Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

M310 : Calcul différentiel avancé

Notes de cours par Clément Boulonne

L3 Mathématiques

2008 - 2009

Table des matières

1 Différentielle d'une fonction **3**
1.1 Quelques définitions . . . 3
1.2 Exemples . . . 6
1.2.1 Application affine . . . 6
1.2.2 Un exemple en dimension finie . . . 7
1.3 Différentielles partielles . . . 7
1.3.1 Différentiabilité dans une "direction" . . . 7
1.3.2 Dérivées partielles et matrice jacobienne . . . 8
1.3.3 Dérivées partielles d'ordre k . . . 9
1.4 Opérations élémentaires . . . 11
1.4.1 Combinaison linéaire et composition . . . 11
1.4.2 Applications bilinéaires et produits . . . 12
1.4.3 Inverse . . . 12

2 Théorème des accroissements finis et applications de classe $\mathcal{C}^1$ **14**
2.1 Théorème des accroissements finis . . . 14
2.2 Applications de classe $\mathcal{C}^1$ . . . 17

3 Théorème d'inversion locale - Théorème de fonctions implicites **21**
3.1 Introduction . . . 21
3.2 Théorème d'inversion locale . . . 21
3.3 Théorème des fonctions implicites . . . 25
3.4 Applications géométriques . . . 27
3.4.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ . . . 27
3.4.2 Espace tangent à une sous-variété en un point . . . 31

4 Différentielles d'ordre supérieur **34**
4.1 Différentielle seconde . . . 34
4.1.1 Définition . . . 34
4.1.2 Lemme de Schwarz . . . 35
4.1.3 Dérivées partielles secondes . . . 36
4.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ . . . 37
4.3 Formule de Taylor . . . 39

5 Points critiques et extrema **41**
5.1 Premières définitions . . . 41
5.2 Etude du cas libre . . . 41
5.3 Conditions à l'ordre 2 . . . 42
5.4 Extremum liés . . . 43

6 Equations différentielles **47**
6.1 Equations différentielles du premier ordre . . . 47
6.2 Théorèmes d'existence et d'unicité de solutions . . . 48
6.3 Théorie globale . . . 53
6.3.1 Unicité globale . . . 53
6.3.2 Solutions maximales . . . 53
6.3.3 Solutions globales . . . 55

A Équations différentielles linéaires affines **56**
A.1 Équations non autonomes . . . 56
A.1.1 Équations homogènes . . . 57

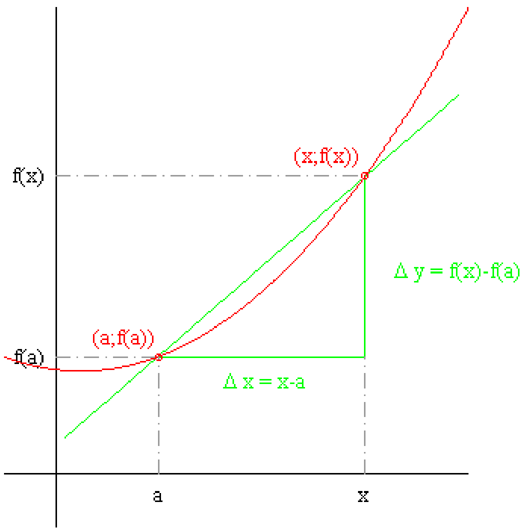
Chapitre 1

Différentielle d'une fonction

1.1 Quelques définitions

Rappel. $I \subset \mathbb{R}$, $I =]a, b[$, $a < b$. Soit $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$. f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe}$$



Reformulation. f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon : V_{x_0} \to \mathbb{R}$ (où V_{x_0} désigne un voisinage de x_0) tel que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \qquad (*)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

$(*)$ peut se reécrire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varepsilon_1(h)$$

tel que :

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0 \text{ et } x = x_0 + h$$

L'application :

$$\begin{array}{rccc} : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & f'(x_0)h \end{array}$$

est linéaire.

Définition 1.1.1. Soient E, F espaces vectoriels normés, $U \subset E$ ouvert, $f : U \rightarrow E$, $a \in U$. f est différentiable en a si et seulement si $\exists Df : E \rightarrow F$ application linéaire continue et une fonction $\varepsilon : U \rightarrow F$, $\lim \varepsilon(x) = 0$ tel que :

$$f(a+h) - f(a) = Df(a).h + \|h\|\varepsilon(a+h) \qquad (*)$$

$\forall h \in E$ tel que $a + h \in U$. $Df(a) \in \mathcal{L}_C(E, F)$ est appelée la différentielle de f en a.

Notation. La différentielle de f en a peut se noter :

$$Df(a),\ Df_a,\ df(a),\ df_a,\ f'(a)$$

Proposition 1.1.1. *Si f est différentiable en a, l'application linéaire $Df_a \in \mathcal{L}_C(E, F)$ vérifiant $(*)$ est unique.*

Lemme 1.1.2. *Soit E, F des espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}_C(E, F)$ vérifiant :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} = 0 \text{ alors } u = 0$$

Démonstration de la ***Proposition 1.1.1.*** Supposons $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_C(E, F)$ tel que :

$$f(a+h) - f(a) = u_1.h + \|h\|\varepsilon_1(h) = u_2.h + \|h\|\varepsilon_2(h) \Rightarrow (u_1 - u_2)h = \|h\|(\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h))$$

$$\Rightarrow \forall h \neq 0,\ \frac{\|(u_1 - u_2)(h)\|}{\|h\|} = \|\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h)\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$\Rightarrow u_1 - u_2 = 0.$ □

Démonstration du ***Lemme 1.1.2.***
Rappel. $u \in \mathcal{L}(E, F)$, u est continue si et seulement si :

$$\sup_{\|h\| \leq 1} \|u(h)\| = \sup_{\|h\| = 1} \|u(h)\| < +\infty$$

On pose $\|u\| = \sup_{\|h\|=1} \|u(h)\|$ qui est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$:

$$\forall h \in E,\ \|u(h)\| \leq \|u\|\|h\|$$

Soit $\varepsilon(h)$ tel que :

$$\|u(h)\| = \|h\|\varepsilon(h) \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Soit $\eta > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall h$ tel que $\|h\| \leq \alpha$ alors $|\varepsilon(h)| \leq \eta$.
Soit $h \in E$, $\|h\| = 1$, $\|\alpha h\| = \alpha\|h\| = \alpha$.
Donc :

$$\varepsilon(ah) = \frac{\|u(\alpha h)\|}{\|ah\|} = \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} = \varepsilon(h) \leq \eta$$

$\forall \eta > 0, \forall h \in E, \|h\| = 1, \varepsilon(h) \leq \eta$. Donc : $\forall h \in E, \|h\| = 1, \varepsilon(h) = 0 \Rightarrow u(h) = 0 \Rightarrow u = 0.$ □

Remarque. $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés. Que se passe-t-il si on change de norme ? Si $\|\cdot\|'_E$ est équivalent à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|'_F$ est équivalent à $\|\cdot\|_F$, f est différentiable en a pour $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F) \Leftrightarrow f$ différentiable en a pour $(E, \|\cdot\|'_E)$ et $(F, \|\cdot\|'_F)$.

Rappel. $\|\cdot\|'_E \sim \|\cdot\|_E \Leftrightarrow \exists C, D > 0$ tel que :

$$\forall h \in E,\ C\|h\|_E \leq \|h\|'_E \leq D\|h\|_E$$

$$f(a+h) - f(a) = Df(a)h + \underbrace{\|h\|_E\varepsilon(h)}_{\|h\|'_E\varepsilon'(h)},\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

Si $\|\cdot\|_E \sim \|\cdot\|'_E$, $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\varepsilon'(h) = 0$:

$$\varepsilon'(h) = \frac{\|h\|}{\|h\|'}\varepsilon(h),\ \|\varepsilon'(h)\| \leq \frac{1}{C}\|\varepsilon(h)\|$$

En particulier dans les espaces vectoriels normés de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

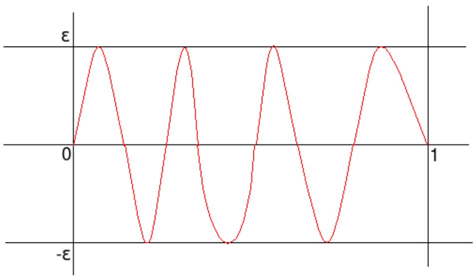
Contre-exemple (en dimension infinie). $E = \mathcal{C}^\infty([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \text{ continue}\}$. Soit $f \in E$, on rappelle :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

et on définit :

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

On a $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalents.



On considère $E = (\mathcal{C}^\infty([0,1]), \|\cdot\|)$ et $F = (\mathcal{C}^\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. On défniit :

$$\begin{array}{rcccc} H & : & E & \to & F \\ & & f & \mapsto & f^2 + f' \end{array}$$

$f, h \in E$:

$$H(f+h) - H(f) = h' + (f+h)^2 - f^2 = \underbrace{h' + 2fh}_{u(h)} + h^2$$

u est-elle continue ?

$$\|u(h)\|_\infty \leq \underbrace{(1 + 2\|f\|_\infty)}_{\Rightarrow u \text{ continue}}\|h\|$$

Conclusion :

$$H(f+h) = H(h) = uh + \|h\|\varepsilon(h),\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

En effet, $h^2 = \|h\|\varepsilon(h)$:

$$\|h^2\| \geq \|h^2\|_\infty = \|h\|\|\varepsilon(h)\|_\infty \Rightarrow \|\varepsilon(h)\|_\infty \leq \|h\|$$

Proposition 1.1.3 (Cas d'un produit d'espaces)**.** *Soit* $F = F_1 \times ... \times F_p$ *tel que* $\forall j \in \{1,...,p\}$, F_j *espace vectoriel normé. Soit* $k \in F$, $k = (k_1,...,k_p)$ *et :*

$$\|k\| = \sup_{1\leq j\leq p} \|k_j\|_{F_j}$$

Soit E *un espace vectoriel normé,* $U \subset E$ *:*

$$f : U \to F = F_1 \times ... \times F_p$$

$$f = (f_1,...,f_p),\ f_j = U \to F_j$$

Soit $a \in U$*,* f *différentiable en* $a \Leftrightarrow \forall j$*,* f_j *différentiable en* a*. De plus, si c'est le cas :*

$$Df(a) = (Df_1(a),...,Df_p(a))$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$

$$\begin{tikzcd} Df(a) : E \arrow[r] \arrow[dr] & F_1 \times ... \times F_p \arrow[d, "p_j"] \\ & F_j \end{tikzcd}$$

$$f(a+h) - g(a) = Df(a)h + \|h\|\varepsilon(h)$$

$$\Rightarrow \forall j,\ 1 \leq j \leq p,\ f_j(a+h) - f_j(a) = \underbrace{(p_j \circ Df(a))}_{\in\mathcal{L}(E,F)}.h + \|h\|p_j(\varepsilon(h))$$

$$p_j(\varepsilon(h)) = \varepsilon_j(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \qquad (p_j \text{ continue})$$

$(\Leftarrow)$ $\forall j,\ 1 \leq j \leq p$:

$$f_j(a+h) - f_j(a) = Df_j(a)h + \|h\|\varepsilon_j(h),\ \lim_{h\to 0}\varepsilon_j(h) = 0$$

$$\Rightarrow f(a+h) - f(a) = (Df_1(a),...,Df_p(a))h + \|h\|\underbrace{(\varepsilon_1(h),...,\varepsilon_p(h))}_{\varepsilon(h)},\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

□

1.2 Exemples

1.2.1 Application affine

Une application affine $A : E \to F$ est de la forme $A(x) = b + u(x)$ où $b \in F$ et u est une application linéaire de E dans F. Pour $a, x \in E$:

$$A(x) - A(a) = u(x) - u(a) = u(x-a) \qquad (1)$$

par linéarité. Donc A est continue en a si et seulement si u est continue en 0, donc, puisque u est linéaire, en tout point. Dans ce cas la formule (1) montre que A est différentiable en tout point de E et que, pour tout $a \in E$:

$$DA(a) = u$$

La différentielle d'une application affine est donc indépendante de a. En particulier, si u est linéaire continue, pour tout $x \in E$, $Du(x) = u$.

1.2.2 Un exemple en dimension finie

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (x+y, xy)$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = (h+k, hb+ka+hk) = u(h,k) + \varphi(h,k)$$

où $u(h,k) = (h+k, hb+ka)$ et $\varphi(h,k) = (0, hk)$. L'application u est linéaire continue (on est en dimension finie). Sa matrice dans les bases canoniques est :

$$Jf(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$$

Choisissons sur $\mathbb{R}^2$ la norme :

$$\|(h,k)\| = \max(|h|, |k|)$$

La fonction $\varphi(h,k)$ vérifie : $\|\varphi(h,k) = |hk| \leq \|(h,k)\|^2$. Donc :

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\varphi(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

ce qui montre que l'application f est différentiable en (a,b), sa différentielle en (a,b) étant l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $Jf(a,b)$.

1.3 Différentielles partielles

1.3.1 Différentiabilité dans une "direction"

$a \in U \subset E$, E, F des espaces vectoriels normés. $f : U \to F$, E_1 sous-espace vectoriel de E. Si f est différentiable en a :

$$f(a+h) - f(a) = Df(a).h + \|h\|\varepsilon(h),\ \forall h \in E_1 \subset E,\ a+h \in U \qquad (*)$$

Définition 1.3.1. On dit que f admet une différentielle partielle dans la direction E_1 si $\exists D^{E_1}f(a) : E_1 \to F$, $\forall h \in E_1$ tel que $a+h \in E$, $(*)$ est vérifié.

f est différentiable en $a \Rightarrow f$ admet une différentielle partielle dans la direction E_1, $\forall E_1 \subset E$.

Exemple 1.3.1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. $E_1 =< (1,0) >$, $E_2 =< (0,1) >$, $a = (0,0)$, $f|_{E_1} = 0$, $f|_{E_2} = 0$, f admet des différentielles partielles dans les directions E_1 et E_2 mais f n'est pas différentiable.

Démonstration.

$$f(x,y) - f(0,0) = u(x,y) + \|(x,y)\|\varepsilon(x,y)$$

$$\left.\begin{matrix} u|_{E_1} = 0 \\ u|_{E_2} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u = 0$$

$$\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Contradiction ! $\square$

1.3.2 Dérivées partielles et matrice jacobienne

Cas particulier. E est de dimension finie.

(a) $E = \mathbb{R}^n$, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to F$.

Définition 1.3.2.

$$E_j = <(0, 0, ..., 0, \underbrace{1}_{j\text{ième place}}, 0, ..., 0> = \{(0, 0, ..., 0, h, 0, ..., 0)\}$$

Si f admet une différentielle partielle suivant E_j, on dit que f admet une dérivée partielle : $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

$$f(a + (0, ..., 0, h, 0, ..., 0)) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h + \|h\|\varepsilon(h)$$

$h \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in F$, $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

(b) E quelconque, $\dim E < +\infty$. Choisissons une base $(v_1, ..., v_m)$ de E sur $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^m & \to & E \\ & (h_1, ..., h_m) & \mapsto & h_1 v_1 + ... + h_m v_m \end{array} \qquad \text{isomorphisme}$$

$$\varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow[\varphi]{\sim} U \subset E$$

$$b \mapsto a$$

Soit $H = f \circ \varphi : \varphi^{(-1)}(U) \to F$:

$$H(x_1, ..., x_m) = f(x_1 v_1 + ... + x_m v_m)$$

On peut montrer en exercice que :

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}(b) = (Df(a))v_j$$

Cas particulier. E et F sont de dimension finie, $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$, $a \in U \subset \mathbb{R}^m$:

$$f(x_1, ..., x_m) = (f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ..., x_m))$$

Si toutes les applications f_i ont des dérivées partielles en $a = (a_1, ..., a_m)$, on peut définir la matrice jacobienne :

$$J_f(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

Proposition 1.3.1. *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$. Si f est différentiable en $a = (a_1, ..., a_m)$ alors la matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques est la jacobienne $J_f(a)$. Soit $\underline{h} = (h_1, ..., h_m) \in \mathbb{R}^m$:*

$$Df(a).\underline{h} = J_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

1.3.3 Dérivées partielles d'ordre k

Définition 1.3.3. Soit $E_1, E_2, ..., E_m, F$ des espaces vectoriels normés, $U \subset E_1 \times E_2 \times ... \times E_m = E$ ouvert. $f : a \in U \to F$ et on pose :

$$\|x\| = \sup(\|x_1\|, ..., \|x_m\|)$$

f admet une $k$ième dérivée partielle si il existe une application linéaire $E_k \xrightarrow{D_k f(a)} F$ tel que $\forall h \in u_k(E_k)$ tel que $a + h \in U$:

$$f(a + u_k(l)) - f(a) = D_k f(a).l + \|k\|\varepsilon_k(h),\ \lim_{h \to 0} \varepsilon_k(h) = 0$$

Il est clair que f est différentiable en a, $D_f(a) \circ u_k = D_k f(a)$:

$$\begin{array}{cccc} u_k & : & E_k & \to & E_1 \times ... \times E_m \\ & & v & \mapsto & (0, ..., 0, \underbrace{v}_{k\text{ième place}}, 0, ..., 0) \end{array}$$

u_k est linéaire et injective.

Démonstration. $\forall h \in E$, $a + h \in U$:

$$f(a + h) - f(a) = Df(a).h + \|h\|\varepsilon(h)$$

$\Rightarrow \forall h \in u_k(E_k)$, $a + h \in U$:

$$f(a + h) - f(a) = Df(a).h + \|h\|\varepsilon(h)$$

$\Rightarrow \forall l \in E_k$, $a + u_k(l) \in U$:

$$f(a + u_k(l)) - f(a) = Df(a) \circ u_k.l + \underbrace{\|u_k(l)\|}_{=\|l\|=\|h\|} \varepsilon(u_k(l))$$

Si f est différentiable en a : $D_k f(a) = Df(a) \circ u_k$. On exprime $Df(a)$ en fonction des $D_k f(a)$

$$\begin{tikzcd} E_k \arrow[d, shift left, "u_k"] \arrow[drr, "D_k f(a)"] & & \\ E_1 \times ... \times E_k \times ... \times E_m \arrow[u, shift left, "p_k"] \arrow[rr, "Df(a)"'] & & F \end{tikzcd}$$

Soit $h = (h_1, ..., h_m) \in E_1 \times ... \times E_m$ et $p_k(h) = h_k$.

$$\begin{array}{ccc} E_k & & \\ p_k \uparrow\downarrow u_k & \searrow D_k f(a) & \\ h \in E_1 \times ... \times E_k \times ... \times E_m & \xrightarrow[Df(a)]{} & F \\ h = (h_1, h_2, ..., h_m) & & h_k = p_k(h) \end{array}$$

$$Df(a).h = \sum_{k=1}^{m} Df(a)(u_k \circ p_k(h))$$

$$h \xrightarrow{p_k} h_k \xrightarrow{u_k} (0, ..., 0, h_k, 0, ..., 0)$$

$$h = \sum_{k=1}^{m} u_k \circ p_k(h)$$

$$\mathrm{id}_E = \sum_{k=1}^{m} u_k \circ p_k$$

$$Df(a) = \sum_{k=1}^{m} D_k f(a) p_k$$

□

Définition 1.3.4. Soit E, F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ ouvert, $f : U \to F$. f est différentiable sur $U \Leftrightarrow \forall a \in U$, $Df(a)$ existe. Si c'est le cas :

$$\begin{array}{rccc} : & U & \to & \mathcal{L}_C(E,F) \\ & a & \mapsto & Df(a) \end{array}$$

f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si cette application est continue :

$$\begin{array}{rccc} : & U & \to & \mathcal{L}_C(E,F) \\ & a & \mapsto & Df(a) \end{array}$$

Corollaire. *Soit $f : U \to F$ différentiable, f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si :*

$$\forall 1 \leq k \leq n,\ U \xrightarrow{D_k f(a)} \mathcal{L}_C(E_k, F) \text{ continue}$$

Démonstration. (a) Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$U \xrightarrow{Df} \mathcal{L}_C(E,F) \to \mathcal{L}_C(E_k,F) \qquad \text{continue}$$

$$\varphi \xrightarrow{D_k f} \varphi \circ u_k \qquad \text{linéaire continue}$$

$$\|\varphi \circ u_k\| \leq \|\varphi\| \|u_k\| = \|\varphi\|$$

(b) Supposons que :

$$\begin{array}{rccc} : & U & \to & \mathcal{L}_C(E_k,F) \\ & a & \mapsto & D_k f(a) \end{array} \text{ continue}$$

On pose : $\Phi \circ ((D_k f)_{1 \leq k \leq m}) = D_f$. $\forall 1 \leq k \leq m$, $D_k f$ continue $\Rightarrow D_f$ continue.

$$\begin{array}{ccccc} a & \to & (D_k f(a))_{1 \leq k \leq m} & & \\ U & \to & \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \mathcal{L}_C(E_k, F) & \underset{\Phi}{\to} & \mathcal{L}_C(E,F) \\ & & (\varphi_k)_{1 \leq k \leq m} & \to & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \varphi_k \circ p_k \end{array}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{m} \varphi_k \circ p_k \right\| &\leq \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\| \|p_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\| \\ &\leq m \sup_{1 \leq k \leq m} \|\varphi_k\| = m \|(\varphi_k)_{1 \leq k \leq m}\| \end{aligned}$$

□

1.4 Opérations élémentaires

1.4.1 Combinaison linéaire et composition

Soit $U \subset E$ ouvert, $a \in U$, $f : U \to F$ et $g : U \to F$.

Proposition 1.4.1. *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u = \lambda f + \mu g$, f et g différentiable en $a \Rightarrow \lambda f + \mu g$ différentiable en a. De plus :*

$$D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df(a) + \mu Dg(a)$$

Démonstration. $\forall h \in E$, $a + h \in U$:

$$f(a+h) - f(a) = Df(a).h + \|h\|\varepsilon_1(h)$$

$$g(a+h) - g(a) = Dg(a).h + \|h\|\varepsilon_2(h)$$

$$u(a+h) - u(a) = (\lambda Df(a) + \mu Dg(a)).h + \|h\| \underbrace{(\lambda\varepsilon_1(h) + \mu\varepsilon_2(h))}\varepsilon(h)$$

□

Proposition 1.4.2. *Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts, $f : U \to V$, $g : V \to G$, $a \in U$, $b = f(a) \in V$. Si f est différantiable en a et g différentiable en $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et :*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a) \circ D(f)(a)$$

$$E \xrightarrow{Df(a)} F \xrightarrow{Dg(f(x))} G$$

Démonstration. $\forall h \in E$, $a + h \in U$:

$$\begin{aligned} \underbrace{f(a+h) - f(a)}_{k} &= Df(a).h + \|h\|\varepsilon_1(h) \\ g(b+k) - g(b) &= Dg(b).k + \|k\|\varepsilon_2(h) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$b + k = f(a+h)$, $k = f(a+h) - f(a)$

$$g \circ f(a+h) - g \circ f(a) = Dg(b)(Df(a).h + \|h\|\varepsilon_1(h)) + \|k\|\varepsilon_2(h)$$

$$g \circ f(a+h) - g \circ f(a) = (Dg(b) \circ Df(a))h + \|h\|(Dg(b) - \varepsilon_1)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$(1.1) \Rightarrow \begin{array}{l} \|k\| \leq \|Df(a)\|\|h\| + \|h\|\|\varepsilon_1(h)\| \\ \|h\| \leq \|h\|(\|Df(a)\| + \|\varepsilon_1(h)\|) \end{array}$$

$\exists \alpha > 0$, $\|h\| \leq \alpha$, $\|Df(a)\| + \|\varepsilon_1(h)\| \leq 1 + \|Df(a)\| = c$, $\|h\| \leq \alpha \Rightarrow \|k\| \leq c\|h\|$

$$\|k\|\varepsilon_2(k) = \|h\|\varepsilon_3(h),\ \lim_{h \to 0} \varepsilon_3(h) = 0$$

$$\|\varepsilon_3(h)\| \leq c\|\varepsilon_2(k)\|$$

Finalement :

$$g \circ f(a+h) - g \circ f(a) = (Dg(b) \circ Df(a)).h + \|h\|\varepsilon(h),\ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

□

Proposition 1.4.3. *$L : E \to F$ une application linéaire continue alors L est différentiable en tout point et $\forall a$, $DL(a) = L$.*

Démonstration.

$$L(a+h) - L(a) = L(h) + 0$$

□

<u>Généralisation</u>. *$L : E \to F$ linéaire continue, $b \in F$, $f(x) = L(x) + b$. Alors $\forall a$, $Df(a) = L$.*

1.4.2 Applications bilinéaires et produits

Proposition 1.4.4. *$B : E_1 \times E_2 \to F$. B linéaire continue; Alors $\forall a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$, B est différentiable en a et $DB(a) : E_1 \times E_2 \to F$, $(h_1, h_2) \to B(a_1, h_2) + B(a_2, h_1)$.*

Démonstration.

$$B(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = B(a_1, a_2) + B(h_1, a_2) + B(a_1, h_2)$$

B continue $\Rightarrow \exists C > 0$, $\forall h_1, h_2$, $\|B(h_1, h_2)\| \leq C\|h_1\|\|h_2\|$:

$$B(h_1, h_2) = \|h\|\varepsilon(h),\ \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

□

Exemple 1.4.1. E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<,>$. On pose :

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >},\ x \in E$$

$$\begin{array}{rccc} : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & < x, y > \end{array} \text{ est continue}$$

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|$$

$$(D <,>)(a_1, a_2)(h_1, h_2) =< a_1, h_2 > + < h_1, a_2 >$$

où $D <,>$ repésente la différentielle du produit scalaire.

Exemple 1.4.2. $E = F = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} P : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

$$d(P(a, b))(h, k) = ak + hb$$

$U \subset E$ ouvert, $f : a \in U \to F$, $g : U \to \mathbb{R}$

Proposition 1.4.5. *Si f et g différentiable en $a \in U$, gf est différentiable en a et :*

$$D(gf)(a) = g(a)Df(a) + Dg(a)f(a)$$

$$Dg(a)f(a) : h \to (Dg(a).h)f(a)$$

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow[(f,g)]{} & F \times \mathbb{R} & \to & F \\ & & (y, \lambda) & \xrightarrow[\text{bilinéaire cont.}]{} & \lambda y \end{array}$$

1.4.3 Inverse

Proposition 1.4.6. *$a \in U \subset E$, $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f est différentiable en a et que $f(a) \neq 0$ alors :*

$$\begin{array}{rccc} g : & U & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est différentiable en a et

$$Dg(a) = -\frac{1}{f(a)^2} Df(a)$$

Proposition 1.4.7. *E, F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$, $V \subset F$ ouverts, $f : U \to V$ homéomorphisme. On suppose encore que f est différentiable en a et que $D_f(a) \in \mathrm{Isom}_C(E, F)$. Alors $f^{-1} : V \to U$ est elle-même différentiable en $b = f(a)$ et :*

$$D(f^{-1})(f(a)) = (Df(a))^{-1}$$

Remarque. Si l'on sait que f^{-1} est différentiable en b, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$ alors :

$$D(f^{-1}) \circ Df(a) = \mathrm{id}_E$$

Démonstration. Il faut vérifier que f^{-1} est différentiable en b. $a + h \in U$, $h \in E$:

$$f(a+h) - f(a) = Df(a).h + \|h\|\varepsilon(h) = k$$

$b = f(a)$, $b + k = f(a+h)$, $a = f^{-1}(b)$, $a + h = f^{-1}(h+k)$:

$$h = f^{-1}(h+k) - f^{-1}(b) = Df(a)^{-1}.k - \|h\|(Df(a)^{-1} \circ \varepsilon)(h)$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\|h\| \leq \alpha$, $\|(Df(a)^{-1} \circ \varepsilon)(h)\| < \varepsilon$.

$$\|h\| \leq \|Df(a)^{-1}\|\|k\| + \varepsilon\|h\|$$

$$\|h\|(1-\varepsilon) \leq \|Df(a)^{-1}\|\|k\|$$

$$\|h\| \leq \frac{\|Df(a)^{-1}\|}{1-\varepsilon}\|k\| \leq 2\|Df(a)^{-1}\|\|\|k\|$$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b) = Df(a)^{-1}.k + \|k\|\varepsilon(k),\ \lim_{k\to 0} \varepsilon(k) = 0$$

□

Chapitre 2

Théorème des accroissements finis et applications de classe $\mathcal{C}^1$

2.1 Théorème des accroissements finis

Theorème 2.1.1. *Soit E un espace vectoriel normé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. $f : [\alpha, \beta] \to E$. On suppose que f est continue sur $[\alpha, \beta]$, dérivable (différentiables) en $]\alpha, \beta[$ et soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ dérivable en $]\alpha, \beta[$. On suppose que $\forall t \in]\alpha, \beta[$, $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(a)$*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(t - \alpha) + \varepsilon \tag{2.1}$$

On pose :

$$U = \{t \in [\alpha, \beta], (2.1) \text{ n'est pas vrai}\}$$

$$\|f(t) - f(\alpha)\| < \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varphi(t - \alpha) + \varepsilon \tag{2.2}$$

Supposons que $U \neq 0$:

(a) U est ouvert

$$t \in U \Leftrightarrow \underbrace{\varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(t - \alpha) - \|f(t) - f(\alpha)\|}_{\text{continue}} < 0$$

(b) $\alpha \notin U$, (2.1) est vrai pour $t = a$. $\exists \eta > 0$, $\forall t \in [\alpha, \alpha + \eta[$, $t \notin U$. En effet, (2.2) appliquée à a (on notera $(2.2)(a)$) est vrai :

$$V = \{t,\ (2.2)(a) \text{ vrai}\} \text{ ouvert}$$
$$a \in V \Rightarrow \exists \eta > 0,\ [\alpha, \alpha + \eta[\subset V$$

On pose $c = \inf(U) > \alpha$ ($U \subset [\alpha, \beta]$). Si $c > \alpha$:

(c) $c \geq \beta$, en effet si $c = \beta$, $U \subset [\alpha, \beta] = \{\beta\} = \{c\}$. On a vu que $c \notin U$ (U est un ouvert) donc $U = \emptyset$. Pour $\alpha < c < \beta$, $\|f'(c)\| \leq \varphi'(c)$:

$$f(c + h) = f(c) + hf'(c) + h\varepsilon(h),\ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

$\exists \eta_1 > 0$, $\forall h$, $|h| < \eta_1$:

$$\|f(c + h) - f(c) - hf'(c)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\varphi(c+h) = \varphi(c) + h\varphi'(c) = h\varepsilon'(h)$$

$\exists \eta_2 > 0$, $\forall h$, $\|h\| < \eta_2$, $|\varepsilon'(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\|f(c+h) + f(c)\| \leq \|h\|\|f'(c)\| + |h|\frac{\varepsilon}{2}$$

$$h\varphi(c) = \varphi(c+h) - \varphi(c) - h\varepsilon'(h)$$

$$|h|\|\varphi(c)\| \leq \|\varphi(c+h) - \varphi(c)\| + |h|\|\varepsilon'(h)\|$$

$\forall h$, $|h| < \inf(\eta_1, \eta_2)$:

$$\|f(c+h) - f(c)\| \leq |h|\|f'(c)\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|h|\|\varphi'(c)\| \leq \|\varphi(c+h) - \varphi(c)\| + \frac{\varepsilon}{2}|h|$$

$h > 0$:

$$\|f(c+h) - f(c)\| \leq \|\varphi(c+h) + \varphi(c)\| + \varepsilon h$$

$c = \inf(U)$, $\forall t < c$, (2.1)(t) vérifiée, $\forall t \in [\alpha, c]$ ($c \notin U$) :

$$\|f(c) - f(\alpha)\| \leq \varphi(c) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(c-\alpha) + \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\|f(c) - f(\alpha)\| &\leq \|f(c+h) - f(c) + f(c) - f(\alpha)\\
&\leq \varphi(c+h) - \varphi(c) + \varepsilon h + \varphi(c) - \varphi(\alpha) - \varepsilon(c-\alpha) + \varepsilon\\
&\leq \varphi(h) - \varphi(a) + \varepsilon(c+h-\alpha) + \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\forall h,\ 0 < h < \eta = \inf(\eta_1, \eta_2),\ (2.1)(c+h) \text{ vraie}, \inf U \geq c+\eta \tag{2.3}$$

$$\forall h,\ 0 \leq h < \eta,\ c+h \notin U \tag{2.4}$$

(2.3) et (2.4) nous mène à une contradiction. Conclusion $U = \emptyset$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, (2.1)($t$) vraie :

$$\|f(t) - f(\alpha)\| \leq \varphi(t) - \varphi(a) + \varepsilon(t-\alpha) + \varepsilon$$

$\forall t \in [\alpha, \beta]$, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\|f(t) - f(\alpha)\| \leq \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(t-\alpha) + \varepsilon$$

A la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\|f(t) - f(\alpha)\| \leq \varepsilon(t) - \varepsilon(a),\ \forall t \in [\alpha, \beta]$$

□

Corollaire (1)**.** *$f : [\alpha, \beta] \to F$ continue dérivable sur $]\alpha, \beta[$. Supposons $\exists M > 0$:*

$$\forall t \in]\alpha, \beta[,\ \|f''(t)\| \leq M$$

Alors :

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha)$$

Démonstration. $\varphi(t) = Mt$, $\|f'(t)\| \leq \varphi'(t)$:

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = M\alpha - M\beta = M(\beta - \alpha)$$

s □

Définition 2.1.1. $x, y \in U$:

$$[x, y] = \{(\lambda x + \mu y)_{\lambda+\mu=1,\, \lambda,\mu \geq 0}$$

Définition 2.1.2. U convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$, $[x, y] \in U$.

Exemple 2.1.1. Dans E, une boule est convexe.

Exemple 2.1.2. Une couronne n'est pas convexe.

Corollaire (2)**.** *E et F des espaces vectoriels normés, U ouvert convexe de E. $f : U \to F$ différentiable et on suppose que $\forall x \in U$, $\|Df(x)\| \leq M$. Alors $\forall a, b \in U$:*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$$

Démonstration. $\forall t \in [0, 1]$:

$$ta + (1 - t)b \in U$$

Posons $g(t) = f(ta + (1 - t)b)$:

$$\begin{array}{ccccc} [0,1] & \xrightarrow{\gamma} & U & \xrightarrow{f} & F \\ t & \mapsto & ta + (1-t)b & \mapsto & f(ta + (1-t)b) = g(t) \end{array}$$

$$D(g(t)) = D(f(\gamma(t)) \circ D\gamma(t)$$

Pour $h \in \mathbb{R}$:

$$D(\gamma(t)).h = h\gamma'(t),\ \gamma'(t) = a - b$$

$$Dg(t).h = hDf(\gamma(t))(a - b)$$

$$g'(t) = Df(\gamma(t)) \circ (a - b)$$

$$\|Dg(t)\| = \|g'(t)\| \leq \|Df(\gamma(t)\|\|a - b\| \leq M\|a - b\|$$

$$\|g(b) - g(a)\| = \|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)(1 - 0) = M(b - a)$$

□

Remarque. On peut appliquer ce qui précède à des boules qui sont toujours convexes.

$$B(a, r) = \{x \in E,\ \|x - a\| \leq r\}$$

$$x, y \in B(a, r),\ t \in [0, 1],\ tx + (1 - t)y \in B(a, r)$$

Corollaire (3)**.** *Soit U un ouvert convexe, $f : U \to F$ différentiable, si $\forall x \in U$, $Df(x) = 0$ alors f est constante.*

Démonstration. $a \in U$ et :

$$V = \{x \in U,\ f(x) = f(a)\}$$

V est fermé dans U. On montre aussi que V est ouvert. Soit $x_0 \in V$ et $\eta > 0$, $B(x_0, \eta) \subset U$. $\forall x \in B(x_0, \eta)$, $Df(x) = 0$:

$$\forall y \in B(x_0, \eta),\quad \|f(y) - f(x_0)\| \leq \sup_{x \in B(x_0,\eta)} \|Df(x)\|\|y - x_0\|$$

$$\|f(y) - f(x_0)\| = 0$$

$$f(y) - f(x_0) = f(a),\ B(x_0, \eta) \subset V$$

$V \neq \emptyset$, $a \in V$ U connexe $\Rightarrow V = U$.

$$\forall x \in U,\ f(x) = f(a)$$

□

2.2 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2.2.1. Soient E et F des espaces vectoriels normés et $U \subset E$ ouvert. $f : U \to F$. On suppose que f est différentiable sur U. f est de classe $\mathcal{C}^1$ si $Df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Theorème 2.2.1. *$U \subset E = E_1 \times ... \times E_m$. $f : U \to F$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et en particulier différentiable) $\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq m$, f admet une dérivée partielle $D_i f$ et $\forall 1 \leq i \leq m$, $D_i f : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue.*

Exemple 2.2.1. $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \to F$. Si $\forall 1 \leq i \leq m$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f$ existe et est continue alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et en particulier f est différentiable).

$$Df(x_1, x_2, ..., x_m) \underbrace{(h_1, ..., h_m)}_{\in \mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_m) h_i$$

Démonstration. a) On va montrer que f est différentiable. On se place dans le cas où $n = 2$; Soit $(a_1, a_2) \in U \subset E_1 \times E_2$ et $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$.

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = D_1 f(a_1, a_2) h_1 + D_2 f(a_1, a_2) h_2 + \|(h_1, h_2)\| \varepsilon(h_1, h_2)$$

Est-ce que l'on a $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1, h_2) = 0$? Ou encore $\exists ? \eta > 0$, $\forall h$, $\|h\| \geq n$, on ait $(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \in U$:

$$\begin{aligned} \Delta(h_1, h_2) &= \underbrace{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - D_2 f(a_1, a_2).h_2}_{\varphi_2(h_1,h_2)} \\ &\quad + \underbrace{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2) h_1}_{\varphi_1(h_1,h_2)} \end{aligned}$$

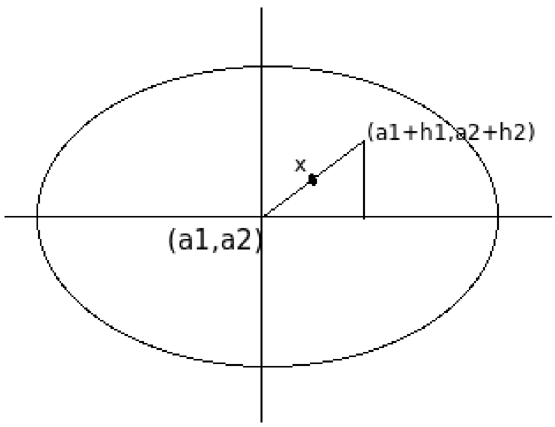
$$\begin{aligned} \varphi_1(h_1, h_2) &= \|h_1\| \varepsilon_1(h_1) && \lim_{h_1 \to 0} \varepsilon_1(h_1) = 0 \\ &= \|(h_1, h_2)\| \varepsilon_1'(h_1, h_2) && \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon'(h_1, h_2) = 0 \end{aligned}$$

On pose :

$$g(x) = f(a_1 + h_1, x) - D_2 f(a_1, a_2).x,\ x \in [a_2, a_2 + h]$$

$$\varphi_2(h_1, h_2) = g(a_2 + h_2) - g(a_2)$$

$$Dg(x) = D_2 f(a_1 + h_1, x) - D_2 f(a_1, a_2)$$



La continuité de $D_2 f$ implique $\exists \alpha > 0$, $\forall (h_1, h_2)$, $\|(h_1, h_2)\| \leq \alpha$, $\|Dg(x)\| < \varepsilon$. Les accroissements finis nous donne :

$$\|\varphi_2(h_1, h_2)\| = \|g(a_2 + h_2) - g(a_2)\| \leq \|h_2\| \sup_{x \in [a_2, a_2+h_2]} \|Dg(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|h_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|(h_1, h_2)\|$$

dès que $\|(h_1, h_2)\| \leq \alpha$. La première partie de la preuve implique qu'il existe $\beta \geq 0$ tel que :

$$\forall (h_1, h_2),\ \|(h_1, h_2)\| \leq \beta,\ \|\varphi_1(h_1, h_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|(h_1, h_2)\|$$

$\|(h_1, h_2) \leq \inf(\alpha, \beta)$

$$\|\Delta(h_1, h_2)\| \leq \|\varphi_1(h_1, h_2)\| + \|\varphi_2(h_1, h_2)\| \leq \varepsilon \|(h_1, h_2)\|$$

b) Df continue, $U \stackrel{\text{def}}{\longrightarrow} \mathcal{L}(E_1 \times ... \times E_n, F)$.

$$Df(a).h = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) h_i$$

avec $a = (a_1, ..., a_n)$ et $h = (h_1, ..., h_n)$.

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xrightarrow{u_i} & E_1 \times ... \times E_n \\ & {\scriptstyle \mathrm{id}_{E_i}} \searrow & \downarrow p_i \\ & & E_i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{Df} & \mathcal{L}(E_1 \times ... \times E_n, F) & & \sum_{i=1}^n \varphi_i \circ p_i \\ & {\scriptstyle (Df_i)_{1 \leq i \leq n}} \searrow^{(1)} & \uparrow (2) & & \nearrow \\ & & \prod_i \mathcal{L}(E_i, F) & \ni (\varphi_i)_{1 \leq i \leq n} & \end{array}$$

(1) : continue, (2) : linéaire continue.

□

Notation. Soit E et F des espaces vectoriels normés.

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(E, F) &= \{\text{isomorphismes linéaires continues}\} \\ &= \{u \in \mathcal{L}(E, F) \text{ continues tel que } u^{-1} \text{ existe et est continue}\} \end{aligned}$$

Lemme 2.2.2. *Si E et F sont des espaces de Banach,* $\mathrm{GL}(E, F)$ *est un ouvert dans* $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. $u_0 \in \mathrm{GL}(E, F)$, $h \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\|h\| \leq ? \stackrel{?}{\Rightarrow} u_0 + h \in \mathrm{GL}(E, F)$$

$$u_0 + h \in \mathrm{GL}(E, F) \Rightarrow u_0 \circ (u_0 + h) \in \mathrm{GL}(E, E)$$

$$\mathrm{id}_E + u_0^{-1} \circ h = id_E + k$$

$$\|h\| \leq \alpha \Rightarrow \|k\| \leq \|u_0^{-1}\| \|h\| \leq \alpha \|u_0^{-1}\|$$

On est ramené à montrer que si $\|k\|$ est petit, $k \in \mathcal{L}(E, E)$.

$$\mathrm{id}_E - k \in \mathrm{GL}(E, E)$$

Rappel. L'identité $(1 - x)(1 + x + ... + x^n) = (1 - x^{n+1})$ est vraie dans n'importe quel anneau.

$$(\mathrm{id} - k)(\mathrm{id} - k + k^2 + \ldots + k^n) = \mathrm{id} - k^{n+1} \to \mathrm{id} \text{ dans } \mathcal{L}(E,E)$$

Si $\|k\| < 1$, $\|k\|^{n+1} \to 0$. E complet $\Rightarrow \mathcal{L}(E,E)$ complet :

$$\sum_{n\geq 0} \|k^n\| \text{ converge } \overset{(1)}{\Rightarrow} \underbrace{\sum_{n\geq 0} h^n}_{\psi} \text{ converge}$$

(1) : $\mathcal{L}(E,E)$ est complet.

$$(\mathrm{id} - k)\circ = \psi \circ (\mathrm{id} - k) = \mathrm{id}$$

$\psi \in \mathcal{L}(E,E)$ (et continue) et $\psi = (\mathrm{id} - k)^{-1}$. □

Proposition 2.2.3. *E et F espaces de Banach. On suppose que* $\mathrm{GL}(E,F) \neq \emptyset$*. Soit :*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{J} : & \mathrm{GL}(E,F) & \to & \mathrm{GL}(F,E) \\ & u & \mapsto & u^{-1} \end{array}$$

$\mathcal{J}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$D\mathcal{J}; \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F,E)$$

$$D\mathcal{J}(u).h = u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & F \\ u^{-1} \uparrow & & \downarrow u^{-1} \\ F & & E \end{array}$$

Démonstration. On pose $v = u^{-1} \circ h$, $\|v\| \leq \|u^{-1}\|\|h\| < 1$.

$$\begin{aligned} (u+h)^{-1} - u^{-1} &= (\mathrm{id} + v^{-1} - \mathrm{id}) \circ u^{-1} \\ &= (\mathrm{id} - v + v^2 - v^3 + \ldots + (-1)^n v^n - \mathrm{id})u^{-1} \\ &= (u \circ (\mathrm{id} + u^{-1}h))^{-1} - u^{-1} \\ &= (\mathrm{id} + u^{-1}h)^{-1} \circ u^{-1} - u^{-1} \\ &= -u^{-1} \circ h \circ u^{-1} + \underbrace{\sum_{n\geq 2} (-1)^n v^n \circ u^{-1}}_{R(h)} \end{aligned}$$

$R(h) = \|h\|\varepsilon(h)$, $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ ($\|R(h)\| \leq C\|h\|^2$). □

Theorème 2.2.4. *Soient U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé E complet, F espace vectoriel normé complet et $f_n : U \to F$. On suppose :*

(i) $\exists a \in U$, $(f_n(a))_{n\geq 1}$ *a une limite.*

(ii) $\forall n$, f_n *est différentiable et* $Df_n \to \varphi$

$$Df_n : U \to \mathcal{L}(E,F),\ \varphi : U \to \mathcal{L}(E,F)$$

Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout borné $B \subset U$ vers une fonction $f : B \to F$ différentiable. De plus $Df = \varphi$.

Démonstration.

$$\|f_p(x)-f_q(x)-f_p(a)+f_q(a)\| = \|f_p(x)-f_q(x)-(f_p(a)-f_q(a))\| \leq \|x-a\| \sup_{y\in[a,x]} \|Df_p(y)-Df_q(y)\|$$

Critère de Cauchy appliqué à Df_n :

$$\exists N,\, \forall p,q \geq N,\, \sup_{y\in U} \|Df_p(y) - Df_q(y)\| \leq \varepsilon$$

Soit B un ensemble borné inclu dans U tel que $\forall x \in B,\, \|x-a\| \leq C$.

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists N,\, \forall p,q \geq N,\, \forall x \in B,\, \|f_p(x) - f_q(x) - f_p(a) + f_q(a)\| \leq \varepsilon C$$

Critère de Cauchy pour $(f_n(a))_{n\geq 1}$:

$$\exists M,\, \forall p,q \geq M,\, \|f_p(a) - f_q(a)\| \leq \varepsilon$$

$$\forall p,q \geq \sup(M,N),\, \forall x \in B,\, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon(C+1)$$
$$\forall p,q \geq \sup(M,N),\, \|f_p - f_q\|_B \leq \varepsilon(C+1)$$

Donc : la suite (f_n) satisfait au critère de Cauchy et donc converge vers une fonction f.

On montre maintenant que f est différentiable. Soit $x_0 \in U$:

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \varphi(x_0-h) = \|h\|\varepsilon(h), \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) \stackrel{?}{=} 0$$

$$f(x_0+h) - f_n(x_0+h) + f_n(x_0) - f(x_0) + f_n(x_0+h) - f_n(x_0) = Df_n(x)h + Df(x)h - \varphi(x_0)h$$
$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - f_n(x_0+h) + f_n(x_0)\| \leq ?$$
$$\|(f-f_n)(x_0+h) - (f-f_n)(x_0)\| \leq \|h\| \sup_{y\in U} \|Df(y) - Df_n(y)\| \leq \varepsilon\|h\|$$

$\exists N,\, \forall n \geq N$, fixons $n \geq N$:

$$f_n(x_0+h) - f_n(x_0) - Df_n(x_0).h = \|h\|\varepsilon_n(h), \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(h) = 0$$

$\exists \alpha \geq 0,\, \forall h,\, \|h\| \leq \alpha,\, \|f_n(x_0+h) - f_n(x_0) - Df_n(x_0).h\| \leq \varepsilon h$:

$$\|Df_n(x_0).h - \varphi(x_0).h\| = \|(Df_n(x_0) - \varphi).h\| \leq \|Df_n(x_0) - \varphi\|\|h\| \leq \varepsilon\|h\|$$

□

Chapitre 3

Théorème d'inversion locale - Théorème de fonctions implicites

3.1 Introduction

Définition 3.1.1. Soient E et F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ et $V \subset F$ ouverts, $f : U \to V$. On dit que f est un difféomorphisme (respectivement $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme) si et seulement si :

(i) f est un homéomorphisme

(ii) f et f^{-1} sont différentiables (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$).

Contre-Exemple 3.1.1. $E = F = \mathbb{R}$, $U = V = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$:

(i) f est un homéomorphisme $\mathbb{R} \underset{\sim}{\to} \mathbb{R}$.

(ii) f est différentiable

(iii) f^{-1} n'est pas différentiable en 0.

Remarque. Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme $\forall a \in U$, $Df(a) \in \mathrm{GL}(E, F)$. En effet, si $g = f^{-1}$ alors $\forall a \in U$, $b = f(a)$

$$\mathrm{id} = D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a)$$

Définition 3.1.2. Soient $f : U \to V$ et $a \in U$. f est un ($\mathcal{C}^1$-) difféomorphisme local au voisinage de a s'il existe un ouvert $U_1 \subset U$ et un ouvert $V_1 \subset V$ tel que pour $a \in U_1$ et $f(a) \in V_1$.

$$f|_{U_1} : U_1 \to V_1 \text{ est un } (\mathcal{C}^1\text{-}) \text{ difféomorphisme}$$

3.2 Théorème d'inversion locale

Theorème 3.2.1 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soit E et F des espaces de Banach, soit $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$ tel que $Df(a) \in \mathrm{GL}(E, F)$ alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de a.*

Corollaire. *Avec les notations de la **Définition 3.1.1.**, soit $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur un ouvert V de F si et seulement si :*

(i) f est injective

(ii) $\forall a \in U$, $Df(a) \in \mathrm{GL}(E, F)$.

*Démonstration du **Corollaire**.* $(\Rightarrow)$ évident.

$(\Leftarrow)$ D'abord, f est une application ouverte. Soit $a \in U$. Le théorème d'inversion locale (**Théorème 3.2.1.**) implique qu'il existe un ouvert $U_1 \subset U$ $(a \in U_1)$ et $V_1 \subset V$ $(b = f(a) \in V)$ tel que :

$$f|_{U_1} : U_1 \underset{\sim}{\rightarrow} V_1 \text{ est un homémorphisme}$$

$V_1 = f(U_1)$ est un ouvert contenant $f(a)$. $\forall b \in f(U)$, $\exists V_1$ ouvert dans F tel que $b \in V_1 \subset f(U)$. Donc $f(U)$ est ouvert. Idem avec $U' \subset U$.

$$\begin{array}{lllll} f & : & U & \rightarrow & f(U) = V & \text{ouvert} \\ f^{-1} & : & V & \rightarrow & U & \text{ouvert} \end{array}$$

f bijection, f et f^{-1} sont continues. En résumé :

$$f : U \rightarrow V \text{ homéomorphisme}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par hypothèse. f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

□

*Démonstration du **Théorème 3.2.1**.* I/

Theorème 3.2.2. *Soit E un espace de Banach, $a \in E$, $r > 0$. On définit :*

$$B(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$$

Soit $f : B(a,r) \rightarrow E$. On pose $\varphi = \mathrm{id}_E - f : B(a,r) \rightarrow E$. On suppose que φ est k-lipschitzienne pour $0 < k < 1$. Alors il existe V un ouvert, $a \in V \subset B(a,r)$ tel que $f|_V : V \rightarrow B(f(a),(1-k)r)$ est un homémorphisme.
De plus, $f^{-1} : B(f(a),(1-k)r) \rightarrow V$ est $\frac{1}{1-k}$-lipchitzienne.

Démonstration. $\forall x, x' \in B(a,r)$:

$$\|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq k\|x - x'\|$$

$$f(x) - f(x') = x - x' - (\varphi(x) - \varphi(x'))$$

$$\|f(x) - f(x')\| \geq \|x - x'\| - \|\varphi(x) - \varphi(x')\|$$

$$\|f(x) - f(x')\| \geq \|x - x'\|(1-k) \tag{3.1}$$

On note $b = f(a)$. Soit $y \in B(b,(1-k)r)$. Existe-il un unique $x \in B(a,r)$ tel que $f(x) = y$?

$$x - f(x) + y = x \Leftrightarrow \varphi(x) + y = x$$

On pose $\psi(x) = \varphi(x) + y$. Le problème est de trouver un point fixe de la fonction ψ $(f(x) = y \Leftrightarrow \psi(x) = x)$. ψ est k-lipschtizienne.

$$\|\psi(x) - \psi(x')\| = \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq k\|x - x'\|$$

On va montrer : $\exists x \in B(a,r)$ tel que $\psi(x) = x$.

a) unicité : évidente. Soit $\psi(x) = x$ et $\psi(x') = x'$

$$k\|x - x'\| \geq \|\psi(x) - \psi(x')\| = \|x - x'\|, \qquad k < 1 \Rightarrow x = x'$$

b) existence : on construit une suite (x_n) par réccurence.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \psi(x_n) \\ x_0 = a \end{cases}, \ \|x_{n+1} - x_n\| \leq k\|y - b\| \leq k^n(1-k)r$$

Supposons la suite construite jusqu'à l'indice n $(x_0, x_1, ..., x_n)$.

$$\forall j,\ j \leq n-1, \qquad \|x_{j+1} - x_j\| \leq k^j(1-k)r$$

On construit $x_{n+1} = \psi(x_n)$.

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|\psi(x_n) - \psi(x_{n-1})\| \\ &\leq k\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq kk^{n-1}(1-k)r \\ &= k^n(1-k!!)r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - a\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + ... + \|x_1 - x_0\| \\ &\leq (1-k)r(k^n + k^{n-1} + ... + k + 1) \\ &= \frac{1-k^{n+1}}{1-k}(1-k)r \\ &= (1-k^{n+1})r < r \end{aligned}$$

Donc $x_{n+1} \in B(a, r)$. La suite (x_n) est une suite de Cauchy :

$$\begin{aligned} n+1 > m,\ \|x_{n+1} - x_m\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + ... + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &\leq (k^n + ... + k^m)(1-k)r \\ &\leq (1-k)rk^m(1 + k + ... + k^{n-m}) \\ &\leq rk^m \end{aligned}$$

$\forall m, n,\ n \geq m$

$$\|x_{n+1} - x_m\| \leq)rk^m \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Comme E est de Banach, $\lim x_n = x \in E$.

$$\|x_n - a\| < \frac{1-k^{n+1}}{1-k}\|y - b\|$$

$$\|x - a\| < \frac{1}{1-k}\|y - b\| < r$$

Donc $x \in B(a, r)$. ψ continue car lipschitzienne.

$$x \leftarrow x_{n+1} = \psi(x_{n+1}) \rightarrow \psi(x)$$

Donc à la limite, $\psi(x) = x$.

Résumons maintenant la situation : on a montré que $\forall y \in B(b, (1-k)r)$, $\exists x \in B(a, r)$ tel que $f(x) = y$. On pose $V = f^{-1}(B(b, (1-k)r))$. C'est un ouvert inclut dans $B(a, r)$. Soit $f : V \to B(b, (1-k)r)$ bijective. f^{-1} est $\frac{1}{1-k}$ lipschitzienne.

$$f(x) = y,\ x = f^{-1}(y)$$

$$f(x') = y',\, y' = f^{-1}(x')$$

$$\begin{aligned}(3.1) \quad \Leftrightarrow \quad & \|y - y'\| \geq (1-k)\|f^{-1}(x) - f^{-1}(x')\| \\ \Leftrightarrow \quad & \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\| \leq \frac{1}{1-k}\|y - y'\|\end{aligned}$$

Donc f^{-1} est continue. □

II/

Proposition 3.2.3. *Soit F un espace de Banach, U est un ouvert d'un espace de Banach E. Soit $f : U \to F$ et soit $a \in U$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a et que $Df(a) \in \mathrm{GL}(E, F)$. Alors il existe un voisinage ouvert V de a, $V \subset U$ et un voisinage ouvert W de $f(a) = b$, $W \subset F$ tel que $f : V \underset{\sim}{\to} W$ soit un homéomorphisme.*

Démonstration. On peut supposer que $E = F$. Les hypothèses de la proposition sont :

1) On remplacera f par $g = Df(a) \circ f$.
2) $f : U \to F$
3) $Df(a) : E \to F$
4) $Dg(a) = Df(a)^{-1} \circ Df(a) = \mathrm{id}_E$

On veut arriver à la conclusion suivante :

$$\begin{array}{ccc} V & \underset{f}{\overset{\sim}{\to}} & W \\ \downarrow & \swarrow_{(Df(a))^{-1}} & \\ W' = Df(a)^{-1} & \text{et} & W' \text{ ouvert} \end{array} \tag{3.2}$$

On est ramené au cas où $E = F$ et $Df(a) = \mathrm{id}_E$.

$$D\varphi(x) = \mathrm{id}_E - Df(x)$$

$$D\varphi(a) = \mathrm{id}_E - \mathrm{id}_E = 0$$

$\exists B$ une boule de centre a et de rayon r :

$$\forall x \in B,\, \|D\varphi(r)\| < \frac{1}{2} \qquad \text{(continuité de } D\varphi)$$

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\forall x, x' \in B(a, r),\, \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq \|x - x'\| \sup_{\xi \in B(a,r)} \|D\varphi(\xi)\|$$

$$\forall x, x' \in B(a, r),\, \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

Donc φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne. On applique le *Théorème 3.2.2* pour conclure. □

III/ Soit $f : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$. $Df(a) \in \mathrm{GL}(E, F)$, cela veut dire qu'il existe V ouvett de U, $a \in V'$:

$$\forall x \in U',\, Df(x) = \mathrm{GL}(E, F)$$

On a aussi que $\mathrm{GL}(E, F)$ ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$V' = \{x,\, Df(x) \in \mathrm{GL}(E, F)\} = (Df)^{-1}(\mathrm{GL}(E, F)) \text{ ouvert}$$

$\exists V, W$ un voisinage de a et $f(a) = b$.

$$f|_V : V \to W \text{ homéomorphisme}$$

$V_1 = V \cap V', f(V_1) = W_1$ ouvert de W.

$$V_1 \xrightarrow[f|_{V_1}]{\sim} W \text{ homéomorphisme}$$

et $\forall x \in V_1,\ Df(x) \in \mathrm{GL}(E, F)$. Donc $(f|_{V_1})^{-1}$ est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$.

□

Cas de la dimension finie $U \subset E = F = \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ avec $f_j : U \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. La matrice $Df(x)$ la base canonique.

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$Df(a) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \det(J(a)) \neq 0$$

3.3 Théorème des fonctions implicites

Problème. *Soit f définie par $f(x, y) = 0$. On cherche l'existence de g tel que :*

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$$

Exemple 3.3.1. $f(x, y) = \varphi(x) + y\psi(x)$, φ, ψ sont des applications continues. $f(x, y)$ est soluble en y au voisinage des points tel que $\psi(a) \neq 0$:

$$\psi(x) = \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0,\ f(a, b) = 0$$

Theorème 3.3.1 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soient E, F, G Banach, $\Omega \subset E \times F$ ouvert, $f : \Omega \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$, $(a, b) \in \Omega$ tel que :*

$$D_2 f(a, b) \in \mathrm{GL}(F, G)$$

Alors il existe un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$, $(a, b) \in \Omega$ et il existe W un ouvert de E, $a \in W$ et une fonction $g : W \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\forall (x, y) \in \Omega_1$:

$$f(x, y) = f(a, b) \Leftrightarrow y = g(a) \tag{3.3}$$

De plus, quitte à restreindre l'ouvert W :

$$Dg(x) = -D_2(f(x, g(x))^{-1} \circ D_1 f(x, g(x))$$

Démonstration. Soit :

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \Omega & \to & E \times G \\ & & (x, y) & \mapsto & (x, f(x, y)) \end{array}$$

Φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$D\Phi(x, y) : E \times F \to E \times G$$

$$D\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_E & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

Soit $(u,v) \in E \times F$:

$$D\Phi(x,y)(u,v) = (\mathrm{id}_E\, u + 0v, D_1 f(x,y)u + D_2 f(x,y)v)$$

$$D\Phi(a,b) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_E & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}$$

Le théorème d'inversion locale nous dit qu'il existe $\Omega_1 \subset \Omega$ voisinage de (a,b) et $U \subset E \times G$ voisinage de $(a, f(a,b))$ tel que :

$$\Phi|_{\Omega_1} : \Omega_1 \underset{\sim}{\rightarrow} U \qquad \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \Omega & \to & U \\ \Phi & : & (x,y) & \to & (x, f(x,y)) \\ \Phi^{-1} & : & (x, h(x,z)) & \leftarrow & (x,z) \in U \end{array}$$

Soit $(x,z) \in U$, $(x,y) \in \Omega_1$, $z = g(x,y) \Leftrightarrow y = h(x,z)$. En particulier, soit $(a,b) \in \Omega_1 \Rightarrow (a, f(a,b)) \in U$:

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ f(a,b) = f(x,y) \Leftrightarrow y = h(x, f(a,b)) \overset{\text{def}}{=} g(x) \tag{3.4}$$

On pose :

$$W = \{x \in E,\ (x, f(a,b)) \in G\}$$

et W est un voisinage ouvert de x.

$$U \subset E \times \{f(a,b)\} \subset E \times G \text{ et } W = U \cap (E \times \{f(a,b)\})$$

$$g : W \to F$$

$$g(x) = h(x, f(a,b))$$

$$\begin{array}{ccccc} W & \to & U \underset{h}{\to} & & F \\ x & \mapsto & (x, f(a,b)) & \mapsto & h(x, f(a,b)) \end{array}$$

Φ^{-1} de classe $\mathcal{C}^1 \Rightarrow h$ est de classe $\mathcal{C}^1 \Rightarrow g$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi (3.4) montre (3.3). □

Remarque. On peut prendre Ω_1 de la forme $\Omega_1 = W \times V$ avec W, V voisinage ouvert de a et b.

Remarque. $\forall x \in W$, $f(x, g(x)) = g(a,b)$.

$$\forall x \in W,\ D_1 f(x, g(x)) + D_2 f(x, g(x)) \circ Dg(x) = 0 \tag{3.5}$$

$$E \supset W \xrightarrow[\mathrm{id}\times g]{} \Omega_1 (\supset E \times F) \underset{f}{\rightarrow} G$$

On sait que $D_2 f(a, g(a)) \in \mathrm{GL}(F,G) \subset \mathcal{L}(E,F)$ ouvert. f est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$W' = \{x \in E,\ D_2 f(x, g(x)) \in \mathrm{GL}(F,G)\} \text{ ouvert}$$

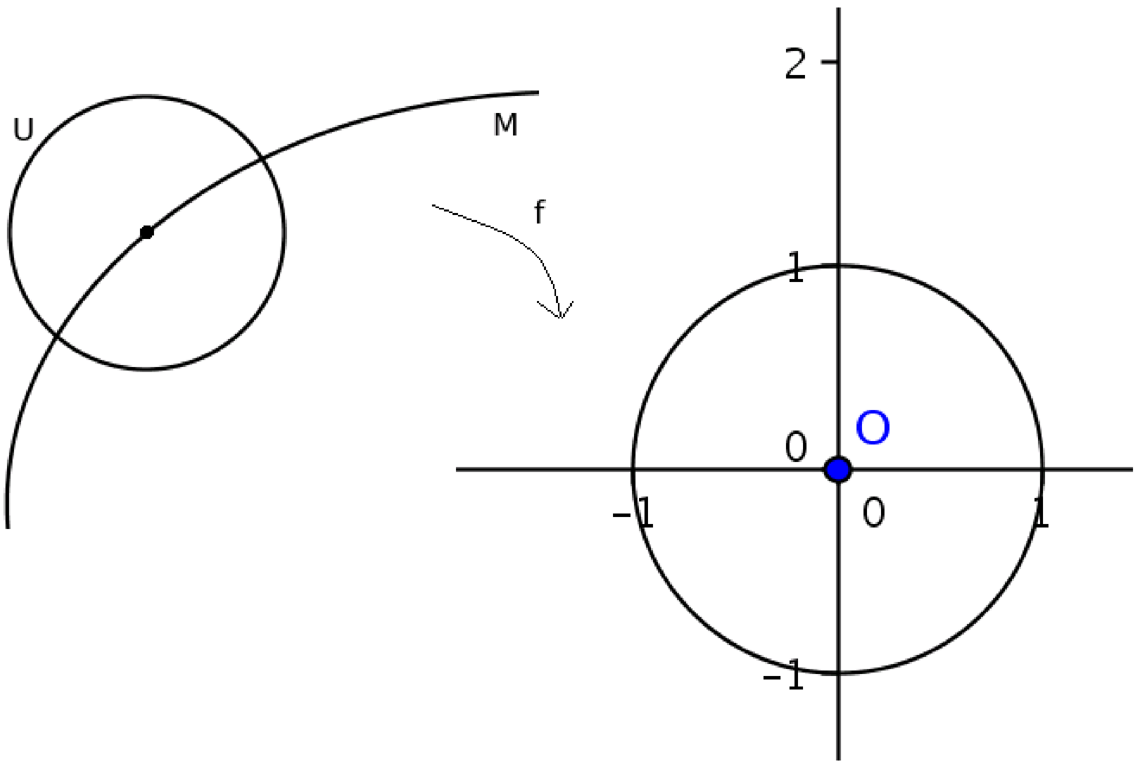
$$(3.5) \Rightarrow Dg(x) = -D_2 f(x, g(x))^{-1} \circ D_1 f(x, g(x))$$

3.4 Applications géométriques

3.4.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.4.1. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$. $\forall x \in M$, il existe un voisinage U ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$ et il existe un voisinage V ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $f : U \to V$ tels que !

$$f(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \text{ pour } 1 \leq p \leq n$$



Remarque. $d(x) = \dim_x M$ est une fonction continue sur M (localement constante). Donc si M est connexe, $d(x)$ est constante $= \dim M$.

Proposition 3.4.1 (Graphe d'une fonction)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe $\mathcal{C}^1$.*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n-p} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^n$$

Γ_f est une sous-variété de dimension p dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcccc} F & : & U = \Omega \times \mathbb{R}^{n-p} & \to & \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \\ & & (x, y) & \mapsto & (x, y - f(x)) \end{array} \tag{3.6}$$

F est de de classe $\mathcal{C}^1$:

$$F(\Gamma_f) = F(\Omega \times \mathbb{R}^{n-p}) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p} & 0 \\ Df(x) & \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-p}} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ est injective. (3.6) $\Rightarrow$ F est un difféomorphisme de $\Omega \times \mathbb{R}^{n \times p}$ vers $F(\Omega \times \mathbb{R}^{n-p})$ ouvert. $\square$

Proposition 3.4.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $F : \Omega \to \mathbb{R}^{n-p}$ $(1 \leq p \leq n-1)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $M = F^{-1}(\{0\})$. On suppose que $\forall x \in M$, $DF(x)$ est de rang $n-p$.*

$$\begin{array}{lcl} \Omega \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{DF(a)} & \mathbb{R}^{n-p} \\ \downarrow F & & \\ \mathbb{R}^{n-p} & & \end{array}$$

Alors M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de dimension $n-p$ de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.4.1. $n = 2$, $p = 1$:

$$\begin{array}{cccccc} F & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-1 \end{array}$$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 1\}$$

$$DF(x)(u,v) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)u + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)v$$

$$\mathrm{rg}(DF(x)) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) \neq (0,0) \Leftrightarrow (2x,2y) \neq (0,0)$$

Démonstration. $F = (F_1, F_2, ..., F_{n-p})$, $F_j : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\mathrm{rg}\, Df(x) = n-p \Leftrightarrow (DF_1(x), DF_2(x), ..., DF_{n-p}) \text{ indépendants}$$

$$DF(x) = \begin{pmatrix} DF_1(x) \\ DF_2(x) \\ \vdots \\ DF_{n-p}(x) \end{pmatrix},\ DF_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ DF_j(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$$

$(\mathbb{R}^n)^*$ étant le dual de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in M$, il existe p formes linéaires : $\varphi_{n-p+1}, ..., \varphi_n \in (\mathbb{R}^n)^*$. Ainsi $(DF_1(x), DF_2(x), ..., DF_{n-p}(x), \varphi_{n-p+1}, ..., \varphi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}^n)^*$. On considère :

$$\begin{array}{ccccc} g & : & \Omega \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x & \mapsto & (F_1(x), ..., F_{n-p}(x), \varphi_{n-p+1}(x), ..., \varphi_n(x)) \end{array}$$

g de classe $\mathcal{C}^1$.

$$D_g(x) = (DF_1(x), ..., DF_{n-p}(x), \varphi_{n-p+1}, ..., \varphi_n)$$

$DG(a) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Le théorème d'inversion locale nous dit que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de a. $\exists U$ voisinage de a dans Ω, $\exists V$ voisinage de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g : U \underset{\sim}{\to} V$ difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.

$$g(M \cap U) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^p)$$

$\square$

Proposition 3.4.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ *ouvert,* $p \leq n-1$. $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Supposons que* $\forall u \in \Omega$, $D\varphi(u)$ *de rang* p *(maximal). Alors* $M = \varphi(\Omega)$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* p.

Remarque.

$$\begin{array}{lcl} \Omega \subset \mathbb{R}^p & \xrightarrow{D\varphi(x)} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow \varphi & & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Démonstration. Soit $u_0 \in \Omega$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, $\varphi_j : \Omega \to \mathbb{R}$

$$D\varphi(u) = \begin{pmatrix} D\varphi_1(u) \\ D\varphi_2(u) \\ \vdots \\ D\varphi_n(u) \end{pmatrix} \text{ de rang } p$$

On peut supposer que $(D\varphi_1(u_0), ..., D\varphi_p(u_0))$ sont indépendants, $Dg(u_0) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^p$ avec $\varphi = (g, h)$, $g = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$, $h = (\varphi_{p+1}, ..., \varphi_n)$:

$$\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} = \mathbb{R}^n$$

g et h de classe $\mathcal{C}^1$, g est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de u_0. Il existe un voisinage U de u_0 dans $\Omega \subset \mathbb{R}$ et un voisinage V de $g(u_0)$ dans $\mathbb{R}^n$.

$$g|_U : U \xrightarrow{\sim} V \ \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme}$$

$$\begin{array}{lll} U & \xrightarrow{\varphi|_U} & V \times \mathbb{R}^{n-p} \supset \varphi(U) \\ & \searrow & \sim\downarrow (g|_U)^{-1} \times \mathbb{R}^{n-p} = F \\ & & U \times \mathbb{R}^{n-p} \supset \varphi(U) \end{array}$$

$$\psi(U) = F(M \cap (V \times \mathbb{R}^{n-p}))$$

$$\begin{array}{lllll} G & : & U \times \mathbb{R}^{n-p} & \to & U \times \mathbb{R}^{n-p} \\ & & (u, z) & \mapsto & (u, z - h(u)) \end{array} \text{ isomorphisme}$$

G $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

$$(G \circ F)(M \cap (U \times \mathbb{R}^{n-p}) = U \times \{0\} = (U \times \mathbb{R}^{n-p}) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

□

Exemple 3.4.2. $g : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-p}$.

$$\Gamma_g = \{(x, g(x)),\ x \in \Omega\}$$

$$\begin{array}{lllll} \varphi & : & \Omega & \to & \mathbb{R}^n \\ & & u & \mapsto & (u, g(u)) \end{array}$$

$$D\varphi(u) = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^p}, Dg(x))$$

Une autre manière de définir une sous-variété est d'utiliser un paramétrage.

Proposition 3.4.4 (Sous-variété paramétrée)**.** *Soit* $1 \leq p \leq n-1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Si en* $u_0 \in \Omega$, *le rang de* $J\varphi(u_0)$ *est* p, *il existe un voisinage ouvert* Ω_0 *de* u_0 *tel que* $\Omega_0 \subset \Omega$ *et que* $M = \varphi(\Omega_0)$ *soit une sous-variété de dimension* p *de* $\mathbb{R}^n$. *On dit que* φ *est un paramétrage de* M.

Cette fois encore la condition sur le rang signifie qu'il est maximum. La condition est aussi équivalente au fait que $D\varphi(u_0)$ est injective. On dit alors que φ est une *immersion* en u_0.

Mais attention, même si φ est une immersion en tout point de Ω il n'est pas toujours vrai que son image est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. L'hypothèse signifie que p des n lignes de la matrice $J\varphi(u_0)$ sont linéairement indépendantes. Un choix convenable de l'ordre des coordonnées de $\mathbb{R}^n$ permet de supposer que ce sont les p premières composantes, c'est-à-dire d'écrire $\varphi = (g, h)$, où $g : \Omega \to \mathbb{R}^p$ et $h : \Omega \to \mathbb{R}^{n-p}$ sont telles que

$$J\varphi(u_0) = \begin{pmatrix} Jg(u_0) \\ Jh(u_0) \end{pmatrix}$$

avec une matrice $Jg(u_0)$ inversible. Le théorème d'inversion locale appliqué à g au point u_0 donne un voisinage ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$ de u_0 et un voisinage ouvert V (dans $\mathbb{R}^p$) de $a' = g(u_0)$ tels que $g : \Omega_0 \to V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on l'écrit $x = (x', x'')$ où $x' \in \mathbb{R}$ et $x'' \in \mathbb{R}^{n-p}$ et on pose $f = h \circ g^{-1}$. C'est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}^{n-p}$ et

$$\begin{aligned} \varphi(\Omega_0) &= \{(g(u), h(u)) \mid u \in \Omega_0\} = \{(x', h(g^{-1}(x')) \mid x' \in V\} \\ &= \{(x', f(x') \mid x' \in V\} = \Gamma_f. \end{aligned}$$

La **Proposition 3.4.2** montre alors le résultat. □

Exemple 3.4.3. 1) La sphère S^n est définie par

$$S^n = \{x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_0^2 + ... + x_n^2 - 1 = 0$$

est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$. En effet, la fonction

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & F(x) = x_0^2 + ... + x_n^2 - 1 \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$ et est une submersion en tout point de S^n, puisque $JF(x) = (2x_0, ..., 2x_n)$ n'est jamais nulle sur S^n et est donc de rang 1 en tout point de S^n.

2) Le tore T^n est défini par

$$T^n = \{x \in \mathbb{R}^{2n},\, x_1^2 + x_2^2 - 1 = x_3^2 + x_4^2 - 1 = ... = x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 = 0\}$$

C'est une sous-variété de dimension n $(= 2n - n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$. On peut le voir en appliquant la **Proposition 3.4.2** ou en utilisant la paramétrisation $\varphi(t_1, ..., t_n) = (\cos t_1, \sin t_1, ..., \cos t_n, \sin t_n)$ et la **Proposition 3.4.4**.

3) Le groupe orthogonal

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\}$$

où l'on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel, isomorphe à $\mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices carrés $n \times n$ et A^t la matrice symétrique de la matrice A. Alors $O(n)$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. En effet, appelons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ symétriques. Il est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et $O(n) = F^{-1}(0)$ où

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ & & A & \longmapsto & F(A) = A^t A - In \end{array}$$

Cette application est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$ et c'est une submersion en chaque point $A \in O(n)$ pusique (le montrer en exercice), pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $DF(A).H = A^t H + H^t A$ et, si $K \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la matrice $H = \frac{1}{2}AK$ vérifier $DF(A).H = K$, ce qui prouve la subjectivité de $DF(A)$. Il reste à remarquer que, de façon générale, si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et si on regarde M comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ pour $m > n$ via une inclusion de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, alors M est aussi une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^m$.

4) Le cône de révoluton
$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$
n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Il est facile de voir que le côné privé de son sommet $\Gamma\backslash\{0\}$ est une sous-variété de dimension 2 (surface) de $\mathbb{R}^3$. Pour voir que Γ n'en est pas une, il ne suffit pas de dire que les propositions énoncées ne s'appliquent pas... L'argument le plus simple est de remarquer que, s'il existait deux voisinages ouverts U et V de $0 \in \mathbb{R}^3$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $f : U \to V$ tel que $f(U \cap \Gamma) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ et $f(0) = 0$, il en existerait aussi vérifiant la même proppriété et connexes. Or $U \cap \Gamma\backslash\{0\}$ a (comme $\Gamma\backslash\{0\}$) deux composantes connexes alors qu'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ privé de 0 est connexe.

3.4.2 Espace tangent à une sous-variété en un point

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension p et $a \in M$.

Définition 3.4.2. 1) Un arc de courbe tracé sur M passant par a est l'image $\gamma(I)$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, γ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma(I) \subset M$.

2) Le vecteur $\gamma'(0)$ qui appartient à $\mathbb{R}^n$, est appelé vecteur tangent en a à M.

La définition donnée ci-dessus d'un vecteur tangent est « raisonnable » car si J est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et si $\varphi : J \to I$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\varphi(0) = 0$, de soirte que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ définit la même courbe tracée sur M (avec un autre paramétrage), la relation $\tilde{\gamma}'(0) = \varphi'(0)\gamma'(0)$, où le réel $\varphi'(0)$ est non nul, montre que les vecteurs $\tilde{\gamma}'(0)$ et $\gamma'(0)$ sont nuls en même temps et, quand ils ne sont pas nuls, définissent la même direction.

Proposition 3.4.5. *L'ensemble des vecteurs tangents en a à une sous-variété M de dimension p est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit U un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$, V un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. On peut supposer que $f(a) = 0$. Notons $f = (f_1, ..., f_n)$ les composantes de f et soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui définit un arc de courbe tracé sur M passant par a.

Comme U est un ouvert, si $|t|$ est assez petit, $\gamma(t) \in U \cap M$ et donc $f_j(\gamma(t)) = 0$ pour $j = p + 1, ..., n$. On en déduit $Df_j(a).\gamma'(0) = 0$ pour $j = p + 1, ..., n$. Cela veut dire que tout vecteur tangent en a à M, $v = \gamma'(0) = 0$ pour $j = p + 1, ..., n$. Cela veut dire que tout vecteur tangent en a à M, $v = \gamma'(0)$ vérifie $Df(a).v \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$ ou encore que l'ensemble des vecteurs tangents en a est inclus dans $Df(a)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p puusiqe $Df(a)^{-1}$ est un isomorphisme.

Inversement soit $v \in Df(a)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$, de sorte que $w = Df(a).v \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Posons, si $|t|$ est assez petit et pour assurer $tw \in V$ (possible puisque V est ouvert et contient 0), $\gamma(t) = f^{-1}(tw)$. L'application γ définit une courbe tracée sur M, passant par a pour laquelle $\gamma'(0) = D(f^{-1})(0).w = Df(a)^{-1}.w = v$. □

Définition 3.4.3. Le sous-espace vectoriel des vecteurs tangents en a à M est noté T_aM. Le sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$: $a + T_aM$ est appelé espace tangent en a à M.

Les trois propositions suivnates décrivent concrétement T_aM lorsque M est un graphe ou définie par des équations ou un paramétrage.

Proposition 3.4.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}^{n-p}$ $(1 \leq p \leq n - 1)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Si $a = (a', g(a')) \in \Gamma_g$, $T_a\Gamma_g = \Gamma_{Dg(a')}$.*

Un exercice indispensable consiste à expliciter ce résultat dans le cas d'une courbe plane, d'une courbe ou d'uune surface de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. On commence par se souvenir que le graphe d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$ est bien un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$. Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe tracée sur Γ_g passant par a, on a :

$$\text{pour tout } t \in I, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

où $\gamma_1(t) \in \Omega$ et $\gamma_2(t) = g(\gamma_1(t))$. Donc en utilisant le théorème de dérivation d'une fonction composée et en remarquant que $\gamma_1(0) = a'$, $\gamma_2'(0) = Dg(a').\gamma_1'(0)$, on en déduit que $v = (\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ appartient au graphe de $Dg(a')$, ce qui donne l'inclusion $T_a\Gamma_g \subset D_g(a')$. L'égalité vient alors de ce que ceux deux espaces vectoriels ont la même dimension. □

Proposition 3.4.7. *Soit $M = F^{-1}(0)$, où $F : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si F est une submersion en tout point de M, alors pour tout $a \in M$, $T_aM = \operatorname{Ker} DF(a)$.*

Autrement dit :

$$\text{si } F = (F_1, ..., F_{n-p}), \quad T_aM = \bigcap_{i=1}^{n-p} \operatorname{Ker} DF_i(a)$$

Démonstration. Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ définit un arc de courbe tracé sur M et passant par a, pour tout $t \in I$, $F \circ \gamma(t) = 0$. Donc $DF(a).\gamma'(0) = 0$. C'est dire que $\gamma'(0) \in \operatorname{Ker} DF(a)$ et que $T_aM \subset \operatorname{Ker} DF(a)$. Mais puisque F est une submersion en a, $DF(a)$ est de rang $n-p$, donc $\operatorname{Ker} DF(a)$ est de dimension $n-(n-p) = p$, qui est aussi celle de T_aM. Ceci établit l'égalité annoncée. □

L'interprétation en termes d'intersection des noyaux des formes linéaires que sont les différentielles des composantes est de l'algèbre linéaire classique. Cela veut aussi dire que T_aM est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par les $n-p$ équations $DF_i(a).h = 0$ qui sont les linéarisées en a des $n-p$ équations $F_i(x) = 0$ qui définissent S.

Proposition 3.4.8. *Sous les hypothèses et notations de la **Proposition 3.4.4**, si $a = \gamma(u_0)$, $T_aM = D\varphi(u_0)(\mathbb{R}^p)$.*

Démonstration. Soit $w \in \operatorname{Im} D\varphi(u_0)$ et $v \in \mathbb{R}^p$ tel que $w = D\varphi(u_0).v$. Puisque Ω est ouvert, il existe un intervalle ouvert $I \ni 0$ tel que pour tout $t \in I$, $u_0 + tv \in \Omega_0$. L'application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ donnée par $\gamma(t) = \varphi(u_0 + tv)$ définit un arc de courbe tracé sur M passant par a pour lequel $\gamma'(0) = D\varphi(u_0).v = w$. Ceci montre que $w \in T_aM$ et donne l'inclusion $D\varphi(u_0)(\mathbb{R}^p) \subset T_aM$. L'égalité des dimensions permet de conclure. □

Exemple 3.4.4. 1) Le plan tangent à la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $f(x, y, z) = 0$ au point $a = (x_0, y_0, z_0)$ vérifiant $(f(x_0, y_0, z_0) = 0)$ a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z - z_0) = 0.$$

Dire que f est une submersion en a c'est dire que les trois dérivées partielles ne sont pas simulaténement nulles en a et l'équation écrite est bien celle d'un plan passant par a.

2) La tangent à la courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$ au point $a = (x_0, y_0, z_0)$ a pour direction la droite d'intersection des deux plans

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)y + \frac{\partial f}{\partial z}(a)z = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a)x + \frac{\partial g}{\partial y}(a)y + \frac{\partial g}{\partial z}(a)z = 0 \end{cases}$$

3) Le plan tangent en $a = \varphi(s_0, t_0)$ à la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ où $\varphi(s,t) = (f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t))$ a pour direction le plan engendré par les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0,t_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial s}(s_0,t_0), \frac{\partial f_2}{\partial s}(s_0,t_0), \frac{\partial f_3}{\partial s}(s_0,t_0)\right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0,t_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(s_0,t_0), \frac{\partial f_2}{\partial t}(s_0,t_0), \frac{\partial f_3}{\partial s}(s_0,t_0)\right) \end{cases}$$

Une équation du plan tangent est donc

$$\begin{vmatrix} x - f_1(s_0,t_0) & \frac{\partial f_1}{\partial s}(s_0,t_0) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(s_0,t_0) \\ y - f_2(s_0,t_0) & \frac{\partial f_2}{\partial s}(s_0,t_0) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(s_0,t_0) \\ z - f_3(s_0,t_0) & \frac{\partial f_3}{\partial s}(s_0,t_0) & \frac{\partial f_3}{\partial t}(s_0,t_0) \end{vmatrix}$$

4) L'hyperplan (affine) de $\mathbb{R}^{n+1}$ tangent à la sphère S^n au point $a = (a_0, .., a_n)$ a pour équation

$$a_0(x_0 - a_0) + ... + a_n(x_n - a_n) = 0.$$

5) Si $A \in O(n)$,

$$T_A O(n) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t H + H^t A = 0\} = \{H \mid A^t H = -(A^t H)^t\}.$$

En particulier $T_I O(n)$ est l'espace vectoriel des matrices antisymétriques. En remarquant que, pour $A \in O(n)$, $A^t = A^{-1}$, on voit que

$$T_A O(n) = A T_I O(n).$$

Chapitre 4

Différentielles d'ordre supérieur

4.1 Différentielle seconde

4.1.1 Définition

Soit E et F des espaces normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de $\mathcal{C}^1$ sur U. L'application $Df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ définie par $x \mapsto Df(x)$ est continue. Si elle est différentiable en $a \in U$, on dit que f est *deux fois différentiable* en a. Dans ce cas $D(Df)(a)$ est une application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E, F)$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$.

Lemme 4.1.1. *L'espace normé $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ s'identifie à l'espace normé des applications bilinéaires continues $E \times E$ dans F, note $\mathcal{L}^2(E, F)$.*

Rappelons qu'une application bilinéaire $B : E \times E \to F$ est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tous $h, k \in E$, $\|B(h, k)\| \leq C\|h\|\|k\|$. La *norme* de B est, par définition, le « meilleur » C ou encore :

$$\|B\| = \sup_{\|h\|=\|k\|=1} \|B(h, k)\|.$$

En dimension finie, il n'y a pas lieu de se préoccuper des normes et l'identification est la suivante. On définit l'application linéaire (à vérifier) :

$$\Phi : \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \to \mathcal{L}^2(E, F)$$

en associant à T l'application bilinéaire $B_T : E \times E \to F$ définie par

$$B_T(h, k) = T(h).k$$

On définit l'application linéaire (à vériifer)

$$\Psi : \mathcal{L}^2(E, F) \to \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$$

en associant à B l'application $T_B : E \to \mathcal{L}(E, F)$ qui envoie $h \in E$ sur l'application linéaire $T_B(h) : E \to F$ donnée par $T_B(h).k = B(h, k)$ (pour tout $k \in E$). On vérifie que Φ et Ψ sont inverses l'une de l'autre. Si E ou F n'est plus de dimension finie il faut ajouter la vérification de la continuité de ces applications linéaires et la conservation de la norme (Φ et Ψ sont des isométries).

Exemple 4.1.1. 1. Soit $u : E \to F$ une application linéaire continue. Alors pour tout $x \in E$, $Du(x) = u$ donc Du est une application constante et sa différentielle est nulle en tout point. Autrement dit u est deux fois différentiable en tout point de E et $D^2u(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

2. Soit $B : E \times E \to F$ une application bilinéaire continue. On sait que B est différentiable en tout point $(x, y) \in E \times E$ et que, pour tout $(h, k) \in E \times E$,

$$DB(x, y).(h, k) = B(x, k) + B(h, y)$$

Donc l'application $DB : (x, y) \mapsto DB(x, y)$ est linéaire continue donc différentiable et, pour tout $(x, y) \in E \times E$;

$$D(DB)(x, y) = DB$$

Cela s'écrit pour (h, k) et (h', k') appartenant à $E \times E$,

$$\begin{aligned} D^2B(x, y)((h, k), (h', k')) &= D(DB)(x, y)(h, k).(h', k') \\ &= DB(h, k).(h', k') \\ &= B(h, k') + B(h', k) \end{aligned}$$

et l'application $D^2B : E \times E \to \mathcal{L}^2(E \times E, F)$ obtenue est constante.

4.1.2 Lemme de Schwarz

Dans l'identification précédente les vecteurs h et k ne jouent pas a priori le même rôle. En fait, il n'en est rien.

Proposition 4.1.2 (Lemme de Schwarz). *Si $f : U \to F$ est deux fois différentiable en a l'application bilinéaire $D^2f(a)$ est symétrique.*

Démonstration. Soit $r > 0$ assez petit pour que $B_o(a, 2r) \subset U$ et que Df y soit définie. Posons pour $\|h\| < r$ et $\|k\| < r$,

$$\varphi(h, k) = f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a) - D^2f(a)(h, k)$$

et montrons que

$$\frac{\varphi(h, k)}{\|(h, k)\|^2} \to 0 \quad \text{quand} \quad \|(h, k)\| \to 0$$

En effet, la différentiabilité de Df en a s'exprime par le fait que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ (on peut imposer $\alpha < r$) tel que si $\|h\| < 2\alpha$, alors

$$\|Df(a + h) - Df(a) - D(Df)(a).h\| < \varepsilon\|h\|$$

(il s'agit au premier membre de la norme d'un élément de $L(E, F)$). Pour h fixé vérifiant $\|h\| < \alpha$, l'application $\varphi_h : k \mapsto \varphi(h, k)$ est définie dans la boule $B_o(0, \alpha)$, à valeurs dans F et différentiable en tout point de cette boule. De plus (dans $\mathcal{L}(E, F)$) on a

$$\begin{aligned} D\varphi_h(k) &= Df(a + h + k) - Df(a + k) - D(Df)(a).h \\ &= Df(a + h + k) - Df(a) - D(Df(a).(h + k) \\ &\qquad - [Df(a + k) - Df(a) - D(Df)(a).k] \end{aligned}$$

Et donc, puisque $\|h + k\| < 2\alpha$ et $\|k\| < 2\alpha$,

$$\|D\varphi_h(k)\| < \varepsilon(\|h + k\| + \|k\|) < 3\varepsilon\|(h, k)\|$$

La boule $B_o(0, \alpha)$ étant convexe, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à φ_h sur le segment $[0, k]$. On obtient

$$\|\varphi_h(k) - \varphi_h(0)\| = \|\varphi(h, k)\| \leq 3\varepsilon\|(h, k)\|\|k\| \leq 3\varepsilon\|(h, k)\|^2$$

et le résultat annoncé comme suit.

Mais cela implique sur l'application bilinéaire définie par

$$B(h,k) = D^2f(a)(h,k) - D^2f(a)(k,h)$$

vérifie

$$\frac{B(h,k)}{\|(h,k)\|^2} \to 0 \quad \text{quand} \quad \|(h,k)\| \to 0,$$

puisque $B(h,k) = \varphi(h,k) - \varphi(k,h)$. Or, la bilinéarité permet d'en déduire que $B = 0$. On raisonne comme dans le **Lemme 1.1.2** : si $(h_0,k_0) \neq (0,0)$,

$$\text{pour tout réel } t \neq 0, \qquad \frac{B(th_0,tk_0)}{\|(th_0,tk_0)\|} = \frac{B(h_0,k_0)}{\|h_0,k_0\|}.$$

Mais, par hypothèse, le terme de gauche tend vers 0 quand $t \to 0$. Cela oblige $B(h_0,k_0) = 0$. Or, dire que $B = 0$, c'est dire que $D^2f(a)$ est symétrique. □

4.1.3 Dérivées partielles secondes

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$. Soient $\underline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{h} = (h_1, ...h_n) \in \mathbb{R}^n$. On a que $Df(\underline{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$.

$$Df(\underline{x}).\underline{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}).h_i$$

Soit $\underline{a} \in \Omega$ et $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(\underline{a}+\underline{k}) - Df(\underline{a}) = D(Df(\underline{a}).\underline{k} + \|\underline{k}\|\varepsilon(\underline{k}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \lim_{\underline{k}\to 0} \varepsilon(k) = 0$$

Donc :

$$Df(\underline{a}+\underline{k}) - Df(\underline{a}).\underline{h} = (D(Df(\underline{a}).\underline{k}).\underline{h} + \|k\|(\varepsilon_1(\underline{k})h_1 + ... + \varepsilon_n(\underline{k})h_n)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}+\underline{k}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})\right)h_i &= (A_1(\underline{k})h_1 + A_2(\underline{k})h_2 + ... + A_n(\underline{k})h_n) \\ &\quad + \|k\|(\varepsilon_1(\underline{k})h_1 + ... + \varepsilon_n(\underline{k})h_n)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq n, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}+\underline{k}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = A_i(\underline{k} + \|\underline{k}\|\varepsilon_i(\underline{k})$$

avec

$$A_i(\underline{k}) = D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\underline{a}).\underline{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})\right).k_j$$

$$\begin{aligned}D^2f(\underline{a})(\underline{h},\underline{k}) = D(Df(\underline{a}).\underline{k}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}h_ik_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} h_i k_j\end{aligned}$$

Par le lemme de Schawarz, on a :

$$\forall i,j, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Définition 4.1.1. $D^2f(\underline{a})$ est représenté par la matrice qu'on appelle l'hessienne de f en $\underline{a}$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$$

$$(D^2f(\underline{a})(\underline{h},\underline{k}) = (k_1,...,k_n)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a})\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$$

4.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

Définition 4.2.1. Soit $\Omega \subset E$ et $f : \Omega \to F$,

1. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^p$ si f est différentiable et Df est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ (défintion pa réccurence si on connait la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^r$).
2. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^p$, $\forall p \neq 0$.

Définition 4.2.2. Si f est p-fois différentiable en a, on note :

$$D^p f(a) = \underbrace{D(D(D...Df))}_{p \text{ fois}}(a)$$

Exemple 4.2.1. On a que

$$D^3 f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F)) \simeq \mathcal{L}_3(E,F)$$

où $\mathcal{L}_3(E,F)$ est l'ensemble des applications trilinéaires de E dans F. Soit $l \in \mathcal{L}(E,F)$, $k \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$ et $h \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)))$ et soit

$$\varphi_h : h \to \varphi_h \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)))$$

On a ainsi :

$$\varphi_h.k \in \mathcal{L}(E,F) \quad \text{et} \quad (\varphi_h.k).l \in F$$

Ainsi, $\varphi \in \mathcal{L}_3(E,F)$ et :

$$\|\varphi\| = \sup_{\|h\|\leq 1, \|k\|\leq 1, \|l\|\leq 1} \|\varphi(h,k,l)\|_F$$

Proposition 4.2.1. *Si f est p-fois différentiable en $\underline{a} \in \Omega$,*

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_p, \qquad D^p(f(\underline{a})).(h_1,...,h_p) = D^p f(\underline{a}).(h_{\sigma(1))},...,h_{\sigma(p)})$$

Indication sur la preuve. Réccurence sur p. On explicite le passage $p = 2 \to p = 3$.

$$D^3 f(\underline{a}) = D(D^2(f)))(\underline{a}) = D^2(Df(\underline{a}))$$

Pour $(h,k,l) \in E^3$

$$D^2 f(\underline{x})(h,k) = D^2 f(\underline{x})(k,h) \qquad \text{(Schwartz)}$$
$$D(D^2f)(a).(h,k,l) = D^3 f(\underline{a})(l,h,k) = D^3 f(\underline{a})(l,k,h)$$

$$\begin{aligned} D^3 f(a)(l,h,k) &= D^2(Df(\underline{a},h))(l,k) \\ &= D^2(Df(a).h).(k,l) \\ &= D^3 f(a).(k,l,h) \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 4.2.2. *Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, $\Omega \subset E$, et $U \subset F$ des ouverts, $f : \Omega \to U$ et $g : U \to G$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^p$, $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^p$.*

Démonstration. Réccurence sur p. Vrai pour $p = 0$.

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x) \circ Df(x))$$

On a :

1. $\Phi : x \mapsto (Df(x), Dg(f(x))) \in \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$
2. $x \to Df(x)$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$
3. $x \to Dg(f(x)))$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ par hypothèse de réccurence.

$$x \xrightarrow{(1)} f(x)$$
$$y \xrightarrow{(2)} Dg(y)$$

   où (1) : de classe $\mathcal{C}^p$ donc de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et (2) : de classe $\mathcal{C}^{p-1}$.

4. $$\begin{array}{cccc} \tilde{\circ} & : & \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) & \to & \mathcal{L}(E,G) \\ & & (\varphi, \psi) & \mapsto & \psi \,\tilde{\circ}\, \varphi \end{array}$$

   bilinéaire et continue ($\|\psi \circ \varphi\| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$). On a ainsi $\tilde{\circ}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par hypothèse de récurrence encore $\Rightarrow \tilde{\circ} \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$.

$$\tilde{\circ} \circ \Phi(x) = D(g \circ f)(x))$$

□

Remarque. 1. $f \in \mathcal{L}(E,F)$ continue. On a :

$$\forall x, \quad Df(x) = f, \; Df^2(x) = 0$$

$$\forall x, \forall p \geq 2, \quad Df^p(x) = 0$$

2. $f \in \mathcal{L}_2(E,F)$ continue c'est-à-dire $f : E \times E \to F$, f est différentiable et :

$$Df((x_1, x_2))(h_1, h_2) = f(x_1, h_1) + f(h_1, x_2)$$

   linéaire en (h_1, h_2) et en (x_1, x_2).

$$\begin{array}{cccc} : & E \times E & \to & \mathcal{L}(E \times E, F) \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (h_1, h_2) \to f(x_1, h_2) + f(h_1, x_2) \end{array} \quad \text{linéaire}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto Df(x_1, x_2)$$

   Alors

$$\forall x, \qquad D(Df)(\underline{x}) = Df)))$$

   et donc $\forall p \geq 3$, $D^p f = 0$.

4.3 Formule de Taylor

Rappel. $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$.

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \frac{b-a}{1!}\varphi'(a) + ... + \frac{(b-a)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)dt$$

Démonstration. On remplace a par x variable et on dérive les deux membres de l'égalité par rapport à x. □

Définition 4.3.1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ avec Ω ouvert de E (E espace vectoriel normé). Soit $a, b \in \Omega$ tel que $[a,b] \subset \Omega$. On définit :

$$\begin{array}{cccc} \gamma & : & [0,1] & \to & \Omega \\ & & t & \mapsto & a + t(b-a) \end{array}$$

la paramétrisation du segment $[a,b]$ sur le segment $[0,1]$.

Notation. Si $h \in E$, $h^k = \underbrace{(h, ..., h)}_{k \text{ fois}}$

$$k \leq p, \qquad D^k f(x).h^k = D^k f(x)(h, ..., h)$$

Theorème 4.3.1 (Formule de Taylor)**.**

$$f(b) = f(a) + Df(a).h + ... + \frac{1}{(p-1)!}(D^{p-1}f)(a)h^{p-1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(\gamma(t).h^p)dt$$

Démonstration. $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = f(\gamma(t)) \\ &\varphi'(t) = (Df(\gamma(t)))).\gamma'(t) = Df(\gamma(t)).(b-a) \end{aligned}$$

On pose $h = b - a$. Par réccurence :

$$\varphi^{(k)}(t) = D^k f(\gamma(t))(h^k)$$

et donc :

$$f(b) = f(a) + Df(a).h + ... + \frac{1}{(p-1)!}D^{p-1}f(a)h^{p-1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(\gamma(t).h^p)dt$$

□

Corollaire (Formule de Taylor-Young)**.** *f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur Ω, $a \in \Omega$. $\exists \alpha > 0$, $\forall h$, $\|h\| < \alpha$.*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a).h + ... + \frac{1}{(p-1)!}D^{p-1}f(a).h^{p-1} + \frac{1}{p!}D^{p)}f(a)h^p + \|h\|^p \varepsilon(h)$$

$$\textit{tel que } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Démonstration. On choisit $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset \Omega$. On applique Taylor avec reste intégral entre a et $a + h$ avec $\|h\| < \alpha$. Il reste à montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(\gamma(t))).h^p dt = \frac{1}{p!} D^p(f)(a)h^p + \|h\|^p \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{4.1}$$

On remarque que :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} dt = \frac{1}{p!}$$

Ainsi :

$$(4.1) \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} (D^p f(\gamma(t)) - D^p f(a)).h^p dt \stackrel{=}{?} \|h\|^p \varepsilon(h)$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta$, $\|h\| < \eta$, $\sup_{t \in [0,1]} \|Df(\gamma(t)) - D^p f(a))\| < \varepsilon$

$$|B(h)| \leq \varepsilon \|h\|^p \frac{1}{p!}$$

Si $\|h\| \leq \eta$ alors $\varepsilon(h) \leq \frac{\varepsilon}{p!}$ et donc $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. □

Chapitre 5

Points critiques et extrema

5.1 Premières définitions

Soit E un espace vectoriel normé, $\Omega \subset E$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (on suppose que f est différentiable).

Définition 5.1.1. $a \in \Omega$ est dit critique si $Df(a) = 0$.

Définition 5.1.2. Soit $a \in A \subset \Omega$ une partie de Ω. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local relatif en $a \in A$ s'il existe un voisinage ouvert U de a dans Ω tel que

$$\forall x \in U \cap A, \qquad f(x) \leq f(a) \tag{5.1}$$

$$\text{(resp. } f(x) \geq f(a)) \tag{5.2}$$

Définition 5.1.3. Avec les notations de la **Définition 5.1.2**, a est un maximum libre (resp. un minimum libre) s'il vérifie la propriété (5.1) (resp. (5.2)) et que $A = \Omega$.

5.2 Etude du cas libre

Proposition 5.2.1. *Si f admet un extremum local en a alors $Df(a) = 0$.*

Démonstration.

$$Df(a) = 0 \Leftrightarrow \forall h \in E,\ Df(a).h = 0$$

On choisit $h \neq 0$, $h \in E$. On pose :

$$\varphi(t) = f(a + th)$$

avec $t \in]-\alpha, \alpha[$, $\alpha > 0$ assez petit et $a + th \in \Omega$.

$$\varphi'(t) = Df(a + th), \qquad \varphi'(0) = Df(a).h$$

$$\exists \eta,\ \eta > \alpha,\ \forall t \in]-\eta, \eta[, f(a + th) \leq f(a) \qquad (\text{ou } \varphi(t) \leq \varphi(0))$$

0 est un maximum relatif pour $\varphi(t)$.

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} \begin{cases} \leq 0, & t \geq 0 \\ \geq 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^-} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0}$$

$\varphi'(0) \leq 0$ et $\varphi'(0) \geq 0 \Rightarrow \varphi'(0) = 0$. □

Rappel. B une forme bilinéaire symétrique, Q est la forme quadratique associée. On a $B \leftrightarrow Q$ bijective.

$$Q(h) = B(h, h)$$

- Q est positive si $\forall h \in E$, $Q(h) \geq 0$.
- Q est définie positive si $\forall h \in E$, $h \neq 0$, $Q(h) > 0$
- Q est indéfinie si $\exists h, k \in E$ tel que $Q(h) > 0$ et $Q(k) < 0$.
- En dimension finie, Q est définie positive si elle peut se mettre sous la forme

$$Q(h) = \varphi_1(h)^2 + \varphi_2(h)^2 + ... + \varphi_n(h)^2$$

avec $\varphi_1, ..., \varphi_n \in E^*$, $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ indépendante et $n = \dim E$

Exemple 5.2.1. Soit :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$(0, 0)$ est un point critique.

5.3 Conditions à l'ordre 2

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Rappel (Taylor-Young). $\exists \varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{h\rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ tel que :

$$f(a + h) = f(a) + Df(a).h + \frac{1}{2}D^2f(a)(h, h) + \|h\|^2\varepsilon(h) \tag{5.3}$$

Proposition 5.3.1. *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ admet un minimum (resp. maximum) local en a, alors la forme quadratique $D^2f(a)$ est positive (resp. négative).*

Réciproquement, si a est un point critique tel que $D^2f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), a est un minimum local (resp. maximum local).

Démonstration. 1. Supposons que a est un minimum local, alors $Df(a) = 0$ et (5.3) devient :

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2}D^2f(a)(h, h) + \|h\|^2\varepsilon(h)$$

Il exsite un ouvert V, $a \in V \subset U$

$$\forall x \in V, \qquad f(x) \geq f(a)$$

$\exists r > 0$, $B(a, r) \subset V$ et :

$$\forall h \in E,\ \|h\| < r,\ a + h \in V, \qquad f(a + h) - f(a) \geq 0$$

$$\forall h \in E,\ \|h\| < r, \qquad 0 \leq \frac{1}{2}D^2f(a)(h, h) + \|h\|^2\varepsilon(h)$$

Soit $h_0 \in E$, $h_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, |t| < \frac{r}{\|h_0\|}, &\qquad \|th_0\| < r \\
, &\qquad \frac{1}{2} D^2 f(a)(th_0, th_0) + |t|^2 \|h_0\|^2 \varepsilon(th_0) \geq 0 \\
, &\qquad \frac{1}{2} D^2 f(a)(h_0, h_0) + \|h_0\|^2 \varepsilon(th_0) \geq 0 \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

On prend $t \to 0$ pour (5.4) et on obtient

$$D^2 f(a)(h_0, h_0) \geq 0.$$

2. Réciproquement, supposons que $D^2 f(a)$ soit définie positive alors

$$\exists c > 0, \forall h \in E, \qquad |D^2 f(a)(h, h)| > c\|h\|^2$$

Les hypothèses sont :
– $Df(a) = 0$,
– $D^2 f(a) > 0$ (définie positive).

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} D^2 f(a)(h, h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\
&\geq \frac{1}{2} c\|h\|^2 - \|h\|^2 |\varepsilon(h)| \\
&\geq \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} c - |\varepsilon(h)| \right)
\end{aligned}$$

$$\exists \alpha > 0, \forall h, \|h\| < \alpha, \qquad |\varepsilon(h)| < \frac{1}{4} c$$

Donc :

$$\forall h, \|h\| < \alpha, \qquad f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{4} c\|h\|^2 \geq 0$$

□

Remarque. Si a est un point critique tel que $D^2 f(a)$ soit définie positive, a est un minimum local strict.

Autrement dit, il existe un ouvert V, $a \in V \subset U$

$$\forall x \in V, x \neq a, \qquad f(x) > f(a)$$

5.4 Extremum liés

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, A une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable.

Définition 5.4.1. $a \in A \cap U$ est un point critique de la restriction de f à A si $T_a(A) \subset \operatorname{Ker} Df(a)$.

Définition 5.4.2. f admet un minimum (resp. maximum) local relatif à A en $a \in A \cap U$, s'il existe un ouvert V, $a \in V \subset U$,

$$\forall x \in V \cap A, f(x) \geq f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \leq f(a))$$

Proposition 5.4.1. *Si f admet un extremum relatif en a alors a est un point critique de la restriction de f à A.*

Démonstration. On veut montrer que

$$\forall v \in T_a(A), \qquad Df(a).v = 0$$

Il existe $I =]-\alpha, \alpha[$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ différentiable tel que $\forall t \in I$, $\gamma(t) \in A$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = 0$.

$$\exists \beta > 0,\ \beta < \alpha, \forall t \in]-\beta, \beta[, \qquad \gamma(t) \in V \subset U$$

On peut ainsi considérer $g(t) = f(\gamma(t))$

$$]-\beta, \beta[\xrightarrow{\gamma} V \xrightarrow{f|_V} \mathbb{R}$$

$$\forall x \in V,\ f(x) \geq f(a) \Rightarrow \forall t \in]-\beta, \beta[,\ g(t) \geq g(0) \tag{5.5}$$

g est dérivable (f et γ le sont).

$$(5.5) \Rightarrow g'(0) = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} g'(0) &= Df(\gamma(0)).\gamma'(0) \\ 0 &= Df(a).v \end{aligned}$$

□

Exemple 5.4.1. Supposons que A soit définie par des équations

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall 1 \leq i \leq n-p,\ F_i(x) = 0,\ F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ différentiable}\}$$

$$\forall x \in A, \qquad (DF_1(x), ..., DF_{n-p}(x)) \text{ indépendants}$$

Soit $a \in A$, $F_1(a) = F_2(a) = ... = F_{n-p}(a) = 0$

$$T_a(A) = \bigcap_{1 \leq i \leq n-p} \operatorname{Ker} DF_i(a), \qquad \dim T_a(A) = p$$

Supposons $a \in A \cap U$, a est un point critique de la restriction à $A \Leftrightarrow T_a(A) \subset \operatorname{Ker}(Df(a))$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \bigcap_{1 \leq i \leq n-p} \operatorname{Ker} DF_i(a) \subset \operatorname{Ker} Df(a) \tag{5.6} \\ = (\operatorname{Vect} < DF_1(a), ..., DF_{n-p}(a))^{\perp} \end{aligned}$$

On note :

$$\begin{aligned} H &= \operatorname{Vect} < DF_1(a), ..., DF_{n-p}(a) > \subset E^* \\ H^{\perp} &= \{x \in E, \forall \varphi \in H,\ \varphi(x) = 0\} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} (5.6) &= (\operatorname{Vect} < Df(a) >)^{\perp} \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{Vect} < DF_1(a), ..., DF_{n-p}(a) >)^{\perp} \subset (\operatorname{Vect} < Df(a) >)^{\perp} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Vect} < DF_1(a), ..., DF_{n-p}(a) > \supset \operatorname{Vect} < Df(a) > \\ &\Leftrightarrow Df(a) \text{ est combinaison linéaire de } DF_1(a), ..., DF_{n-p}(a) \end{aligned}$$

$a \in A \cap U$ est point critique de f relativement à A si et seulement si

$$\exists \lambda_1, ..., \lambda_{n-p} \in \mathbb{R}, \qquad Df(a) = \lambda_1 DF_1(a) + ... + \lambda_{n-p} DF_{n-p}(a)$$

On cherche $a = (a_1, ..., a_n)$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-p})$ vérifiant :

$$\begin{cases} F_1(a) &= 0 \\ \vdots & \\ F_{n-p}(a) &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \lambda_{n-p} \frac{\partial F_{n-p}}{\partial x_1}(a) \\ \vdots & \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + ... + \lambda_{n-p} \frac{\partial F_{n-p}}{\partial x_n}(a) \end{cases}$$

Exemple 5.4.2. Soit :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & U = \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

Soit :

$$A = \{(x, y),\ x^2 + y^2 = 1\}$$

$n = 2$, $p = 1$, $n - p = 1$. On pose

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

et on cherche à maximiser $f(x, y)$ sur le cercle A. On cherche les points critiques relatifs. $a = (x, y)$ est un point critique relatif

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \end{cases} \tag{5.7}$$

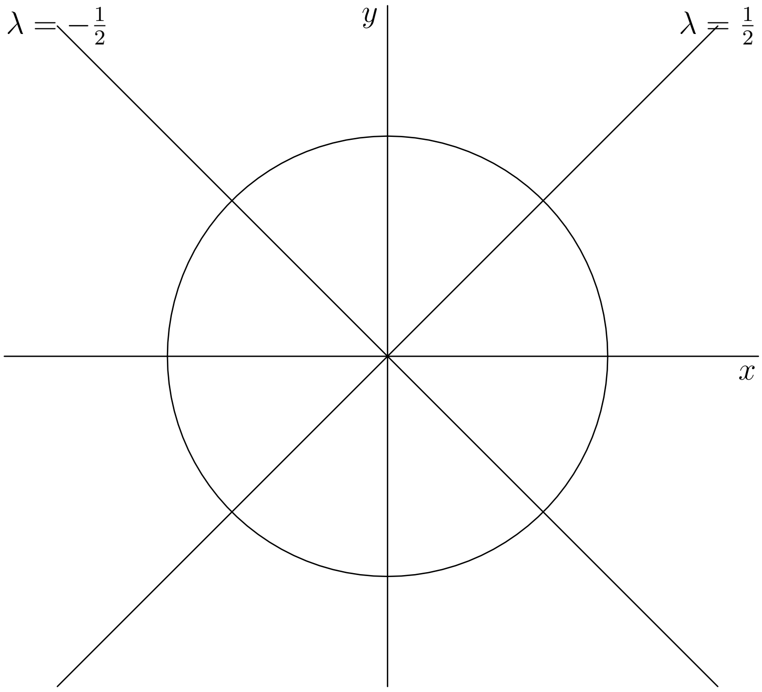
$$(5.7) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 0 & \Rightarrow (x, y) \neq (0, 0) \\ \left.\begin{array}{c} y = 4\lambda^2 y \\ x = 4\lambda^2 x \end{array}\right\} & \Rightarrow 4\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $\lambda = 1/2$, $x = y$ et $x^2 = y^2 = 1$ donc $2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1/2$. Donc :

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{ou} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Si $\lambda = -1/2$, $x = -y$ et $2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1/2$. Donc :

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{ou} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$


$\lambda = -\frac{1}{2}$
y
$\lambda = \frac{1}{2}$
x

Chapitre 6

Equations différentielles

6.1 Equations différentielles du premier ordre

Soit U un ouvert inclu dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$. On définit une équation différentielle, l'équation (6.1) suivante :

$$y' = f(t, y) \tag{6.1}$$

Une solution $\varphi(t)$ de l'équation (6.1) une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$

$$\forall t \in I, \qquad (t, \varphi(t)) \in U$$

φ est différentiable et

$$\forall t \in I, \qquad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

La condition initiale est la donnée de $(t_0, x_0) \in U$, φ est une solution de (6.1) avec cette condition initiale si $\varphi(t_0) = x_0$.

<u>Généralisation</u>. *1) Equation différentielle d'ordre k : soit $U \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ fois}}$, $g : U \to \mathbb{R}^n$.*

$$y^{(k)} = g(t, y, y', ..., y^{(k-1)}) \tag{6.2}$$

La solution $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est k-fois dérivable tel que

$$\forall t \in I, \qquad (t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$$

et

$$\forall t \in I, \qquad \varphi^{(k)}(t) = g(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t))$$

On peut se ramener à l'équation (6.1), soit $z = (y, y', ..., y^{(k-1)}) \in (\mathbb{R}^n)^k$,

$$(6.2) \Leftrightarrow z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \\ g(t, y, ..., y^{(k-1)}) \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & (\mathbb{R}^n)^k & \to & \mathbb{R}^n \\ & & (y_0, y_1, ...y_{k-1} & \mapsto & (y_1, y_2, ..., y_{k-1}, g(y_1, y_2, ..., y_{k-1}) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 = y_0' \\ y_2 = y_1' \\ \vdots \\ y_{k-1} = y_{n-2}' \\ y_k = g(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) \end{pmatrix} \Leftrightarrow (6.2) \tag{6.3}$$

2) $f(t, y, y') = 0$, *on se ramène au cas précédent (sous certaines hypothèses) par le théorème des fonctions implicites.*

6.2 Théorèmes d'existence et d'unicité de solutions

Soit à résoudre

$$y' = f(t, y). \tag{6.4}$$

Définition 6.2.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(1) Soit $A \subset U$, f est uniformément lipschitzienne par rapport à y sur A si $\exists k > 0$, $\forall t, y_1, y_2$ tel que $(t, y_1) \in A$ et $(t, y_2) \in A$.

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

(2) Soit $(t_0, y_0) \in U$, f est localement lipschitzienne au voisinage de (t_0, y_0) si $\exists \alpha > 0$ tel que si $A = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, \alpha)$[1]$\subset U$, f est uniformément lipschitzienne par rapport à y sur A.

(3) f est localement lipschitzienne sur U si $\forall (t_0, y_0) \in U$, f est localement lipschitzienne au voisinage de (t_0, y_0).

Remarque. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, où $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $(t, y) \in U$. Si $D_2 f = D_y f$ existe et est continue sur U alors f est localement lipschitzienne sur U. En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. $\exists \alpha > 0$, $\forall (t, y) \in U$, $\|(t, y) - (t_0, y_0)\| \leq \alpha$,

$$\|D_2(t_0, y_0) - D_2(t, y)\| \leq 1.$$

$\forall (t, y) \in \overline{B}((t_0, y_0), \alpha)$,

$$\|D_2 f(t, y)\| \leq 1 + \|D_2 f(t_0, y_0)\| = M(t_0, y_0).$$

On applique le théorème des accroissements finis sur $\overline{B}((t_0, y_0), \alpha)$. Soit $(t, y_1), (t, y_2) \in \overline{B}((t_0, y_0), \alpha)$,

$$\begin{aligned} \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| &\leq \|y_1 - y_2\| \sup_{(t,y) \in \overline{B}((t_0, y_0), \alpha)} \|D_2 f(t, y)\| \\ &\leq M(t_0, y_0)\|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

□

Proposition 6.2.1. *Soit* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *continue et localement lipschitzienne par rapport à* y. *Soit* $K \subset U$ *un compact. Alors* f *est uniformément lipschitzienne sur* K *par rapport à* y.

[1] $\overline{B}(y_0, \alpha)$ désigne la boule fermée de centre y_0 et de rayon α.

Démonstration. On démontre la proposition 6.2.1 par l'absurde. C'est-à-dire $\forall n \geq 1$, $\exists t_n, y_n, z_n$ tel que $(t_n, y_n) \in K$ et $(t_n, z_n) \in K$ et

$$\|f(t_n, y_n), f(t_n, z_n)\| \geq n\|y_n - z_n\|. \tag{6.5}$$

K est un compact ainsi on peut extraire une sous-suite de (t_n, y_n) qu'on nomme $(t_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ convergeante dans K tel que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante et

$$(t_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (t, y) \in K.$$

En particulier, $\lim_{n\to\infty} t_{\varphi(n)} = t \Rightarrow t' = \lim_{n\to\infty} t_{\varphi(\psi(n))} = t$. On remplace les suites (t_n, y_n) et (t_n, z_n) par les suites $(t_{\varphi o \psi(n)}, y_{\varphi o \psi(n)}) \to (t, y)$ et $(t_{\varphi o \psi(n)}, z_{\varphi o \psi(n)}) \to (t, z)$ quand $n \to \infty$.

Quitte à changer les notations, on a (6.5) avec $(t_n, y_n) \to (t, y)$ et $(t_n, z_n) \to (t, z)$. Supposons $y \neq z$,

$$n\|y_n - z_n\| \to \infty.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \|f(t_n, y_n) - f(t_n, z_n)\| = +\infty$. Par ailleurs,

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t_n, y_n) - f(t_n, z_n)\| = \|f(t, y) - f(t, z)\|.$$

Contradiction ! Donc $y = z$.

$$(6.5)\ :\ \|f(t_n, y_n) - f(t_n, z_n)\| \geq n\|y_n - z_n\|.$$

$$(t_n, y_n) \to (t, y), \quad (t_n, z_n) \to (t, y). \tag{6.6}$$

Comme f est localement lipschitzienne en (t, y), $\exists k > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall (s, x) \in \overline{B}((t, y), \alpha)$, $\forall (s, x') \in \overline{B}((t, y), \alpha)$.

$$\|f(s, x) - f(s, x')\| \leq k\|x - x'\|.$$

$$\begin{aligned}(6.6) \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, (t_n, y_n) &\in \overline{B}((t, y), \alpha)\\ (t_n, z_n) &\in \overline{B}((t, y), \alpha).\end{aligned}$$

$\forall n \geq N$,

$$\begin{aligned}\|f(t_n, y_n)\| \leq k\|y_n - z_n\| + (6.5) &\Rightarrow \forall n \geq N,\ n\|y_n - z_n\| \leq k\|y_n - z_n\|\\ &\Rightarrow \forall n \geq N,\ n \geq k.\end{aligned}$$

Contradiction ! □

Theorème 6.2.2. *Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, U ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne,*

$$y' = f(t, y). \tag{6.7}$$

Soit $(t_0, y_0) \in U$. $\exists T > 0$, $\exists r > 0$ tel que $]t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r) \subset U$ et $\exists \varphi :]t_0 - T, t_0 + T[\to \overline{B}(y_0, r)$ différentiable :

$$\varphi(t_0) = y_0,$$

et φ est solution de (6.7). De plus, une telle solution est unique.

Theorème 6.2.3 (Enoncé équivalent du théorème 6.2.2)**.** *Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, U un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne,*

$$y' = f(t, y). \tag{6.8}$$

Soit $(t_0, y_0) \in U$. Soit $\alpha > 0$ et $\rho > 0$ tel que $K = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, \rho)$. Soit $M = \sup_{(t,y)\in K} \|f(t, y)\|$. $\exists T = \inf(\alpha, \rho/M)$ et $r = \rho$ tel que $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r) \subset U$ et $\exists \varphi :]t_0 - T, t_0 + T[\to \overline{B}(y_0, r)$ différentiable,

$$\varphi(t_0) = y_0$$

et φ est solution de (6.8). De plus, une telle solution est unique.

Démonstration avec l'énoncé du théorème 6.2.3. (1) *Unicité* : φ et ψ deux solutions, $y_0 = \varphi(t_0) = \psi(t_0)$.

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

$$\varphi(t) - \psi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s)ds.$$

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi(s) - f(s, \psi(s))\|ds \tag{6.9}$$

Soit $(t, \varphi(t))$, $(t, \psi(t)$ tel que $t \in]t_0 - T, t_0 + T[$. D'après la proposition 6.2.1, $\exists k > 0$, $\forall t, y_1, y_2$, $(t, y_1) \in K$, $(t, y_2) \in K$,

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

$y_1 = \varphi(t)$, $y_2 = \psi(t)$, $t \in]t_0 - T, t_0 + T[$,

$$\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \leq k\|\varphi(t) - \psi(t)\|.$$

$$(6.9) \Rightarrow \forall t \in]t_0 - T, t_0 + T[, \quad \|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq h \int_{t_0}^{t} \|\varphi(s) - \psi(s)\|ds. \tag{6.10}$$

Lemme 6.2.4. *Soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, $a < b$. On suppose h continue, $\exists A, B$, $A \geq 0$, $B \geq 0$ tel que*

$$\forall t \in [a, b], \qquad h(t) \leq A + B \left| \int_{c}^{t} h(s)ds \right|.$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \qquad h(t) \leq Ae^{B|t-c|}.$$

On admet le lemme 6.2.4 pour l'instant. Posons

$$h(t) = \|\varphi(t) - \psi(t)\|.$$

Ainsi,

$$(6.8) \Rightarrow \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \qquad h(t) \leq k \left\| \int_{t_0}^{t} h(s)ds \right\|.$$

$A = 0$, $B = k$ et $C = t_0$. D'après le lemme 6.2.4,

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \qquad h(t) \leq s.$$

Et donc, $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], h(t) = 0$.

(2) *Existence.* On construit par réccurence une suite φ_n tel que

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = y_0, \\ \varphi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds. \end{cases}$$

Ainsi, φ est solution de E si et seulement si :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

φ_n est bien définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, continue et à valeurs dans $\overline{B}(y_0, r)$. La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons l'énoncé vrai pour $n - 1$, φ_n est définie et continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

$$\|\varphi_n(t) - y_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi_{n-1}(s))\| ds \right|.$$

avec $s \in [t_0, t] \subset$, donc $\varphi_{n-1}(s) \in \overline{B}(y_0, r)$ et $(s, \varphi_{n-1}(s)) \in K = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, r)$. Donc $\|f(s, \varphi_{n-1}(s)\| \leq M$.

$$\|\varphi_n(t) - y_0\| \leq M|t - t_0| \leq TM \leq r.$$

Donc : $\varphi_n \in \overline{B}(y_0, r)$. Soit $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, on considère

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq k^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \tag{6.11}$$

paramétrée par n (on notera l'équation $(6.11)_n$). Dans cette équation, k est une constante de Lipschitz de f sur $K \subset U$. Pour $n = 1$,

$$\|\varphi_1(t) - y_0\| \leq M|t - t_0|.$$

$(6.11)_1$ est vraie. Suppsons $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\|\varphi_{n-1}(t) - \varphi_{n-2}(t)\| k^{n-2} M \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a :

$$\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t) = \int_{t_0}^{T} (f(s, \varphi_{n-1}(s)) - f(s, \varphi_{n-2}(s))ds.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| &\leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)\| ds \right| \\ &\leq \frac{k^{n-1} M}{(n-1)!} \left| \int_{t_0}^{t} [s - t_0|^{n-1} ds \right| \\ &= \frac{k^{n-1} M}{(n-1)!} \frac{|t - t_0|^n}{n} = \frac{k^{n-1} M}{n!} |t - t_0|^n. \end{aligned}$$

Donc $\forall n \geq 0$, $(6.11)_n$ est vraie. On pose $\|\alpha\| = \sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} \|\alpha(t)\|$ et on consièdre :

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|_\infty \leq \frac{k^{n-1} M}{n!} T^n, \tag{6.12}$$

c'est le terme général d'une suite convergente, $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. On pose :

$$u_n = M \frac{k^{n-1} T^n}{n!} = \frac{M}{k} \frac{k^n T^n}{n!},$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{M}{k} e^{kT}.$$

On sait que $\mathcal{C}^0([t_0 - T, t_0 + T], \mathbb{R}^n)$ est complet pour $\|\cdot\|_\infty$. Donc, d'après (6.12), $\sum_{n\geq 1}(\varphi_n - \varphi_{n-1}$ est uniformément convergente. C'est-à-dire que φ_n tend uniformément vers φ.

$$\varphi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s) ds. \tag{6.13}$$

$\forall s \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\|f(s, \varphi_{n-1}(s) - f(s, \varphi_{n-2}(s)\| \leq k\|\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)\| \leq \frac{k^{n-1} M}{(n-1)!} T^{n-1}.$$

Donc :

$$\|f(s, \varphi_{n-1}(s) - f(s, \varphi_{n-2}(s)\|_\infty \leq \frac{k^{n-1} M}{(n-1)!} T^{n-1}.$$

D'où la suite $f(s, \varphi_{n-1}(s))$ converge uniformément $f(s, \varphi(s))$. Cela implique que pour tout t fixé, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s)) ds \longrightarrow \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds$$

Donc :

$$(6.13) \longrightarrow \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds.$$

□

Démonstration du lemme 6.2.4. Soit $t \geq c$,

$$h(t) \leq \underbrace{A + B \int_c^t h(s) ds}_{F(t)}.$$

$h(t) \leq F(t)$, $F'(t) = Bh(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d(e^{-Bt} F(t))}{dt} &= Be^{-Bt} F(t) + e^{-Bt} h(t) \\ &= Be^{-Bt}(h(t) - F(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Or $e^{-Bt} F(t)$ décroissante,

$$\begin{aligned} e^{-Bt} F(t) &\leq e^{-Bc} F(c) = Ae^{-Bc}, \\ F(t) &\leq Ae^{B(t-c)} \end{aligned}$$

On montre que c'est pareil pour $t \leq c$.

$$A + B \left| \int_c^t h(s) ds \right| = A + B \int_t^c h(s) ds.$$

□

6.3 Théorie globale

6.3.1 Unicité globale

Proposition 6.3.1 (Unicité globale)**.** *Soit J un intervalle, $t_0 \in J$, φ_1 et φ_2 deux solutions de* (6.8) *tel que*

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0).$$

Alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

Démonstration. Soit

$$A = \{t \in J,\ \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\},$$

A est un fermé de J. On montre que A est un ouvert. Soit $t_1 \in J$ tel que

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1) = y_0.$$

Soit I un intervalle d'intérieur non vide est fermé au voisinage de t_1 dans J.

Choissisons $T > 0$ et $r > 0$, $[t_1 - T, t_1 + T] \times \overline{B}(y_0, t) \subset U$. On choisit I assez petit tel que $\forall t \in I$, $\varphi_1 \in \overline{B}(y_0, r)$ et $\varphi_2(t) \in \overline{B}(y_0, r)$. On définit $\psi_1 = \varphi_1|_I$ et $\psi_2 = \varphi_2|_I$, ψ_1 et ψ_2 sont des solutions de (6.8) sur I,

$$\psi_1(t_1) = \psi_2(t_1).$$

ψ_1 et ψ_2 à valeurs dans $\overline{B}(y_0, r) \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$. En résumé, il existe I un voisinage de t_1 dans J tel que $\forall t \in I$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Pour $t_1 \in A$, il existe un voisinage de t_1 dans J tel que $I \subset A$. On a ainsi que A est un ouvert dans J. J étant connexe, $A = \emptyset$ ou $A = J$ et comme $t_0 \in A$ alors $A = J$. $\square$

6.3.2 Solutions maximales

Définition 6.3.1.
1. Soit φ une solution de J. Un prolongement de φ sur la donnée de $\tilde{J}$ et $\tilde{\varphi}$ (avec $\tilde{J}$ un intervalle tel que $J \subset \tilde{J}$ et $\tilde{\varphi}$ est une solution sur $\tilde{J}$ et $\tilde{\varphi}|_J = \varphi$.
2. $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution maximale si elle n'admet pas de prolongement non trivial.

Proposition 6.3.2. *Soit φ est une solution sur l'intervalle J. On suppose que*

$$\sup J = \beta < +\infty,\ \lim_{t \to \beta^-} \varphi(t) = \ell \in \mathbb{R}^n,\ (\beta, \ell) \in U.$$

Alors il existe un prolongement $\tilde{\varphi}$ sur $\tilde{J}$ tel que $J \subset \tilde{J}$ et $\tilde{\beta} = \sup \tilde{J} > \beta$.

Démonstration.
1. *Cas où $\beta \in J$.* On applique le théorème 6.2.3 appliqué à $(\beta, \ell) \in U$, il existe une solution tel que $]\beta - \alpha, \beta + \alpha[\xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ zt $\psi(\beta) = \ell$. On considère $\tilde{J} = J \cup]\beta - \alpha, \beta + \alpha[$. Sur $\tilde{J}$, on a deux solutions : φ et ψ tel que

$$\varphi(\beta) = \psi(\beta) = \ell.$$

Donc φ et ψ coincident sur $\tilde{J}$. On pose $\tilde{\varphi} : \tilde{J} \to \mathbb{R}^n$ tel que $\tilde{\varphi}|_J = \varphi$ et $\tilde{\varphi}|_{]\beta-\alpha,\beta+\alpha[} = \psi$. $\tilde{\varphi}$ est solution sur $\tilde{J}$, prolongement non trivial de φ.

2. *Cas où $\beta \notin J$.* On montre que si l'on prolonge φ par continuité, on a :

$$\varphi_1|_J = \varphi,$$
$$\varphi_1(\beta) = \lim_{t \to \beta^-} \varphi(t) = \ell.$$

Lemme 6.3.3.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{t\to\beta^-}\varphi(t)=\ell\\ \lim\limits_{t\to\beta^-}\varphi'(t)=d\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi_1 \textit{ admet une dérivée à gauche en } \beta \textit{ qui est } d.$$

D'après le lemme 6.3.3, φ_1 admet une dérivée à gauche en β, et φ_1 est solution de (6.8). On applique donc le premier cas à φ_1.

$$\varphi(t) = f(t,\varphi(t)), \quad \forall t \in J.$$

$$\lim_{t\to\beta} f(t,\varphi(t)) = f(\beta,\ell) \Rightarrow \lim_{t\to\beta}\varphi'(t) \text{ existe.}$$

□

Theorème 6.3.4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz global)**.** *Soit* $(t_0, y_0) \in U$*, il existe solution maximale unique* φ *de* (6.8) *tel que* $\varphi(t_0) = y_0$*. Cette solution est définie sur un intervalle ouvert.*

Démonstration. Soit

$$\mathcal{E} = \{(\varphi, J),\ J \text{ intervalle contenant } t_0,\ \varphi \text{ solution de } J \text{ et } \varphi(t_0) = y_0\}.$$

Le théorème d'existence local nous dit que $\mathcal{E} \neq \emptyset$. On définit

$$J_{\max} = \bigcup_{(\varphi_J, J)\in\mathcal{E}} J,$$

$$\varphi_{\max} : J_{\max} \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{\max}|_J = \varphi_J.$$

Soit $t \in J_1 \cap J_2$, φ_{J_1} sur J_1 et φ_{J_2} sur J_2. $J_1 \cap J_2$ est un intervalle contenant t_0 et φ_{J_1} et φ_{J_2} coincident en t_0 et sont solutions sur $J_1 \cap J_2$. Donc :

$$\varphi_{J_1}|_{J_1\cap J_2} = \varphi_{J_2}|_{J_1\cap J_2},$$

$\varphi_{\max}$ est une solution de (6.8). Il reste à montrer que $J_{\max}$ est un intervalle ouvert. On pose

$$\beta = \sup J_{\max}.$$

Si $\beta = +\infty$, $\beta \notin J$ est vérifié. Si $\beta < +\infty$, on veut montrer que $\beta \notin J$. Supposons $\beta \in J$, on a :

$$(\beta, \varphi_{\max}(\beta)) = (\beta, \varphi(\beta)),$$

par une certaine fonction φ solution de (6.8) sur un intervalle J.

$$\begin{aligned}\forall t \in J, \qquad & \varphi'(t) = f(t,\varphi(t))\\ & (t,\varphi(t)) \in U \Rightarrow (\beta,\varphi(\beta)) \in U.\end{aligned}$$

Le théorème d'existence local permet de prolonger $\varphi_{\max}$ de $[\beta, \beta+\alpha[$, $\alpha > 0$. Contradiction ! □

Exemple 6.3.1. Soit à résoudre $y' = y^2$. On pose $f(t, y) = y^2$, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. f est continue et localement lipschitzienne.

Si J est un intervalle, on a la solution $\varphi(t) = 0$, $\forall t \in J$. On a unicité globale. Si ψ_c est une solution sur J et $\exists t_0 \in J$, $\psi(t_0) = 0$ alors $\psi_c = 0$. Si ψ_c est une solution non identiquement nulle, alors

$$\begin{aligned} \forall t \in J, \quad & \psi_c(t) \neq 0 \\ & \psi_c'(t) = (\psi_c(t))^2, \ \psi_c \neq 0 \\ & \frac{\psi_c'(t)}{\psi_c(t)^2} = 1 \\ & \left(\frac{-1}{\psi_c(t)}\right)' = 1 \\ & \frac{-1}{\psi_c(t)} = t + c. \end{aligned}$$

Donc $\psi_c(t) = -1/(t+c)$. ψ_c est solution sur $]-\infty, c[\cup]c, +\infty[$. C'est une solution maximale mais ce n'est pas une solution globale (définie sur tout $\mathbb{R}$).

6.3.3 Solutions globales

On suppose $U = I \times V$ avec I un intervalle ouvert et $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne.

Définition 6.3.2. Une solution globale est une solution sur I.

Proposition 6.3.5. *On suppose qu'il existe $k : I \to \mathbb{R}_+^*$ continue tel que $\forall t \in I$, l'application $y \to f(t, y)$ est $k(t)$-lipschitzienne. Alors $\forall t_0 \in I$ et $y_0 \in V$, il existe une unique solution globale φ de tel que $\varphi(t_0) = y_0$.*

Exemple 6.3.2. Soit

$$: \begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \to & \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ t & \mapsto & A(t) \end{array} \quad \text{continue,}$$

et

$$: \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & b(t) \end{array} \quad \text{continue.}$$

On considère

$$y' = A(t)y + b(t). \tag{6.14}$$

(6.14) est une équation linéaire affine.

$$: \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t, y) & \mapsto & f(t, y) = A(t)y + b(t) \end{array} \quad \text{continue.}$$

On a :

$$\begin{aligned} f(t, y_1) - f(t, y_2) &= A(t)(y_1 - y_2) \\ \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| &=\leq \|A(t)\| \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

$k(t) = \|A(t)\|$ continue ($k : I \to \mathbb{R}_+^*$). Ainsi, $\forall t_0 \in I$, $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution sur I

$$\varphi I \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t_0) = y_0.$$

On a ainsi

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t).$$

Annexe A

Équations différentielles linéaires affines

C'est le nom donné traditionnellement aux équations différentielles définies par une fonction $f(t, y)$ qui dépend de façon affine de y. En identifiant, comme d'habitude, une application linéaire à sa matrice dans la base canonique, on adopte dans ce paragraphe, les notations suivantes. On note $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Si on a fixé une norme sur $\mathbb{R}^n$, on munit $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ de la norme d'application linéaire correspondante.

Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et si $A : I \to \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ sont deux applications continues, on considère l'équation différentielle

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{A.1}$$

où le produit de la matrice $A(t)$ par le vecteur y de $\mathbb{R}^n$ s'effectue comme d'habitude et fournit un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Le choix des normes permet d'écrire, pour tout $t \in I$, $\|A(t)y\|\|y\|$. L'équation différentielle (A.1) est donné par l'application $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto A(t)y + b(t)$.

L'équation (A.1) est dite *homogène* si $b = 0$, *autonome* (ou à « coefficients constants ») si, de plus, A est une application constante.

A.1 Équations non autonomes

La linéarité se traduit par le *très important* résultat général suivant.

Proposition A.1.1. *Pour tout point* $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ *passe une unique solution globale.*

Démonstration. L'application $k : I \to [0, +\infty[$ donnée par $k(t) = \|A(t)\|$ est continue par hypothèse et, pour $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| = \|A(t)(y_1 - y_2)\| \leq \|A(t)\|\|y_1 - y_2\| = k(t)\|y_1 - y_2\|.$$

On peut donc appliquer la propistion 6.3.5 qui établit le caractère global des solutions maximales. □

Puisque toutes les solutions de (A.1) sont globales, il est naturel de noter $\mathcal{S}$ l'ensemble qu'elles forment, c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ constitué par les fonctions dérivables $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ telles que, pour tout $t \in I$, $\varphi' = A(t)\varphi(t) + b(t)$. La proposition précédente a le corollaire suivant.

Corollaire. *Pour tout $t_0 \in I$, on définit une bijection F_{t_0} de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{S}$ en associant à $y \in \mathbb{R}^n$ l'unique solution globale de (A.1) qui prend en t_0 la valeur y. Autrement dit, pour $y \in \mathbb{R}^n$, $F_{t_0}(y)$ est une fonction dérivable sur I vérifiant $F_{t_0}(y)(t_0) = y$ et, pour tout $t \in I$, $(F_{t_0}(y))'(t) = A(t)F_{t_0}(y)(t) + b(t)$.*

Remarquons que l'inverse de F_{t_0} est l'application *évaluation* en t_0, $\varepsilon_{t_0} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi \mapsto \varphi(t_0)$.

La structure algébrique de $\mathcal{S}$ sera prévisée dans les paragraphes qui suivent.

A.1.1 Équations homogènes

Dans ce paragraphe la fonction $b(t)$ est nulle. On peut donc préciser la proposition A.1.1.

Proposition A.1.2. *La solution de condition initiale (t_0, y_0) vérifie, pour tout $t \in I$,*

$$\|F_{t_0}(y_0)(t)\| \leq \|y_0\| e^{\left|\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right|}.$$

Démonstration. La preuve s'inspire de celle du lemme 6.3.3 dit de Gronwall (et pourrait se déduire d'une version plus forte de celui-ci).

Pour tout $t \in I$, on a :

$$\|F_{t_0}(y_0)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t A(s) F_{t_0}(y_0)(s) ds \right\|.$$

En posant $g(t) = \|F_{t_0}(y_0)(t)\|$, on définit une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, +\infty[$, qui vérifie l'inégalité :

$$g(t) \leq \|y_0\| + \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| g(s) ds \right|.$$

Supposons $t > t_0$ (le cas $t < t_0$ est laissé en exercice). On définit

$$G(t) = \|y_0\| + \int_{t_0}^t \|A(s)\| g(s) ds.$$

C'est une fonction dérivable sur I et

$$G'(t) = \|A(t)\| g(t) \leq \|A(t)\| G(t)$$

par hypothèse, de sorte que la fonction $\Phi(t) = e^{-\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds} G(t)$ a pour dérivée

$$\Phi'(t) = e^{-\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds} [-\|A(t)\| G(t) + G'(t)] \leq 0.$$

C'est donc une fonction décroissante pour $t \geq t_0$ et

$$\Phi(t) \leq \Phi(t_0) = G(t_0) = \|y_0\|.$$

On en déduit

$$\|F_{t_0}(y_0)(t)\| = g(t) \leq G(t) \leq \|y_0\| e^{\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds},$$

ce qui est le résultat voulu. □

Par ailleurs le caractère vraiment linéaire de (A.1) se traduit par la proposition suivante.

Proposition A.1.3. *L'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$. Plus précisément, pour tout $t_0 \in I$, F_{t_0} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Il est immédiat de vérifier que, comme $b(t) = 0$, toute combinaison linéaire de solutions est solution. Les application ε_{t_0} et F_{t_0} sont dans ce cas clairement linéaires. Ce sont des isomorphismes et $\dim \mathcal{S} = \dim \mathbb{R}^n = n$. □

Remarque.
1. Pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$, si φ n'est pas la fonction nulle, alors, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) \neq 0$.
2. Si $(v_1, ..., v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$, $(F_{t_0}(v_1), ..., F_{t_0}(v_n))$ est une base de $\mathcal{S}$. On parle plutôt de *système fondamental de solutions* de (A.1).

Définition A.1.1 (Matrice de solutions)**.** Une matrice carrée $n \times n$ dont chaque colonne est solution de (A.1) est appelée matrice de solutions de (A.1).

Si $X(t)$ est une matrice de solutions de (A.1), alors pour tout $t \in I$, on a $X'(t) = A(t)X(t)$ (produit des deux matrices). Ici $X'(t)$ désigne la matrice $n \times n$ obtenue en dérivant chaque coefficient de $X(t)$. On peut donc regarder $X(t)$ comme une solution de l'équation

$$X' = A(t)X \tag{A.2}$$

qui est une équation linéaire homogène sur l'espace $\mathbb{R}^{n^2}$. Inversement toute solution de cette équation est une matrice dont les colonnes sont des solutions de (A.2).

Définition A.1.2 (Wronskien)**.** Soit $X(t)$ une matrice de solutions de (A.1). Le déterminant de $X(t)$ est appelé *wronskien* de $X(t)$. On le note $W(t) = \det X(t)$.

Theorème A.1.4 (Théorème de Liouville)**.** *Soit $X(t)$ une matrice de solutions de (A.1) et $W(t)$ son wronskien. Alors*

1. *$W(t)$ vérifie l'équation différentielle scalaire du premier ordre*
$$W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))W(t),$$
où $\mathrm{tr}(A(t))$ désigne la trace de la matrice $A(t)$.
2. *Pour $t, t_0 \in I$,*
$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds}.$$