Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

M206-IAN : Introduction à l'analyse numérique

Notes de cours par Clément Boulonne

L2 Mathématiques **2007 - 2008**

Table des matières

Introduction

Analyse numérique : résultat numérique d'un problème concert. On veut remplacer une solution exacte par une solution approchée sous forme de nombres. Pour cela, trois étapes :

- Existence et unicité d'une solution.
- Mettre au point des méthodes (algorithmes) qui permettent de calculer des solutions approchés et évaluer les erreurs.
- Faire les calculs sur ordinateurs (gestion de la mémoire, temps de calcul).

Exemples

→ Métérologie
→ Chimie
→ Aéronautique
→ Economie
→ Modélisation
→ Google

Plan du cours

I/ Interpolation : A partir de certains points du graphe d'une fonction compliquée, on veut retrouver une fonction polynomiale passant par ses points.

II/ Calcul d'intégrales : on ne peut pas exprimer certaines primitives de fonctions par des fonctions élémentaires (Exemple : e^{-x^2} ou $\frac{\sin x}{x}$), on trouve alors une approximation.

III/ Résolution des équations d'ordre supérieur : (comme $x^1 0 + x^2 + x + 1 = 0$). On trouve alors des approximations numériques des racines (par itération).

Chapitre 1

Interpolation polynômiale

1.1 Définition du problème d'interpolation

Soit f une fonction donnée sur laquelle on ne dispose que d'informations partielles (par exemple, les valeurs de f en certains points). Soit F un ensemble de fonctions "faciles" à utiliser ou à calculer.

On considère $\tilde{f} \in F$ tel que :

$$\tilde{f}(x_i) = f(x_i) \qquad i = 1, ..., k$$

On choisit $F = \mathbb{R}_n[x]$ (ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré $\leq n$).

Pourquoi les polynômes ?

1. Faciles à calculer (somme et produit)
2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$
3. Comportement local de la fonction : les premiers termes du développement de Taylor forment un polynôme.
4. Théorème de Weirestrass (**Théorème 1.1.1.**)

Theorème 1.1.1. *Soit f continue sur $[a, b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_n$ polynôme (de degré suffisament grand) tel que :*

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$$

1.2 Représentation des polynômes dans différentes bases

Base canonique

$$1, x, ..., x^n$$

Base centrée en un point $c \neq 0$

$$1, (x - c), ..., (x - c)^n$$

Démonstration. 1. Famille génératrice :

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + ... + \frac{p^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\xi - c)^{n+1}$$

avec $\xi \in]c, x[$.

2. Famille libre :

$$a_0 + a_1(x-c) + ... + a_n(x-c)^n = 0$$

Donc $a_n = 0$ (coefficient de x^n) $\Rightarrow a_{n-1} = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow a_0 = 0$

□

Base de Newton

Soit $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$, n points deux à deux distincts, la base associée aux abscisses x est donnée par :

$$1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), ..., \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)}_{\text{de degré } n}$$

Démonstration. 1. Famille génératice :

Notation.

$$\begin{cases} \gamma_0(x) = 1 \\ \gamma_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) \qquad i = 1..n \end{cases}$$

Soit $p \in \mathbb{R}_n[x]$. On doit trouver $\alpha_0, ..., \alpha_n$ tel que $P(x) = \alpha_0\gamma_0 + .. + \alpha_n\gamma_n$. On connaît α_n donc :

$$P - \alpha_n\gamma_n = \alpha_0\gamma_0 + ... + \alpha_{n-1}\gamma_{n-1}$$

α_{n-1} est un coefficient pour x^{n-1}.
A la dernière étape, on a :

$$P - \alpha_n\gamma_n - ... - \alpha_1\gamma_1 = \alpha_0\gamma_0 = \alpha_0$$

2. Famille libre : on suppose $\alpha_0\gamma_0 + ... + \alpha_n\gamma_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0 \Rightarrow \alpha_{n-1} = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow \alpha_0 = 0$.
tout polynôme $p \in \mathbb{R}_n[x]$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\gamma_i(x) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$$

Pour $j = 0$:

$$\prod_{j=0}^{-1}(x-x_j) = 1$$

□

Remarque. 1. Si $x_0 = ... = x_{n-1} = 0$, on retrouve une base canonique.

2. Si $x_0 = ... = x_{n-1} = c$, on retrouve une base centrée au point c.

3. Tout dépend de l'ordre des abscisses : $n!$ permutations donnent $n!$ bases de Newton.

1.3 Evalution d'un polynôme, méthode de Horner

Soit $p(x) = a_0 + ... + a_n x^n \in \mathbb{R}_n[x]$. On a que les $a_i x^i$ constituent i multiplications. Au total, on aura $\frac{n(n+1)}{2} \simeq \frac{n^2}{2}$. De plus, il y a n additions.

Pour avoir moins d'opérations à faire, on réécrit le polynôme de la façon suivante :

$$(*) : \begin{cases} p(x) &= a_0 + x(a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1}) \\ &= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + a_3 x + ... + a_n x^{n-2})) \\ & \vdots \\ &= a_0 + (x(a_1 + x(...(a_{n-1} + x a_n)...))) \end{cases}$$

$(*)$ s'appelle l'algorithme de Horner :

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_{n-1} = a_{n-1} + x b_n \\ \vdots \\ b_i = a_i + x b_{i+1} \\ \vdots \\ b_0 = a_0 + b_1 x \end{cases}$$

On a alors $b_0 = p(x)$.

On peut aussi réécrire le polynôme dans la base de Newton.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1}) \\ &= a_0 + (x - x_0)(a_1 + a_2(x - x_1) + ... + a_n(x - x_1)...(x - x_n)) \\ &\vdots \\ &= a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)(a_2 + (x - x_2)(a_3 + ... + a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n...))) \end{aligned}$$

L'algorithme est donc le suivant :

$b_n = a_n$
Pour $i = n - 1..0$ faire
    $b_i = a_i + (x - x_i) b_{i+1}$
fin pour
$b_0 = p(x)$

Exemple 1.3.1. Soit $p(x) = 1 - 2x + 3x^2 + x^5$. On cherche à calculer $p(x)$ en $x = -2$. Sous forme d'Horner :

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + x(-2 + 3x + x^4) \\ &= 1 + x((2 + x(3 + x^3))) \\ &= 1 + x(-2 + x(3 + x(0 + x^2))) \\ &= 1 + x(-2 + x(3 + x(0 + x(0 + x)))) \end{aligned}$$

i	4	3	2	1	0
b_i	-2	4	-5	8	-15

$\Rightarrow \quad p(-2) = -15$

1.4 Interpolation de Lagrange

Soit f une fonction continue à valeurs réelle dans $[a, b]$. Soient $x_0, ..., x_n$ $(n+1)$ points deux à deux distincts.

On cherche alors un polynôme p de degré $\leq n$ tel que $p(x_i) = f(x_i)$, $\forall i = 0..n$. On dit que p interpole f aux points $x_0, ..., x_n$.

Theorème 1.4.1. *Il existe un unique polynôme de* deg $\leq n$ *qui interpole* f *en les points* $x_0, ..., x_n$

Première démonstration pour le ***Théorème 1.4.1.*** Soit $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ alors :

$$\begin{array}{c}\text{système linéaire}\\ \text{de } n+1 \text{ équations}\\ \text{à } n+1 \text{ inconnues}\end{array} : \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & a_1 x_0 & + & ... & + & a_n x_0^n & = & f(x_0) \\ a_0 & + & a_1 x_1 & + & ... & + & a_n x_1^n & = & f(x_1) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_0 & + & a_1 x_n & + & ... & + & a_n x_n^n & = & f(x_n) \end{array}\right.$$

d'inconnues $a_0, a_1, ...a_n$. Le déterminant du système est un déterminant de type Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i,j=0, i<j}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Les x_i sont distincts donc il y a une unique solution. □

Deuxième démonstration pour le ***Théorème 1.4.1.***

- Unicité : supposons que p et q solutions. Alors :

$$(p-q)(x_i) = 0 \qquad \forall = \{0, ..., n\}$$

  On a $p - q$ un polynôme de degré n. Il a $(n+1)$ zéros. Donc $(p-q)$ est le polynôme nul. Donc $p = q$.
- Existence : On pose :

$$l_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

  avec $i = 0..n$ (Polynômes de Lagrange). En x_j :

$$\begin{cases} l_i(x_j) = 0 \text{ si } j \neq i \\ l_i(x_j) = 1 \text{ si } j = i \end{cases} = \delta_{ij} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

  p s'écrit donc :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

  avec $\deg p \leq n$.

□

Theorème 1.4.2. *Les* $(n+1)$ *polynômes* $l_i(x)$ *forment une base de* $\mathbb{R}_n[x]$.

Démonstration. Le polynôme qui interpole p en $x_0, ..., x_n$ est p lui-même.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) l_i(x)$$

Donc $(l_i)_{i=0,...,n}$ est une famille génératrice.

Ensuite, on suppose qu'on a une combinaison linéaire :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_i(x) = 0$$

On estime $x = x_k$, ce qui donne $\alpha_k = 0$, $\forall k \in \{0, ..., n\}$. □

Remarque (Désavantages de cette méthode). 1) Pour améliorer le résultat, on rajoute des points d'interpolation mais on doit recalculer tous les polynômes l_i.

2) Pas pratique au niveau de calcyl : pour évaluer simplement les $l_i(x)$, cela nous coutera $2n$ multiplications. Donc au total :

$$2n(n+1) \text{ multiplications}$$

1.5 Différences divisées (Méthode de Newton)

Les différences divisées est plus efficace pour construire les interpolants polynomiaux. Soit p_n le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, ..., x_n$.

$$p_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + A_n(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

$$q_k(x) = A_0 + ... + A_k(x - x_0)...(x - x_{k-1})$$

Donc :

$$p_n(x) = q_k(x) + (x - x_0)...(x - x_k) r(x)$$

avec $\deg r = n - k - 1$ et :

$$i = 0, 1, ..., k \; q_k(x_i) = p_n(x_i) = f(x_i)$$

avec $\deg q_k \leq k$.

Conclusion : q_k est le polynôme interpolant de f aux points $x_0, ..., x_k$.

p_n peut se construire pas à pas : $p_0, p_1, p_2, ..., p_n$. On a cette formule :

$$p_n = p_{n-1} + A_n(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

Remarque. A_n est le coefficient dominant de p_n.

Définition 1.5.1. La différence divisée d'ordre n de f aux points $x_0, ..., x_n$ est le coefficient A_n de x^n dans le polynôme p_n de degré $\leq n$ qui interpole f aux poitns $x_0, ..., x_n$.

Notation. $A_n = f[x_0, x_1, ..., x_n]$

Remarque. 1) La différence divisée ne dépend pas de l'ordre des points.

2) $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f[x_0, ..., x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$

Calcul reccursif des différences divisées

Theorème 1.5.1.

$$
\begin{cases}
f[x_0] = f(x_0) \\
f[x_0, ..., x_k] = \dfrac{f[x_1, ..., x_k] - f[x_0, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0}
\end{cases}
$$

Démonstration. $f[x_0] = f(x_0)$ (par défintion). Par réccurence, on définit :

- p_{k-1} : polynôme de degré $\leq k-1$ qui interpole f aux points $x_0, ..., x_{k-1}$.
- q_{k-1} : polynôme de degré $\leq k-1$ qui interpole f aux points $x_1, x_2, ..., x_k$.
- p_k : polynôme qui interpole f en $x_0, x_1, ..., x_k$.

$$p_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} q_{k-1}(x) + \frac{x_k - x}{x_k - x_0} p_{k-1}(x)$$

On vérifie la formule :

$$p_k(x_0) = p_{k-1}(x_0) = f(x_0)$$

$$p_k(x_k) = q_{k-1}(x_k) = f(x_k)$$

Pour $i = 1, ..., k-1$:

$$p_k(x_i) = \frac{x_i - x_0}{x_k - x_0} f(x_i) + \frac{x_k - x_i}{x_k - x_0} f(x_i) = \frac{x_i - x_0 + x_k - x_i}{x_k - x_0} f(x_i) = f(x_i)$$

et le degré de $p_k \leq k$. Le coefficient de p_k :

$$f[x_0, ..., x_k] = \frac{f[x_1, ..., x_k]}{x_k - x_0} - \frac{f[x_0, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

D'où la formule. □

Table des différences divisées

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
x_0 & \boxed{f(x_0)} & & & \\
 & & \boxed{f[x_0, x_1]} & & \\
x_1 & f(x_1) & & \boxed{f[x_0, x_1, x_2]} & \\
 & & f[x_1, x_2] & & \boxed{\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}} \\
x_2 & f(x_2) & & \boxed{f[x_1, x_2, x_3]} & \\
 & & \boxed{f[x_2, x_3]} & & \\
x_3 & \boxed{f(x_3)} & & &
\end{array}
$$

Remarque. 1) Le calcul se fait colonne par colonne

2) Les coefficients de la fomrule de Newton se lisent sur la première diagonale descendante.

3) Si on inverse l'ordres points, les coefficients se lissent sur la diagonale acendante.

Si on veut rajouter un points x_4, on rajoute alors une diagonale de degré supplémentaire.

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
x_0 & f(x_0) & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0,x_1,x_2] & \\
 & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1,x_2,x_3] & \\
 & & f[x_2,x_3] & & f[x_1,x_2,x_3,x_4] \\
x_3 & f(x_3) & & f[x_2,x_3,x_4] & \\
 & & f[x_3,x_4] & & \\
x_4 & f(x_4) & & &
\end{array}
$$

Exemple 1.5.1. $\cos\left(\pi\frac{x}{2}\right)$ aux points $-1, 0, 1, 2, 3$. On construit la table des différences divisées :

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
-1 & 0 & & & & \\
 & & \frac{0-1}{-1-0} = 1 & & & \\
0 & 1 & & \frac{1-(-1)}{-1-1} = -1 & & \\
 & & \frac{1-0}{0-1} = -1 & & \frac{-1-0}{1-2} = \frac{1}{3} & \\
1 & 0 & & \frac{-1-(-1)}{0-2} = 0 & & \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{-1-3} = 0 \\
 & & \frac{0+1}{1-2} = -1 & & \frac{0-1}{0-3} = \frac{1}{3} & \\
2 & -1 & & \frac{-1-1}{1-3} = 1 & & \\
 & & \frac{-1-0}{2-3} = 1 & & & \\
3 & 0 & & & &
\end{array}
$$

$$p_n(x) = (x+1) - (x+1)(x) + \frac{1}{3}(x+1)(x)(x-1)$$

1.6 Erreur en interpolation

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0, ..., x_n$ points dinstincts de $[a,b]$, p_n polynôme d'interpolation de f en $x_0, ..., x_n$.

L'erreur d'interpolation $e_n(x) := f(x) - p(x)$.

Proposition 1.6.1. *Soit $\overline{x} \in [a,b]$, $\overline{x} \notin \{x_0, ..., x_n\}$:*

$$e_n(\overline{(x)}) = f[x_0, ..., x_n, \overline{x}] \prod_{j=0}^{n} (\overline{x} - x_j)$$

Démonstration. Soit p_{n+1} le polynôme qui interpole f en $x_0, ..., x_n, \overline{x}$:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, ..., x_n, \overline{x}] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

On a alors en $\overline{x}$:

$$f(\overline{x}) = p_{n+1}(\overline{x}) = p_n(\overline{x}) f[x_0, ..., x_n, \overline{x}] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

□

Remarque. La formule proposée en **Proposition 1.6.1.** nécessite la connaissance de f en $\overline{x}$.

Theorème 1.6.2 (Formule de Cauchy pour l'erreur)**.** *a) si $f \in \mathcal{C}^n(]a,b[)$ alors $\exists \xi \in]a,b[$ tel que $f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.*

b) si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ alors $\forall x \in [a,b]$, $\exists \xi \in]a,b[$ (ξ dépend de x) tel que :

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Démonstration. 1. $e_n(x) = (f - p_n)(x)$ a $n+1$ zéros dans $[a,b]$. Par le théorème de Rolle, $(f-p_n)'(x)$ a n zéro sur $]a,b[$ et $(f-p_n)^{(n)}(x)$ a un seul zéro en $\xi \in]a,b[$. On a ainsi :

$$f^{(n)}(\xi) = p_n^{(n)}(\xi) = n! f[x_0, ..., x_n]$$

2. Avec $x \in \{x_0, ..., x_n\}$, la formule est vraie. Si $x \notin \{x_0, ..., x_n\}$, on utilise la **Proposition 1.6.1.**, on remplace $f[x_0, ..., x_n]$ par $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

□

Corollaire. *Sous les hypothèses du* ***Théorème 1.6.2.*** *:*

$$|e_n(x)| \leq \max_{\xi \in [a,b]} \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!} \left| \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right|$$

Exemple 1.6.1. x_0, x_1, p_1 interpole lui-même.

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2} (x - x_0)(x - x_1)$$

On suppose que $|f''(x)| \leq M$ sur $[x_0, x_1]$.

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{2} \max_{x \in [x_0, x_1]} |(x - x_0)(x - x_1)|$$

Donc :

$$|f - p(x)| \leq \frac{M}{2} \left| \left(\frac{x_0 - x_1}{2} \right)^2 \right| \leq \frac{M(x_0 - x_1)^2}{8}$$

Exemple 1.6.2. Soit $f(x) = e^x$ sur $[0,1]$. On prend comme abscisses d'interpolation : $-c, 0, c$ avec $c \in]0,1[$

$$e_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} (x + c) x (x - c)$$

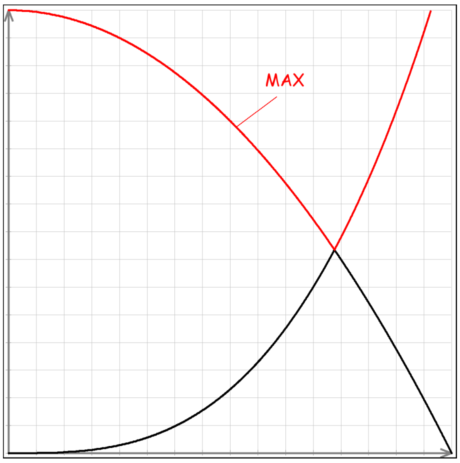
$$|e_2(x)| = \frac{e}{6} \max_{x \in [-1,1]} |x(x^2 - c^2)|$$

Soit $g(x) = x(x^2 - c^2)$ et $g'(x) = 3x^2 - c^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}$

$$\max_{x \in [-1,1]} \{|g(x)|\} = \max \left\{ \left| g\left(\frac{c}{\sqrt{3}} \right) \right|, |g(1)| \right\} = \max \left\{ \frac{2c^3}{3\sqrt{3}}, 1 - c^2 \right\}$$

Le c optimal est optenu par résolution de l'équation :

$$\frac{2c^3}{3\sqrt{3}} = 1 - c^2 \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Donc :

$$|e_2(x)| \leq \frac{e}{6}\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{e}{24}$$

Choix optimal des abscisses

Theorème 1.6.3. *Le choix optimal des abscisses est donné par :*

$$\min_{\{x_0,\ldots,x_n\}} \max_{x\in[a,b]} \left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right|$$

c'est-à-dire :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

sur $[-1, 1]$, $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$.

Chapitre 2

Intégration numérique

Problème-But

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ mais on ne sait pas calculer simplement (soit que f n'a pas de primitives, soit que f est défini pour cetaines valeurs) :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

On veut approximer $I(f)$. L'idée sera :

1. d'approcher $I(f)$ par $I(p)$ avec p interpolant polynoimal de f.
2. de découper $[a,b]$ en sous-intervalles et on répète le processus.

2.1 Formule de type interpolation

Soit $x_0, ..., x_n \in [a,b]$. Alors $I(f) \simeq I_n(f) = I(p_n)$ où p_n polynôme d'interpolation de f en $x_0, ..., x_n$.

Proposition 2.1.1. *Soient $l_0, ..., l_n$ les polynomes de Lagrange associés aux abscisses $x_0, ..., x_n$. Alors :*

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \text{ avec } A_i = \int_a^b l_i(x_i)dx$$

Remarque. Les coefficients A_i sont indépendants de la fonction f.

Si on prend des points équidistants $x_j = x_0 + jh$, cela s'appelle la formule de Newton-Cotes.

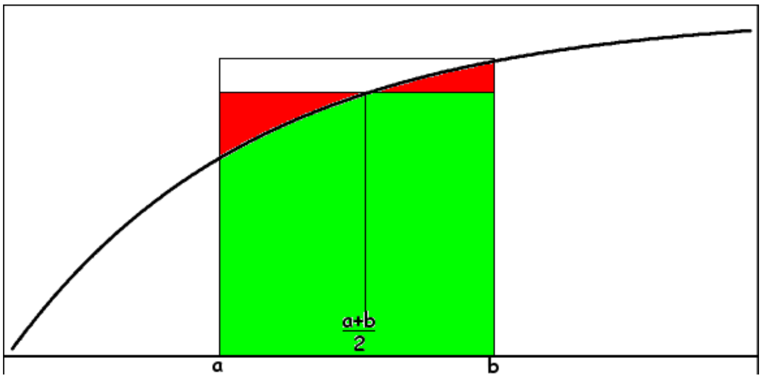
Démonstration.

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

$$I_n(f) = I(p_n) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx$$

□

Exemple 2.1.1. Pour $n = 0$, c'est la formule du point milieu.

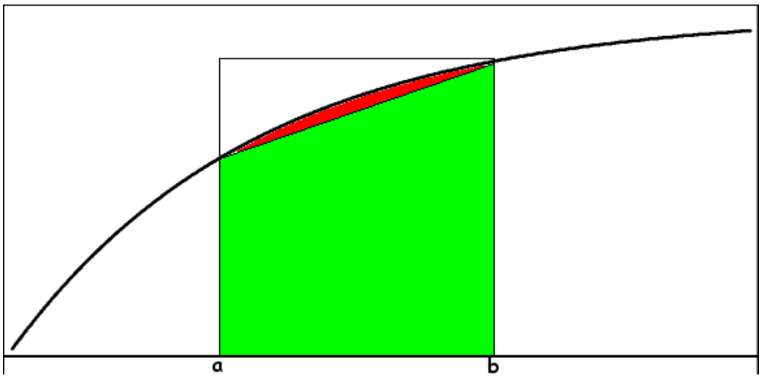


$x_0 = \frac{a+b}{2}$, $A_0 = I(l_0(x)) = b - a$ et :

$$I_0(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Remarque. La formule est exacte pour les polynômes de degré 0.

Pour $n = 1$, c'est la formule des trapèzes.



On a ainsi :

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-b}{a-b}$$

$$I(l_0) = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]_a^b = -\frac{1}{a-b}\frac{(a-b)^2}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Par symétrie : $l_1(x) = I(l_1) = \frac{b-a}{2}$. Donc :

$$I_1(f) = I(p_1) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = \underbrace{(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}_{\text{surface de trapèze}}$$

Remarque. La formule des trapèzes est axacte pour un polynôme de degré 1.

Pour $n = 2$ c'est la formule de Simpson. On prend $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. On a alors :

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{2}{(b-a)^2}\left(x - \frac{a-b}{2}\right)(x-b)$$

$$I(l_0)(x) = \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b \left(x - \frac{a-b}{2}\right)(x-b) dx$$

On pose $t = x - b$.

$$\begin{aligned} I(l_0)(x) = & \frac{2}{(b-a)^2}\int_{a-b}^{0}\left(t+\frac{b-a}{2}\right)tdt = \frac{2}{(b-a)^2}\left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_{a-b}^{0}+\frac{b-a}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{a-b}^{0}\right) \\ = & \frac{2}{(b-a)^2}\left(\frac{-(a-b)^3}{3}-\frac{b-a}{2}\frac{(a-b)^2}{2}\right) = \frac{2}{(b-a)^2}\left(-\frac{1}{2}(a-b)^3\right) = \frac{b-a}{6} \end{aligned}$$

Par symétrie : $I(l_2) = \frac{b-a}{6}$.

Pour calculer $I(l_1)$, on prend $f(x) = 1$ (voir *Remarque* précdente sur l'indépendance des A_i par rapport à f)

$$\int_a^b f(x)dx = I(p_2) = A_0 f(a) + A_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_2 f(b)$$

$$\Leftrightarrow b - a = \frac{b-a}{6} + A_1 + \frac{b-a}{6}$$

$$\Leftrightarrow A_1 = \frac{2}{3}(b-a)$$

La formule est donc :

$$I_2(f) = (b-a)\left[\frac{f(x)}{6}+\frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(b)}{6}\right]$$

Remarque. La formule de Simpson est exacte pour des polynômes de degré 2.

Estimation de l'erreur - Cas général

$$E_n(f) := I(f) - I_n(f) = \int_a^b (f-p_n)(x)dx$$

On utilise la formule de Cauchy vue au **Chapitre 1**

Rappel (Formule de Cauchy). Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ alors :

$$|f - p_n(x)| = \max_{\xi\in[a,b]}\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}|x-x_j|$$

Proposition 2.1.2. *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$*

$$|E_n(f)| \leq \max_{\xi\in[a,b]}\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}\int_a^b\left|\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right|dx$$

Remarque. On remarque que $E_n = 0$ si f est un polynôme de degré n.

Estimation de l'erreur - Cas particulier des points symétriques

Proposition 2.1.3. *Si $x_0, ..., x_n$ sont symétriques (c'est-à-dire $\forall j, x_j - a = x_{n-j} - b$) et n pair. Alors pour tout $f \in \mathcal{C}^{n+2}$:*

$$|E_n(f)| \leq \max_{\xi\in[a,b]}\frac{|f^{(n+2)}(\xi)|}{(n+2)!}\int_a^b\prod_{j=0}^{n+1}|x-x_j|dx$$

avec $x_{n+1} \in [a,b]$ distincts de $x_0, ..., x_n$.

Démonstration. Soit p_{n+1} interpole de $x_0, ..., x_{n+1}$ alors :

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, ..., x_{n+1}] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

et :

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f)$$

On montre que $I(p_n) = I(p_{n+1})$, on aura ainsi $E_n(f) = I(f) - I(p_{n+1})$ et on utlise la **Proposition 2.1.2.**

Démonstration de $I(p_n) = I(p_{n+1})$:

$$I(p_{n-1} - p_n) = \int_a^b \underbrace{f[x_0, ..., x_{n+1}]}_{=c} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)dx \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} (*) &= c\int_a^b \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)dx = c\int_a^b \prod_{j=0}^{n}(x - a + b + x_{n-j})dx \\ &= (-1)^{n+1}c\int_a^b \prod_{j=0}^{n}(a + b - x_{n-j} - x)dx \qquad (**) \end{aligned}$$

On pose $y = a + b - x$.

$$(**) = -(-1)^{n+1}c\int_a^b (y - x_{n-j})dy = -c\int_a^b (y - x_{n-j})dy = -c\int_a^b (x - x_j)dx = -(*)$$

□

Exemple 2.1.2. On pose $M_k = \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(k)}(\xi)|$.

- Pour $n = 0$, point milieu. On a $x_0 = \frac{a+b}{2}$

$$E_0(f) \leq \max_{\xi} \frac{f^{(2)}(\xi)|}{2!} \int_a^b (x - x_0)(x - \overline{x})dx$$

  On prend alors $\overline{x} = x_0$.

$$\begin{aligned} E_0(f) &\leq \max_{\xi} \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \\ &\leq \max_{\xi} \frac{f^{(2)}(\xi)}{6} \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b \\ &\leq \max_{\xi} \frac{f^{(2)}(\xi)(b-a)^3}{24} = \frac{M_2}{24}(b-a)^3 \end{aligned}$$

- Pour $n = 1$ (trapèze), on a :

$$E_1(f) \leq \max_{\xi} \frac{|f^{(2)}(\xi)}{2} \int_a^b (x - a)(x - b)dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{\xi} \max |f^{(2)}(\xi)| \frac{(b-a)^3}{12} \\ &\leq \max_{\xi} \frac{M_2}{12}(b-a)^3 \end{aligned}$$

– Pour $n = 2$ (Simpson). n est pair et les points sont symétriques.

$$E_2(f) \leq \frac{M_4}{4!} \int_a^b (x-a)(x-(a+b)/2)(x-b)(x-\overline{x})$$

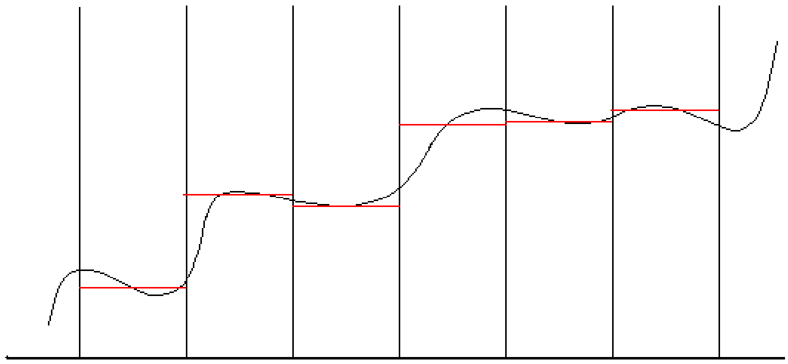
On prend $\overline{x} = x_1 = \frac{a+b}{2}$.

$$E_2(f) = \frac{M_4}{4!} \int_a^b (x-a)(x-b)(x-(a+b)/2)^2 dx \leq \frac{M_4}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

2.2 Méthodes composites

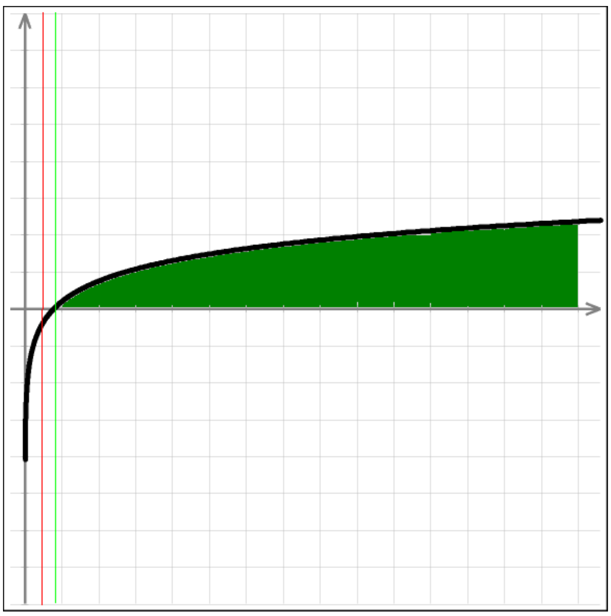
2.2.1 But

1) Découper l'intervalle d'intégration en N sous-intervalles.
2) Appliquer la méthode sur les sous-intervalles.
3) On approche f par une fonction polynomial par morceaux.



Remarque. On peut utiliser une répartition équidistante ou une répartition adapté à la fonction.

Exemple 2.2.1. $\ln(x)$ sur $[\frac{1}{2}, 20]$



2.2.2 Méthode

Nombre de sous-intervalles : $n = \frac{b-a}{h}$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx}_{I_k} \simeq \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{I}_k$$

Exemple 2.2.2. Si on choisit la méthode du point milieu alors :

$$\tilde{I}_k = f(a + (k + 1/2)h)$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k + 1/2)h)$$

2.2.3 Erreur

L'erreur totale est la somme des erreurs comises sur chaque sous-intervalle :

$$|E(f)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |E_k(f)|$$

Erreur Sur un intervalle de longueur h si n est pair, l'erreur est d'ordre de h^{n+3} et n impair, l'erreur est de l'ordre de h^{n+2}.

Sur un intervalle de longueur $b - a = nh$. Pour n paire, l'erreur est d'ordre h^{n+2} et pour n impair, l'erreur est de l'ordre h^{n+1}.

Chapitre 3

Méthodes itératives pour la résolution d'équations

Problème-But-Méthode

Soit f une fonction continue. On veut trouver x tel que $f(x) = 0$.

Exemple 3.0.1.
- $x = e^{-x}$
- Equation polynomiale de degré ≥ 5.

En fait, on trouve une approximation de la racine.

Méthode Construire une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers une racine.

3.1 Conditions de construction de la suite

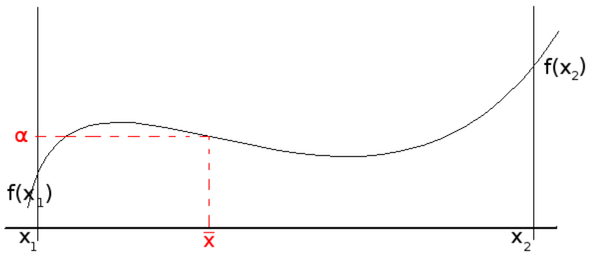
Conditions

1) Il faut que la fonction f ait au moins une racine pour trouver la suite.
2) Pour une suite donnée, il faut étudier la convergence de la suite.
3) Pour une suite donnée, il faut trouver un critère d'arrêt.
4) Il faut aussi que la vitesse de convergence soit assez rapide.

Theorème 3.1.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle. Si pour $x_1 \leq x_2$ dans $[a, b]$, on a :*

$$f(x_1) \leq \alpha \leq f(x_2)(ou\ f(x_2) \leq \alpha \leq f(x_1))$$

alors $\exists \overline{x} \in [a, b]$ tel que $f(\overline{x}) = \alpha$.



Exemple 3.1.1. $f(x) = x^3 - x - 1$ sur $[1, 2]$:

$$f(1) = -1 \qquad f(2) = 5$$

donc $\exists \overline{x} \in [1, 2]$, $f(\overline{x}) = 0$. Est-ce qu'il existe plusieurs solutions !

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

et $f'(x) > 0$ sur $[1, 2]$. La fonction est croissante sur $[1, 2]$ donc elle ne peut s'annuler qu'une seule fois.

3.2 Méthode de dichotomie

Algorithme 3.2.1. On considère f continue sur $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$.
Initialisation : On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
Itération : Pour n allant de 1 vers ...
si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$
alors $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$
sinon $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$
$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$.
But : Trouver $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.

Définition 3.2.1. On dit que deux suits (a_n) et (b_n) sont adjaçantes si :

1) $a_n \leq b_n$, $\forall n$
2) (a_n) suite croissante, (b_n) suite décroissante.
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$

Lemme 3.2.1. *Soient (a_n) et (b_n) adjaçantes alors (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite.*

Démonstration. On a d'après le 2) de la **Définition 3.2.1.**

$$a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n$$

$$b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_0$$

et d'après 1) :

$$a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq ... \leq b_1 \leq b_0$$

Or :

- (a_n) suite croissante et majorée par $b_0 \Rightarrow (a_n)$ converge.
- (b_n) suite décroissante et minorée par $a_0 \Rightarrow (b_n$ converge.

Soit l_1, l_2 respectivement limite de (a_n) et (b_n) quand $n \to +\infty$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1,\ n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - l_1| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2,\ n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - a_n| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_3,\ n \geq N_3 \Rightarrow |b_n - l_2| \leq \varepsilon$$

Donc si $N \geq \max(N_1, N_2, N_3)$ alors :

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - a_N| + |a_N - b_N| + |b_N - l_2| \leq 3\varepsilon$$

On a alors $l_1 = l_2$. □

Lemme 3.2.2. *Les suites (a_n) et (b_n) construites par l'**Algorithme 3.2.1.** (Algorithme de dichotomie) sont adjaçantes et convergent vers la même limite c tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. 1) (a_n) croissante car si

$$\left.\begin{array}{r} f(a_n)f(c_n) \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n \\ \text{sinon } \Rightarrow a_{n+1}c_n > a_n \end{array}\right\} a_{n+1} \geq a_n$$

Même raisonnement pour (b_n) décroissante.

2) $a_n \leq b_n$, $\forall n$. Par reccurence :
- $a_0 < b_0$
- On suppose que $a_n \leq b_n$ et on montre que $a_{n+1} \leq b_{n+1}$:
  (i) Si $f(a_n)f(c_n) \leq 0 \Rightarrow b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0$.
  (ii) Si $f(a_n)f(c_n) \geq 0 \Rightarrow b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0$
  Donc : $b_{n+1} \geq a_{n+1}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{4} = ... = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

4) Il reste à prouver que la limite commune c vérifie $f(c) = 0$. On suppse que $f(a_0) < 0$ et $f(b_0) > 0$. Par l'absurde,
- On suppose que $f(c) > 0$:

$$\exists\eta > 0,\ x \in]c - \eta, c + \eta[\Rightarrow f(x) > 0 \text{ (continuité de } f)$$

  Soit $0 < \varepsilon < \eta$, $\exists n_0$, $n \geq n_0$, $|c - a_n| \leq \varepsilon$. Donc : $a_n \in]c - \eta, c + \eta[$ donc $f(a_n) > 0$. Contradction car par l'algorithme de dichotomie si $f(a_0) < 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$.
- On suppose que $f(c) < 0$:

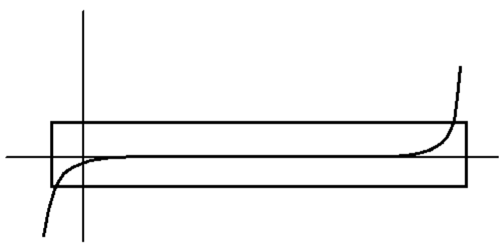
$$\exists\eta > 0, x \in]c - \eta, c + \eta[\Rightarrow f(x) > 0$$

  Soit $0 \leq \varepsilon \leq \eta$, $\exists n_0$, $n > n_0$, $|c - b_n| \leq \varepsilon$ (continuité de f). Donc $b_n \in]c - \eta, c + \eta[$ donc $f(b_n) < 0$. Contradiction !

[Raisonnement similiaire si on suppose $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$] □

Conditions d'arrêt $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$.

Remarque. $|f(c_n)| \leq \varepsilon$ n'est pas un bon critère d'arrêt pour des fonctions plates.



Remarque. La convergence de la méthode de dichotomie est lente (on gagne un facteur 1/2 à chaque itération).

3.3 Méthode de Picard

Définition 3.3.1. Soit g une fonction continue sur un intervalle I. Soit $x \in \mathbb{C}$, x est appelé point fixe de g si $g(x) = x$.

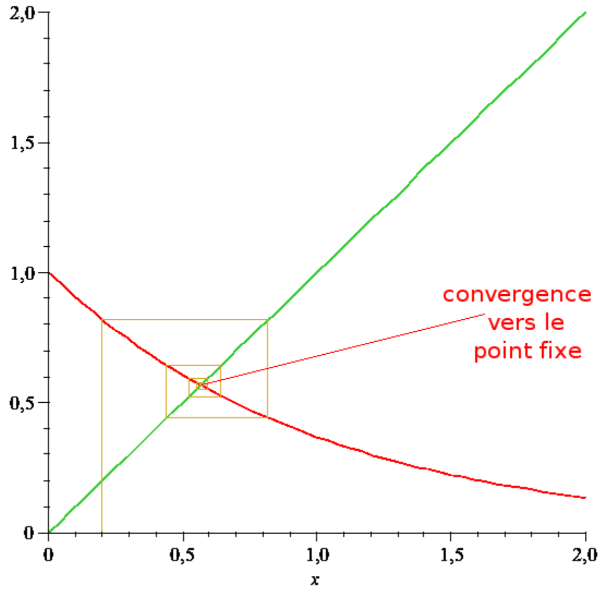
Relation entre points fixes et racines de f x racine de $f(x) \Leftrightarrow x$ point fixe de $g(x) = x + f(x)$.

Algorithme 3.3.1 (Méthode de Picard)**.** On construit la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2...$ avec x_0 choisit (Itérations de Picard).

Si x_n converge vers l, x_{n+1} converge vers l et donc $g(l) = l$.

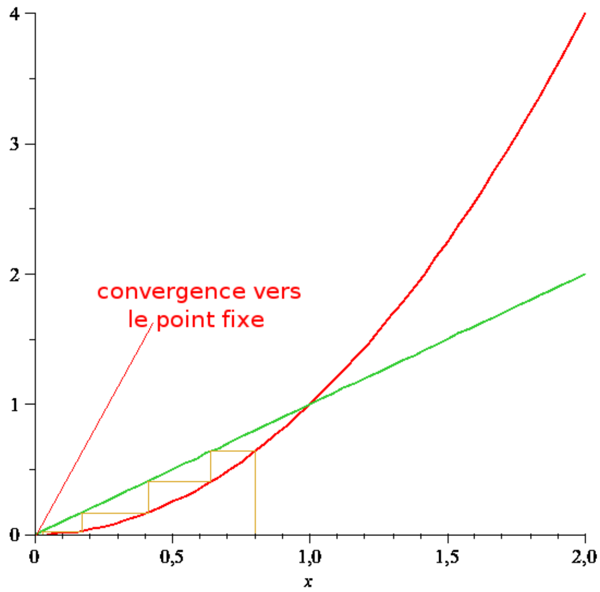
Problème. *Trouver des conditions pour assurer que x_n converge.*

Exemple 3.3.1. $g(x) = e^{-x}$

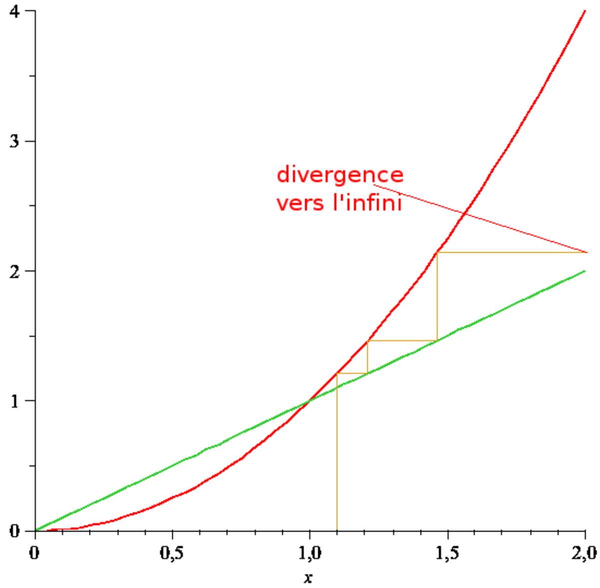


Exemple 3.3.2. $g(x) = x^2$.

- Premier cas $(x_0 < 1)$:



- Deuxième cas ($x_0 > 1$) :



Proposition 3.3.1. *Si g continue et si la suite de Picard converge vers $\overline{x}$ alors $\overline{x}$ point fixe de g.*

Démonstration. $x_{n+1} = g(x_n) \to \overline{x} = g(\overline{x})$: $\overline{x}$ point fixe de g. □

Proposition 3.3.2. *Soit $g \in \mathcal{C}^1$, $g(\overline{x}) = \overline{x}$:*

a) si $|g'(\overline{x})| < 1$ alors il existe un voisinage V de $\overline{x}$ tel que $x_n \to \overline{x}$, $\forall x_0 \in V$. On appelle un tel point fixe, un point fixe attractif.

b) si $|g'(\overline{x})| > 1$ alors il existe un voisinage de V de $\overline{x}$ tel que $x_n \in V \backslash \{\overline{x}\}$ alors :

$$\frac{|x_{n+1} - \overline{x}|}{|x_n - \overline{x}|} > 1$$

On appelle un tel point fixe, un point fixe repulsif.

Démonstration. a) On a que g' est continue et $|g'(x) < 1$. Alors $\exists \varepsilon > 0$, $\exists K > 1$ tel que :

$$|\eta - \overline{x}| \leq \varepsilon \Rightarrow |g'(\eta)| \leq K < 1$$

Soit $|x - \overline{x}| \leq \varepsilon$. Avec le théorèmes des accroissement finies : $\exists \eta \in]\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon[$ tel que :

$$g(x) - g(\overline{x}) = g'(\eta)(x - \overline{x}) \Rightarrow |g(x) - \overline{x}| \leq K|x - \overline{x}| \leq \varepsilon$$

Si $|x_0 - \overline{x}| \leq \varepsilon$, on aura :

$$|x_1 - \overline{x}| = |g(x_0) - \overline{x}| \leq K|x_0 - \overline{x}| \leq \varepsilon$$

$$|x - 2 - \overline{x}| = |g(x_1) - \overline{x}| \leq K|x_1 - \overline{x}| \leq K^2|x_0 - \overline{x}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$|x_n - \overline{x}| = |g(x_{n-1}) - \overline{x}| \leq K^n|x_0 - \overline{x}| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

donc x_n converge vers $\overline{x}$.

b) On suppose maintenant que $|g'(x)| > 1$. Alors $\exists\varepsilon > 0$, $\exists K > 1$ tel que :

$$|\overline{x} - \eta| \leq \varepsilon \Rightarrow |g'(\eta)| \geq K > 1$$

Soit $|x - \overline{x}| \leq \varepsilon$, $\exists \eta \in]\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon[$:

$$g(x) - g(\overline{x}) = g'(\eta)(x - \overline{x}) \Rightarrow \frac{|g(x) - g(\overline{x})|}{|x - \overline{x}|} \geq K > 1$$

En posant $x = x_n$, on a démontré la proposition b).

□

Exemple 3.3.3. $g(x) = x^2$ alors les points fixes sont :

$$\begin{cases} 0 & g'(0) = 0 \quad \text{Attractif} \\ 1 & g'(1) = 2 \quad \text{Répulsif} \end{cases}$$

Remarque. La **Proposition 3.3.2.** donne des informations locaux.

Questions

1. Existe-il un point fixe ? Est-il unique ?
2. Comment choisir x_0 ?

Définition 3.3.2. Soit $D \subset \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, g est lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si :

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

Cela implique que g est (uniformément) continue. Si $k < 1$, g est une contraction.

Remarque. Si $g \in \mathcal{C}^1$, D intervalle fermé,g est lipschitzienne de rapport :

$$k = \sup_{x \in D} |g'(x)| \qquad \text{(Théorème des accroissements finies)}$$

Theorème 3.3.3 (Théorème du point fixe)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}$ fixé, $g : D \to \mathbb{R}$ tel que :*

(H1) $g : D \to D$

(H2) g contraction sur D (rapport $k \in [0, 1[$).

Alors il existe un point fixe $\overline{x}$ dans D et il est unique. $\forall x_0 \in D$, la suite de Picard $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $\overline{x}$.

Démonstration. (1) Unicité du point fixe : supposons que $\bar{x}$ et $\tilde{x}$ points fixes :

$$|\bar{x} - \tilde{x}| \leq |g(\bar{x}) - g(\tilde{x})| \leq k|\bar{x} - \tilde{x}| < |\bar{x} - \tilde{x}|$$

Contradiction.

(2) Esxistence du point fixe et convergence de la suite de Picard : soit $x_0 \in D$, $x_{n+1} = g(x_n) \in D$ qui est bien défini à cause de $(H1)$.

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq ... \leq k^n|x_1 - x_0| \qquad \forall n$$

Soit $m > n$:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \left| \sum_{j=n}^{m-1} |x_{j+1} - x_j| \right| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |x_{j-1} - x_j| \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} k^{j-n} |x_{n+1} - x_n| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} k^i \right) (x_{n+1} - x_n) \\ &= \frac{1}{1-k} |x_{n+1} - x_n| \leq \underbrace{\frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|}_{\text{petit si } n \text{ est grand}} \qquad (*) \end{aligned}$$

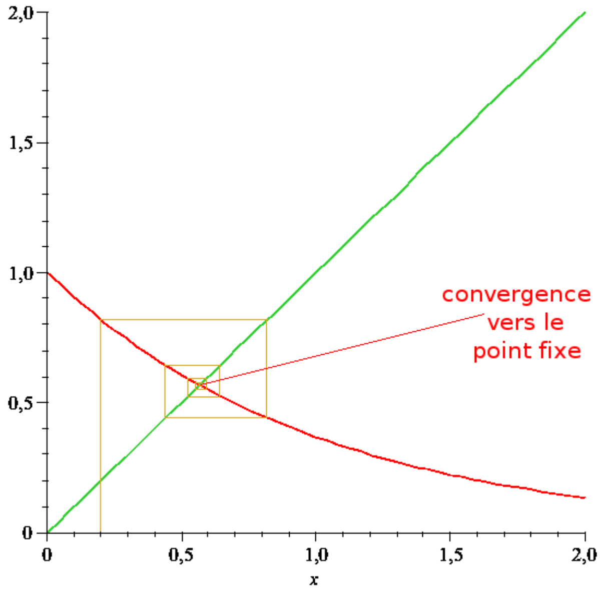
Donc (x_n) est une suite de Cauchy donc converge vers une limite $\overline{x} \in D$ (car D fermé). Alors $\overline{x}$ est un point fixe car limite d'une suite de Picard. □

Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème du point fixe :*

$$|\overline{x} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \qquad \textit{(Exsitence d'erreurs)}$$

Démonstration. On fait tendre n vers ∞ dans $(*)$ de la Démonstration du théorème du point fixe. □

Exemple 3.3.4. Soit $g(x) = e^{-x}$



Graphe de e^{-x} avec méthode de Picard

Soit $D = [c, g(c)]$ avec $g(c) > 0$ (c existe). g décroissante $\Rightarrow g(D) = [g(g(c)), g(c)] \subset [c, g(c)]$. On veut savoir si $g(g(c)) \geq c$.

$$g(c) - g(g(c)) = |g(c) - g(g(c))| \leq \sup_{x \in D} |g'(x)| |c - g(c)| \leq e^{-c} |c - g(c)| \leq |c - g(c)| = g(c) - c$$

$\Rightarrow c \leq g(g(c))$. De plus, g est une contraction sur $[c, g(c)]$ donc le théorème du point fixe s'applique.

Définition 3.3.3 (Vitesse de convergence d'une suite)**.** Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers une limite l :

- convergence linéaire :
$$\sup_n \frac{|y_{n+1}-l|}{|y_n-l|} < 1$$
- convergence superlinéaire :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|y_{n+1}-l|}{|y_n-l|} = 0$$
- convergence d'ordre r, $r \geq 1$:
$$\exists c > 0,\ \sup_n \frac{|y_{n+1}-l|}{|y_n-l|^r} \leq c$$

Exemple 3.3.5. 1) La suite de Picard est une suite qui converge linéairement. Si la suite de Picard est associée à une fonction g qui est k-lipchitzienne alors :

$$|x_{n+1}-l| = |g(x_n)-g(l)| \leq k|x_n-l|$$

2) Quand $n=2$, on a une convergence quadratique. A chaque itération, on double le nombre de chiffres significatifs :
$$e_n \simeq 10^{-3} \Rightarrow e_{n+1} \simeq 10^{-6}$$

Theorème 3.3.4. *Soit $k \geq 2$, $g \in \mathcal{C}^k$, $g(\overline{x}) = \overline{x}$ et :*

$$g'(\overline{x}) = ... = g^{(k-1)}(\overline{x}) = 0 \qquad (D)$$

$$g^{(k)}(\overline{x}) \neq 0$$

Pour x_0 assez proche de $\overline{x}$, la suite de Picard admet un ordre de convergence égal à k :

$$\frac{|x_{n+1}-\overline{x}|}{|x_n-\overline{x}|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{g^{(k)}(\overline{x})}{k!}$$

Démonstration. Formule de Taylor :

$$g(x_n) = g(\overline{x}) + \frac{g'(\overline{x}}{1!}(x_n-\overline{x}) + ... + \frac{g^{(k-1)}(\overline{x})}{(k-1)!}(x_n-\overline{x})^{k-1} + \frac{g^{(k)}(y_n)}{k!}(x_n-\overline{x})^k$$

avec $y_n \in]x_n, \overline{x}[$. Or d'après la condition (D), on peut réécrire $g(x_n)$ comme :

$$g(x_n) = \frac{g^{(k)}(y_n)}{k!}(x_n-\overline{x}) \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}-\overline{x}}{(x_n-\overline{x})^k} = \frac{g^{(k)}(y_n)}{k!} \to \frac{g^{(k)}(\overline{x})}{k!}$$

□

Exemple 3.3.6. $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\delta}{x}\right)$, $\delta > 0$. Le point fixe $\overline{x}^2 = \delta$, $\overline{x} = \pm\sqrt{\delta}$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\delta}{x^2}\right),\ g'(x) = 0$$

donc Picard converge (si on demarre assez près de $\overline{x}$). La converge est au moins quadratique :

$$g''(x) = \frac{\delta}{x^3} \qquad g''(\sqrt{\delta}) \neq 0$$

Remarque (Convergence de Picard). 1) dépend du choix de g

Exemple 3.3.7. zéro possitif de $f(x) = x^2 - x - 2$ (-1 et 2)

a) $g(x) = x^2 - 2$, $g'(x) = 2x$, $g'(2) = 4$, diverge.

b) $g(x) = \sqrt{x+2}$, $g'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}$, $g'(2) = \frac{1}{4}$ converge.

c) $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$, $g'(x) = -\frac{2}{x^2}$, $g'(2) = -\frac{1}{2}$ converge.

Le meilleur choix est b).

2) Méthode de relaxation : au lieu de choisir g, on prend $\tilde{g}(x) := x + \lambda(x - g(x))$, λ paramètre. Les points fixes de g et $\tilde{g}$ sont les mêmes.

$$\tilde{g}'(x) = 1 + \lambda(1 - g'(x))$$

$$\tilde{g}'(\overline{x}) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{g'(\overline{x}) - 1}$$

Problème. On ne connait pas $g'(\overline{x})$ mais on peut avoir un ordre de grandeur.

Exemple 3.3.8.

$$g(x) = \sqrt{\frac{a}{x}} \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

3.4 Méthode de Newton

$$e_{n+1} = \overline{x} - x_{n+1} = g(\overline{x}) - g(x_n) = g'(\xi_n)(\overline{x} - x_n)$$

avec ξ_n entre $\overline{x}$ et x_n. On a alors :

$$|e_{n+1}| \leq |g'(\xi_n)||e_n|$$

Problème. *Comment construire g tel que $g'(\overline{x}) = 0$?*

Soit $f(x) = 0$ et t une fonction sans zéros tel que $f(x)t(x) = 0$. On pose $g(x) = x + t(x)f(x)$. On a alors :

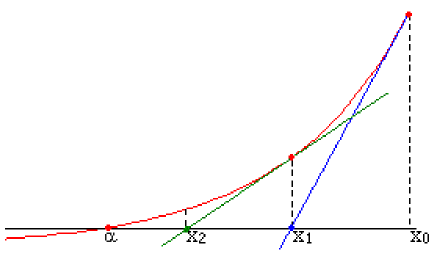
$$g'(x) = 1 + t'(x)f(x) + t(x)f'(x)$$
$$g'(\overline{x}) = 1 + t(\overline{x})f'(\overline{x})$$

Il faut prendre $t(\overline{x}) = -\frac{1}{f'(\overline{x})}$ si $f'(\overline{x}) \neq 0$ et $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. C'est la méthode de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Remarque. La méthode de Newton nécessite la connaise de f' mais pas $f'(\overline{x})$.

Interprétation géométrique de la méthode de Newton



Theorème 3.4.1 (Théorème de convergence locale)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^2$, $f(\overline{x}) = 0$, $f'(\overline{x}) = 0$ alors la méthode de Newton converge vers $\overline{x}$ si x_0 est assez proche de $\overline{x}$. Si $f \in \mathcal{C}^3$, la convergence est quadratique, c'est-à-dire : $\exists c > 0$, $\exists \varepsilon > 0$:*

$$|x_0 - \overline{x}| \leq \varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} - \overline{x}| \leq c|x_n - \overline{x}|$$

Démonstration. 1) $g'(\overline{x}) = 0$, $\overline{x}$ est attractif donc convergence locale.

2) $f \in \mathcal{C}^3 \Rightarrow g \in \mathcal{C}^2$. On a $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Si la derivée de g est nulle alors il y a convergence quadratique (**Théorème 3.3.4**).

□

3.5 Méthode de la sécante

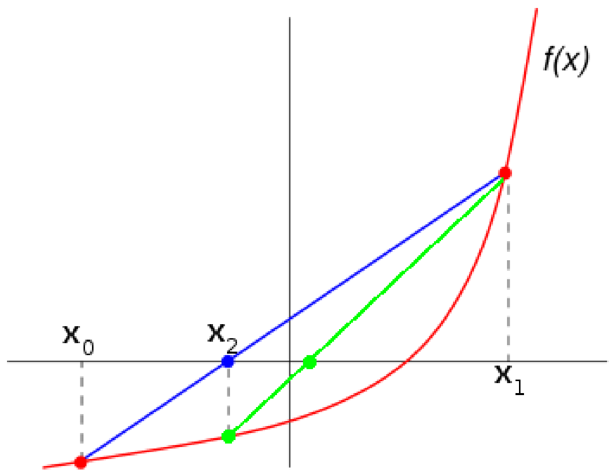
Le problème avec la méthode de Newton est qu'elle nécessite le calcul de f'. L'idée est de remplacer la dérivée de $f'(x_n)$ par un taux d'accroissement.

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

On obtient comme suite :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Géométriquement, on remplace la tangente par une secante.



Theorème 3.5.1 (Convergence de la méthode de la sécante)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$, $\overline{x} \in I$ tel que $f(\overline{x}) = 0$:*

$$m = \min_{x \in I} |f'(x)| \qquad M = \max_{x \in I} |f''(x)|$$

Soit $J \in [\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon] \subset I$ avec ε tel que $k = \frac{M\varepsilon}{2m} < 1$. Alors soient $x_0, x_1 \in I$, la méthode de la secante converge vers $\overline{x}$ et :

$$|x_n - \overline{x}| \leq 2\frac{m}{M}K^{F_n} \qquad (P_n)$$

avec $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (suite de Fibonacci).

Démonstration. Par reccurence : $x_0, x_1 \in J$

$$(P_0) : |\overline{x}_0 - x| \leq 2\frac{m}{M}k = \varepsilon$$

$$(P_1) : |\overline{x}_1 - x| \leq 2\frac{m}{M}k = \varepsilon$$

On suppose (P_{n-1}), (P_n) vérifiée et on veut montrer (P_{n+1}). On utilise la formule d'erreur de Cauchy :

$$0 = f(\overline{x}) = \underbrace{f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](\overline{x} - x_n)}_{\text{Polynôme de degré 1 qui interpole } f \text{ en } x_n \text{ et } x_{n-1}} + \underbrace{f[x_n, x_{n-1}, \overline{x}](\overline{x} - x_n)(\overline{x} - x_{n-1})}_{\text{erreur}}$$

$$\Leftrightarrow f[x_n, x_{n-1}](\overline{x} - x_n) = -f(x_n) - f[x_n, x_{n-1}, \overline{x}](\overline{x} - x_n)(\overline{x} - x_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \overline{x} = \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}}_{x_{n+1}} - \frac{f[x_n, x_{n-1}, \overline{x}]}{f[x_n, x_{n-1}]}(\overline{x} - x_n)(\overline{x} - x_{n-1})$$

Donc :

$$\underbrace{\overline{x} - x_{n+1}}_{e_{n+1}} = -\frac{f[x_n, x_{n-1}, \overline{x}]}{f[x_n, x_{n+1}]} \underbrace{\overline{x} - x_n}_{e_n} \underbrace{(\overline{x} - x_{n-1})}_{e_{n-1}}$$

On a que :

$$|f[x_n, x_{n-1}]| = |f'(\alpha_n)| \geq m$$
$$|f[x_n, x_{n-1}, \overline{x}]| = \left|\frac{f''(\beta_n)}{2}\right| \leq \frac{M}{2} \ , \ \alpha_n, \beta_n \in [x_n, x_{n+1}]$$

On en déduit :

$$|e_{n+1}| \leq \frac{M}{2m}|e_n||e_{n-1}| \leq \underbrace{\left(\frac{M}{2m}\varepsilon\right)}_{\leq 1 \text{car } x_n, x_{n-1} \in J} \varepsilon \leq \varepsilon$$

Donc $x_{n+1} \in J$:

$$|e_{n+1}| \leq \frac{M}{2m}|e_n||e_{n-1}| \leq \frac{M}{2m}\left(\frac{2m}{M}K^{F_n}\right)\left(\frac{2m}{M}K^{F_{n-1}}\right)$$
$$\leq \frac{2m}{M}K^{F_n + F_{n-1}} \leq \frac{2m}{M}K^{F_{n+1}} \qquad (P_{n+1})$$

□

Nombres de Fibonacci

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}}_{\varphi \text{ : nombre d'or}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$$ [1]

Donc :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \simeq \varphi = 1,618...$$

On a ainsi :

$$|x_{n+1} - \overline{x}| \simeq K^{F_{n+1}} \simeq (K^{F_n})^{\frac{F_{n+1}}{F_n}}$$

Donc :

$$|e_{n+1}| \simeq |e_n|^{\varphi}$$

Convergence plus faible que Newton. Les itérations sont plus faciles à calculer.

[1] $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or