $S_2'(t) = AS_2(t)$. Alors, ou bien $S_1(\mathbf{R}) \cap S_2(\mathbf{R}) = \emptyset$; ou bien il existe $V \in \mathbf{R}^2$ tel que $V \in S_1(\mathbf{R}) \cap S_2(\mathbf{R})$: on va montrer que dans ce cas, les trajectoires sont confondues, c'est-à-dire que l'on a $S_1(\mathbf{R}) = S_2(\mathbf{R})$.

D'après l'étude des systèmes homogènes, on sait que si S_1 et S_2 sont solutions, il existe des vecteurs V_1 et V_2 dans \mathbf{R}^2 tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$S_1(t) = \exp(tA)V_1 \quad \text{et} \quad S_2(t) = \exp(tA)V_2.$$

Si $V \in S_1(\mathbf{R}) \cap S_2(\mathbf{R})$ alors il existe $t_1 \in \mathbf{R}$ et $t_2 \in \mathbf{R}$ tels que :

$$V = S_1(t_1) = S_2(t_2) = \exp(t_1A)V_1 = \exp(t_2A)V_2.$$

Or, S_2 est l'unique solution prenant la valeur V en t_2 , on a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$S_2(t) = (\exp(t - t_2)A)V.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$S_2(t + t_2 - t_1) = \exp((t - t_1)A)V = (\exp(t - t_1)A) \exp(t_1A)V_1 = S_1(t).$$

Ce qui prouve que les trajectoires sont confondues car, en effet, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $S_1(t) \subset S_2(t)$ et $S_2(t) \subset S_1(t)$. \square

2 Équations différentielles du second ordre

On souhaite intégrer l'équation :

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = b(t) \tag{III.5}$$

où p et q sont des constantes réelles et où la fonction inconnue x est une fonction réelle à valeurs réelles et la fonction b est définie et continue sur un intervalle I de \mathbf{R} . Pour cela, on pose $y = x'$ et on intègre le système :

$$\begin{cases} x' = y \\ y = -qx - py + b(t) \end{cases} .$$

On est ainsi ramené à l'étude des systèmes de la section III.2.

Proposition III.16. *La fonction $s: I \rightarrow \mathbf{R}$ est solution de l'équation différentielle*

$$x'' + px' + qx = b$$

si et seulement si l'application $S: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par :

$$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(t) \\ s'(t) \end{pmatrix}$$

est solution du système $X' = AX + B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

La démonstration est une vérification immédiate et la matrice A est très simple à étudier. Son polynôme caractéristique est égale à :

$$P_A(X) = X^2 + pX + q.$$

L'espace vectoriel :

$$\mathcal{S} = \{X, X \text{ solution de l'équation } x'' + px' + q = 0 \text{ homogène d'ordre 2}\}$$

est de dimension 2, on peut en donner une base en fonction des racines du polynôme caractéristique.

- Si λ_1 et λ_2 sont deux racines distinctes alors l'espace des solutions de l'équation homogène est engendré par les fonctions $t \mapsto e^{\lambda_1 t}$ et $t \mapsto e^{\lambda_2 t}$.
- Si λ est une racine réelle double, il est engendré par $t \mapsto e^{\lambda t}$ et $t \mapsto te^{\lambda t}$.
- Si $a+ib$ et $a-ib$ sont deux racines complexes conjugués, il est engendré par $t \mapsto e^{at} \cos bt$ et $t \mapsto e^{at} \sin bt$.

III.5 Études d'exemples

On va commencer par un exemple de système linéaire avec second membre par la méthode de variation des constantes.

Exemple III.17. Soit le système

$$\begin{cases} x' = 3x + y + te^t \\ y' = -x + y + e^t \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

On note (III.7) le système homogène :

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases} \Leftrightarrow X' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = AX. \quad (\text{III.7})$$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est égal à :

$$P_A(X) = (3 - X)(1 - X) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_A(A) = 0$, c'est-à-dire $(A - 2I_2)^2 = 0$. On pose $N = A - 2I_2$, c'est une matrice nilpotente et on a $A = N + 2I_2$, comme N et I_2 commutent, c'est la décomposition de Dunford. La solution générale de l'équation homogène s'écrit :

$$X(t) = \exp(tA)V$$

où V est un vecteur de \mathbf{R}^2 . On calcule $\exp(tA)$:

$$\exp(tA) = \exp(t(N + 2I_2)) = \exp(tN + 2tI_2) = \exp(tN) \exp(2tI_2).$$

Or $(tN)^2 = t^2N^2 = 0$, d'où :

$$\exp(tA) = e^{2t} I_2 (I + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système (III.7) s'écrit donc :

$$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} a(t+1) + bt \\ -at + b(1-t) \end{pmatrix} = ae^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} + be^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

avec $V = (a, b) \in \mathbf{R}^2$. Les applications

$$t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes, elles forment une base de l'espace des solutions de (III.7).

On cherche une solution particulière de l'équation complète (III.6) en faisant varier le vecteur $V = (a, b)$, c'est-à-dire les constantes a et b que l'on cherche sous la forme de fonctions $a(t)$ et $b(t)$. En écrivant sous forme matricielle, on obtient $X(t) = \exp(tA)V(t)$, d'où :

$$X'(t) = A \exp(tA)V(t) + \exp(tA)V'(t).$$

Ainsi, on a $V'(t) = \exp(-tA)B'(t)$ d'où

$$V'(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -t+1 & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -t^2 \\ t^2 + t + 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche donc des fonctions $a(t)$ et $b(t)$ qui vérifient

$$\begin{cases} a'(t) = -e^{-t}t^2 \\ b'(t) = e^{-t}(t^2 + t + 1) \end{cases}$$

On les cherche sous la forme $e^{-t}P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme de degré 2 et l'on obtient

$$a(t) = (t^2 + 2t + 2)e^{-t} \quad \text{et} \quad b(t) = -(t^2 + 3t + 4)e^{-t}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation complète s'écrit :

$$X(t) = \underbrace{e^{2t} \left(\alpha \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \right)}_{\text{solution de (III.7)}} + \underbrace{e^{2t} \left(a(t) \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} + b(t) \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \right)}_{\text{solution de (III.6)}}$$

où α et β sont des constantes réelles, $a(t)$ et $b(t)$ les fonctions trouvées ci-dessus. On peut simplifier la solution particulière de (III.6) :

$$S_1(t) = e^{2t} \left(e^{-t}(t^2 + 2t + 2) \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} + e^{-t}(-t^2 - 3t - 4) \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -t-4 \end{pmatrix}.$$

La solution générale de l'équation (III.6) s'écrit donc

$$S(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -t-4 \end{pmatrix} + e^{2t} \left(\alpha \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \right)$$

où α et β sont des constantes réelles arbitraires.

On va maintenant étudier quelques exemples simples d'équations homogènes dans \mathbf{R}^2 qui nous amèneront à tracer des trajectoires (courbes paramétrées).

Exemple III.18. Considérons le système :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

C'est un cas où la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale. On résout les deux équations et on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = ae^t \\ y(t) = be^{2t} \end{cases}$$

où a et b sont des constantes réelles. Étudions plus précisément les trajectoires obtenus selon les valeurs des constantes a et b .

- Si $a = b = 0$, la solution du système obtenue est l'application nulle de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, sa trajectoire est réduite au point $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors pour tout $t \in \mathbf{R}$, $x(t) = 0$ et $y(t)$ est du signe de b . Ainsi, les trajectoires sont les demi-axes Ox et $-Ox$.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $y(t) = b\left(\frac{x(t)}{a}\right)^2$, les trajectoires sont donc les courbes d'équations $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, c'est-à-dire des branches de paraboles.

Exemple III.19. Considérons maintenant le système :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = x \end{cases}.$$

On a alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $x(t) = k$, k étant une constante réelle et donc $y(t) = kt + h$ où h est également une constante réelle. Les trajectoires sont les droites $x = k$, parcourues de $y = -\infty$ et $y = +\infty$ si $k > 0$ et dans l'autre sens si $k < 0$.

Exemple III.20. Nous allons maintenant étudier le système

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} .$$

Avant d'intégrer ce système en appliquant les méthodes du cours, on peut remarquer que les applications suivantes sont solutions :

$$S_1: t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_2: t \rightarrow \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} .$$

Vérifions que ces deux solutions sont linéairement indépendantes. Soient a et b des réels tels que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$aS_1(t) + bS_2(t) = 0,$$

alors, pour $t = 0$, on a :

$$aS_1(0) + bS_2(0) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui implique que $a = b = 0$. On a ainsi toutes les solutions du système comme combinaison linéaire de cette base de l'espace des solutions.

Si on ne pense à ces solutions évidentes, alors on résout le système $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On détermine les racines du polynôme caractéristique. On a :

$$P_A(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i),$$

ce polynôme n'a pas de racines réelles, par contre, il admet deux racines distinctes dans \mathbf{C} , la matrice A est donc diagonalisable dans \mathbf{C} et c'est cette diagonalisation que nous allons utiliser, sachant que les parties réelles et imaginaires des solutions complexes sont les solutions réelles recherchées. En effet si $Z(t) = X(t) + iY(t)$ alors :

$$Z'(t) = AZ(t) \Rightarrow X'(t) + iY'(t) = AX(t) + iAY(t)$$

et, comme A est une matrice à coefficients réels, on obtient par identification $X' = AX$ et $Y' = AY$. De plus, les solutions complexes sont conjuguées puisque le système est à coefficients réels.

On peut diagonaliser A ou plus simplement déterminer les vecteurs propres V_i et V_{-i} associées aux valeurs propres i et $-i$, on obtient ainsi deux solutions linéairement indépendantes, et la solution générale s'écrit :

$$Z(t) = \alpha e^{it}V_i + \beta e^{-it}V_{-i}$$

où α et β sont des constantes complexes. On a :

$$\begin{aligned} AV = iV &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix \\ iy \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = ix, \\ AV = -iV &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix \\ -iy \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = -ix, \end{aligned}$$

on prend $V_i = (1, i)$ et $V_{-i} = (1, -i)$. La solution générale s'écrit alors :

$$Z(t) = \alpha e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \beta e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

où α et β sont des constantes complexes. Cette équation s'écrit encore :

$$Z(t) = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

La solution générale réelle s'écrit donc

$$S(t) = a \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

où a et b sont des constantes réelles.

Remarquons que, comme les solutions complexes sont conjuguées deux à deux, une combinaison linéaire de deux solutions complexes indépendantes fournit une combinaison linéaire réelle de deux solutions réelles indépendantes (et non de quatre).

Étudions maintenant la forme des trajectoires, soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, considérons la solution S définie par $S(t) = (x(t), y(t))$ et :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t + b \sin t \\ y(t) = -a \sin t + b \cos t \end{cases}.$$

Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (a \cos t + b \sin t)^2 + (-a \sin t + b \cos t)^2 \\ &= a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t + 2ab \cos t \sin t + a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t - 2ab \sin t \cos t \\ &= (a^2 + b^2)(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la trajectoire de S est le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple III.21. Nous allons maintenant, à partir du système étudié dans l'exemple III.20, intégrer l'équation du second ordre $x'' + x = 0$. Les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$ sont deux solutions linéairement indépendantes.

Écrivons l'équation sous forme de système linéaire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

ou encore $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = (x, x')$. On retrouve les solutions de notre système précédent *via* la matrice $R(t) = \exp(tA)$, c'est-à-dire après calculs :

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes du système $X' = AX$. La solution générale s'écrit :

$$S(t) = a \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

Si l'équation a un second membre, c'est-à-dire, si l'on veut intégrer $x'' + x = f(x)$ où f est une fonction réelle, continue, les solutions seront cherchées en faisant varier les constantes a et b . Les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ étant obtenue par identification en écrivant :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = R(-t) \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a'(t) = -\sin(t)f(t) \\ b'(t) = (\cos t)f(t) \end{cases}.$$

III.6 Exercices

Exercice III.1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A .
4. Déduire une base de \mathbf{R}^3 dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire la décomposition de Dunford de B .

5. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}.$$

Exercice III.2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $A_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ la matrice suivante :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α .

On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 associé à la matrice A .

5. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A .
6. Démontrer que f admet un plan stable (c'est-à-dire f -invariant).
7. Démontrer qu'il existe une base de \mathbf{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

8. Écrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
9. Pour $t \in \mathbf{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.
10. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

Exercice III.3. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 \\ 7 & -3 & -1 \\ 21 & -12 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice III.4. Résoudre les systèmes différentiels

1.

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = a \\ y(0) = b \\ z(0) = c \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) + 2y(t) + z(t) \\ y'(t) = -11x(t) + 6y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - 3y(t) + z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice III.5. Résoudre les systèmes suivants

$$1. \begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = x - 2y + 2 \cos t \\ y' = x - y + \sin t + \cos t \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' = -x + 4y + 4e^{-t} \\ y' = -x + 3y + 2e^{-t} \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] J.-C. SAVIOZ, *Algèbre linéaire, cours et exercices*, Vuibert (2003).
- [2] F. BORIES-LONGUET, *Algèbre linéaire*, Ellipses Marketing.
- [3] F. COTTET-EMARD, *Algèbre linéaire et bilinéaire*, De Boeck.
- [4] J. PICHON, *Algèbre linéaire*, Ellipses Marketing.
- [5] A. CALVO & B. CALVO, *Algèbre linéaire*, Dunod.

Index

- application
 - linéaire, 1, 10
 - multilinéaire, 1
- automorphisme, 10
- cofacteur, 13
- comatrice, 14
- décomposition
 - de Dunford
 - version endomorphisme, 36
 - version matricielle, 36
- déterminant
 - d'un système de vecteurs, 6
 - d'une matrice carrée, 7
- endomorphisme, 10
 - diagonalisable, 24
 - nilpotent, 35
- exponentielle
 - d'une matrice, 43
 - développement en série, 43
- forme, 1
 - alternée, 2
 - bilinéaire, 1
 - linéaire, 1
- groupe
 - des permutations, 2
- image, 15
- isomorphisme, 10
- lemme
 - des noyaux, 34
- matrice
 - carrée, 7
 - des cofacteurs, 14
 - diagonale, 24
 - diagonalisable, 25
 - extraite, 18
 - nilpotente, 35
 - trace, 23
 - triangulaire supérieure, 27
 - trigonalisable, 27
- matrices
 - équivalentes, 17
- mineur, 13
- permutation
 - signature, 3
- point
 - d'équilibre du système, 51
- polynôme, 21
 - caractéristique, 23
 - fonction, 21
 - unitaire, 32
- rang
 - d'un système, 16
 - d'une application linéaire, 15
 - d'une matrice, 15
- sous-espace
 - caractéristique, 34
 - propre, 21
 - stable, 28
- théorème
 - de Bézout, 34
 - de Cayley-Hamilton, 30
- trajectoire, 51
- transposition, 3

- valeur
 - propre, 21
- variation
 - de la constante, 50
- vecteur
 - propre, 21
- vecteurs
 - linéairement dépendants, 2