Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

M312 : Analyse hilbertienne

Notes de cours par Clément Boulonne

L3 Mathématiques

2008 - 2009

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce cours est une application de la géométrie euclidienne à l'analyse.

1.1 Problèmes clés qu'on peut se poser

Problème. *(1) Quelle est la distance entre ls points* $(2,3)$ *et* $(1,1)$ *?*

(2) Quelle est la distance entre les fonctions $f(t) = \cos(3t)$ *et* $g(t) = \sin(2t)\cos(5t)$ *?*

(3) Quelle est la distance entre les point $(3,5,7)$ *et le plan* $x + y + z = 0$ *?*

(4) Quelle est la fonction de la forme $a_0 + a_1 \sin(t) + a_2 \cos(t)$ *qui approxime au mieux la fonction* $\cos^5(t)$ *?*

La théorie de Fourier permet de relier le problème (1) au problème (2) et le problème (3) au problème (4).

1.2 Rappels sur la géométrie euclidienne

Rappel. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur V est une application $<,>$: $V \times V \to \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

(i) bilinéarité :

$$< v_1 + \lambda v_2, w >=< v_1, w > +\lambda < v_2, w >$$

$$< v, w_1 + \lambda w_2 >=< v, w_1 > +\lambda < v, w_2 >$$

(ii) symétrie : $< v, w >=< w, v >$

(iii) $< v, v >\geq 0$ avec égalité si et seulement si $v = 0$.

Définition 1.2.1. Un espace euclidien est un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire.

Exemple 1.2.1. (1) $V = \mathbb{R}^2$:

$$< v, w >=< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1x_2 + y_1y_2$$

(2) $V = \mathcal{C}^0([-1, 1])$: espaces des fonctions continues sur $[-1, 1]$:

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

On vérifie que c'est un produit scalaire :

(i) bilinéarité évidente.

(ii) symétrie évidente.

(iii)

$$< f, f >= \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \geq 0$$

On utilise le fait que f est continue sur $[-1, 1]$ pour dire que :

$$< f, f >= 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Définition 1.2.2. (X, d) est un espace métrique avec la distance $d : X \rightarrow X \rightarrow [0, +\infty]$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(iii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Theorème 1.2.1. *Un espace euclidien muni de la fonction* $d : V \times V \rightarrow [0, +\infty]$ *tel que* $d(v, w) = \|v - w\|$ *est un espace métrique.*

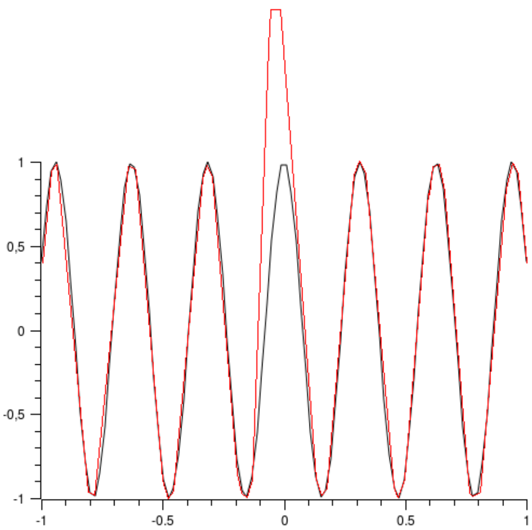
Exercice 1.2.1. Quelle est la distance dans $(\mathcal{C}^0([-1, 1]), <, >)$ entre $f(x) = x^2$ et $g(x) = 1$?

$$\begin{aligned}
\|f(x) - g(x)\| &= < f(x) - g(x), f(x) - g(x) >^{1/2} \\
&= \left(\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.1. On connait déjà la distance :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$$

Exemple 1.2.2.



Quelle est la distance entre les deux fonctions noire et rouge ?

Les fonctions sont très proches si on considère la distance euclidienne :

$$d_2(f,g) = \left(\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

On peut considérer les distances suivantes :

$$d_1(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx$$

$$d_{II}(f,g) = \left(\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 + (f'(x) - g'(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

Pour que d_{II} soit définie, il faut que $f, g \in \mathcal{C}^1$.

On a définit plus tôt la distance suivante :

$$\|v - w\| = d(v,w) = < v - w, v - w >^{1/2}$$

On va définir les angles entre deux objets (ici, vecteurs ou fonctions). Mais tout d'abord :

Lemme 1.2.2 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)**.** $| < v, w > | \leq \|v\|\|w\|$ *si et seulement* v *et* w *sont colinéaires.*

Idée. v, w fixés :

$$0 \leq p(t) =< v + tw, v + tw >=< v, v > +2t < v, w > +t^2 < w, w >= at^2 + 2bt + c$$

On pourra ainsi étudier le discriminant de ce polynôme en t. □

Exercice 1.2.2. Utiliser Cauchy-Schwartz pour montrer que :

$$\|v + w\| \leq \|u\| + \|w\|$$

et de là, l'inégalité $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$ suit facilement.

Définition 1.2.3. On définit l'angle entre v et w :

$$\widehat{(v,w)} = \arccos \frac{< v, w >}{\|v\|\|w\|}$$

Définition 1.2.4. Deux vecteurs $v, w \neq 0$ dans $(V, <,>)$ sont orthogonaux si $< v, w >= 0$.

Exercice 1.2.3. On considère $(\mathcal{C}^0([-\pi,\pi], <,>)$ tel que :

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

Pour $m, n > 0$, montrer que :

1) $< \sin(mt), \sin(nt) >= 0$ si $m \neq n$.

2) $< \cos(mt), \cos(nt) >= 0$ si $m \neq n$.

3) $< \cos(mt), \sin(nt) >= 0$.

Indications. On doit calculer :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\sin(nt)dt$$

On pourra utiliser les formules suivantes :

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \ \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

1.3 Rappels sur les distances et normes

1.3.1 Sur $\mathcal{C}^0([-\pi,\pi])$

Sur $\mathcal{C}^0([-\pi,\pi])$ (fonctions continues sur $[-\pi,\pi]$). On définit les distances suivantes :

$$d_\infty(f,g) = \max_{-\pi\leq t\leq\pi} |f(t)-g(t)|$$

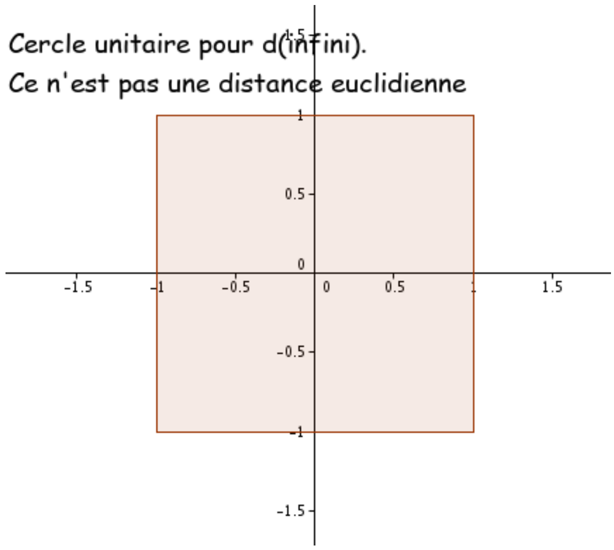
$$d_1(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-g(t)|dt$$

$$d_2(f,g) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-g(t)|^2\right)^{1/2} dt$$

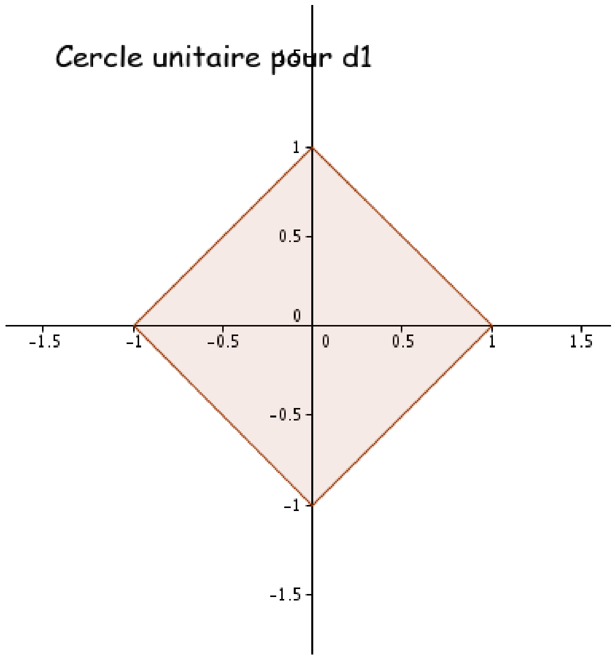
1.3.2 Sur $\mathbb{R}^2$

Les analogues de ces distances sur $\mathbb{R}^2$ sont :

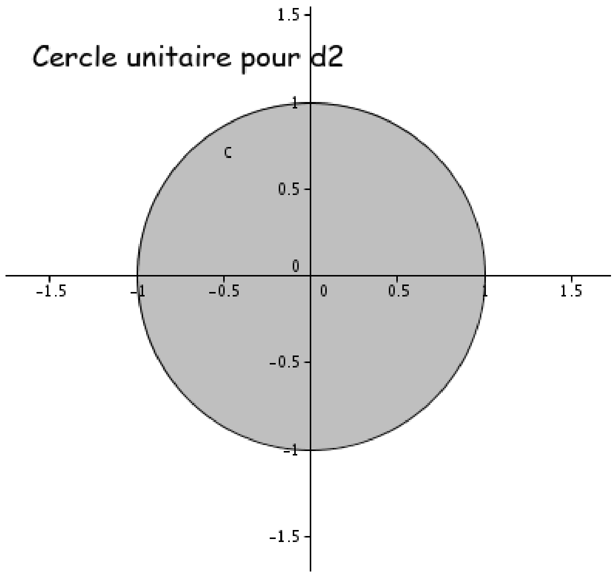
$$d_\infty(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$



$$d_1(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$



$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$



1.3.3 Normes

Définition 1.3.1. Soit V un espace vectoriel et une fonction sur V $\|.\| : V \to [0,+\infty[$:

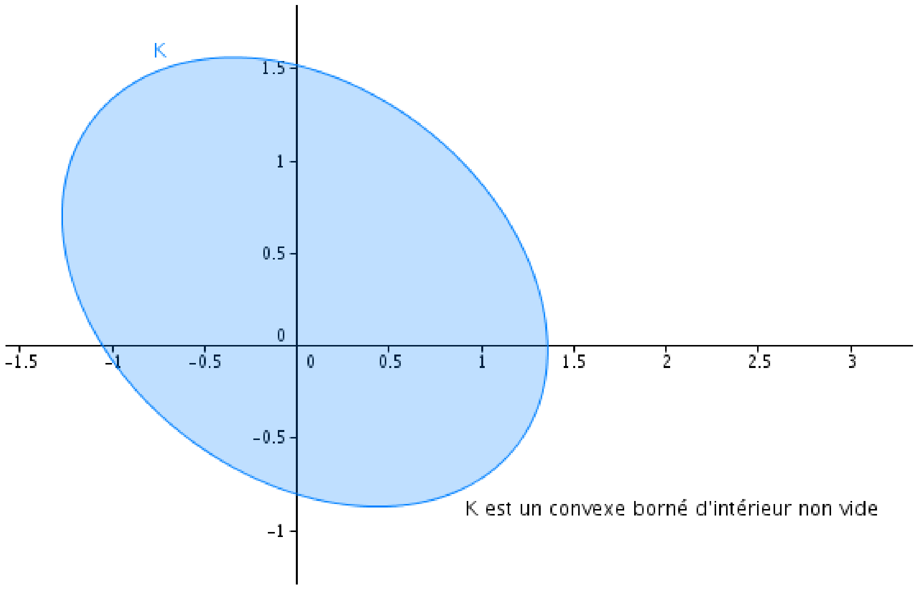
1) $\|\overrightarrow{v}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = 0$

2) $\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\|$

3) $\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\| \leq \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{w}\|$

Intérêt ?

Exercice 1.3.1. Si $\|.\|$ est une norme, $d(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\|$ est une distance.



On définit trois normes sur $\mathcal{C}^0([-\pi,\pi])$.

Définition 1.3.2. 1) $\|f\|_\infty = \max_{-\pi\leq x\leq\pi} |f(x)|$

2) $\|f\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$

3) $\|f\|_2 = \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$

Définition 1.3.3. Un norme est euclidienne si $\forall v \in V$, $\|v\|^2 =< v, v >$.

Theorème 1.3.1 (Caractérisation de normes euclidiennes)**.** *Une norme* $\|\cdot\| : V \to [0,+\infty[$ *est euclidienne si et seulement si* $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ *:*

$$\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|^2 + \|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2)$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Norme euclidienne $\Rightarrow \|v\|^2 =< v, v >$ (d'après la **Définition 1.3.3.**).

$$\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|^2 =< \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w} >= \|v\|^2 + 2 < v, w > + \|w\|^2$$

$$\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\|^2 = \|v\|^2 - 2 < v, w > + \|w\|^2$$

$$\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|^2 + \|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \text{ (identité du parallélogramme)}$$

($\Leftarrow$) Si $\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|^2 - \|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2)$, on définit :

$$< v, w >= \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

Exercice 1.3.2. Montrer que ceci est un produit scalaire.

□

Exercice 1.3.3. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([-\pi,\pi])$ n'est pas euclidienne :

$$f(x) \equiv 1,\ g(x) = x$$

$$\|f+g\|_\infty = \max_{[-\pi,\pi]} |1+x| = 1+\pi$$

$$\|f-g\|_\infty = \max_{[-\pi,\pi]} |1-x| = 1+\pi$$

On a ainsi :

$$\|f\|_\infty = 1,\ \|g\|_\infty = \pi$$

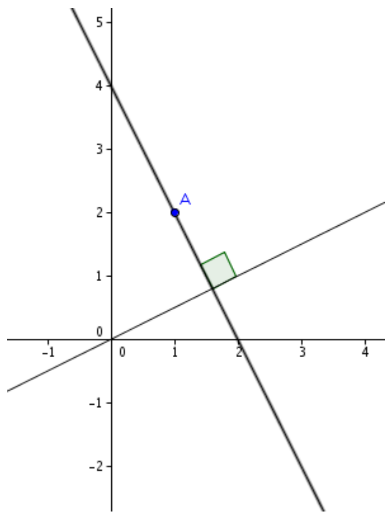
On vérifie que :

$$(1+\pi)^2 + (1+\pi)^2 \neq 2(1+\pi^2)$$

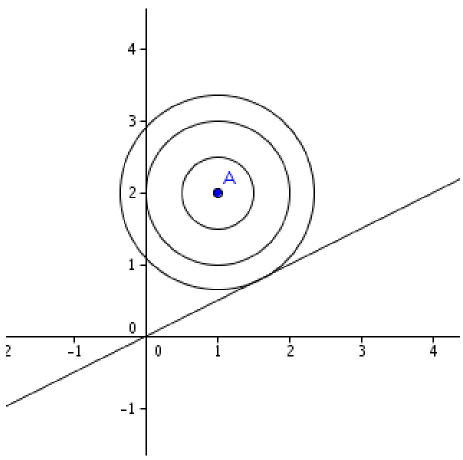
1.4 Notion de meilleure approximation

Soit un point dans le plan $\mathbb{R}^2$ (dans les figures qui vont suivre, on a pris le point $A = (1, 2)$. On veut savoir quelle est la plus courte distance entre ce point et une droite D (dans les figures, on a pris la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

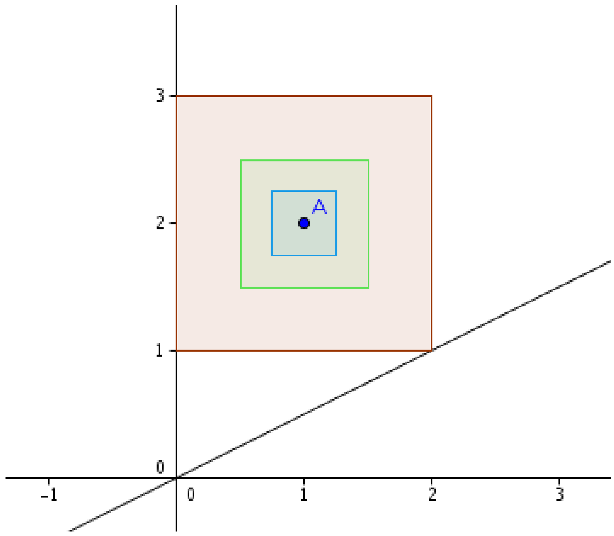
Pour la distance d_1, c'est la droite perpendiculaire qui passe par A.



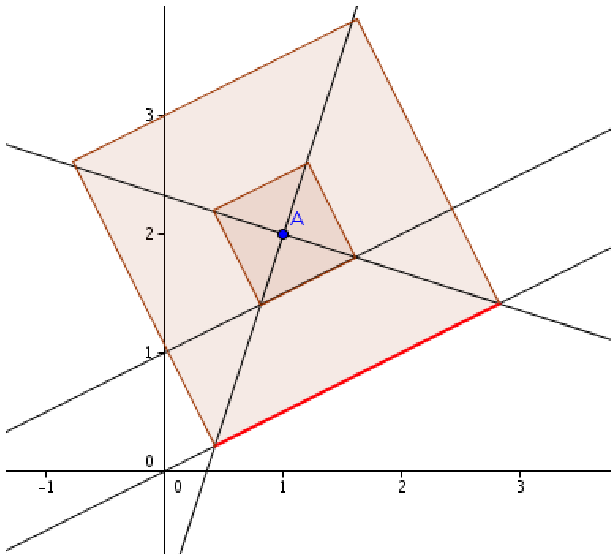
Pour la distance d_2, on peut tracer des cercles concentriques jusqu'à atteindre la droite D en un seul point (cercle tangent)



On fait la même chose pour la distance d_∞ : cette fois-ci on ne trace pas des cercles concentriques mais des carrés concentriques (dont les côtés sont paralléles aux axes x et y).



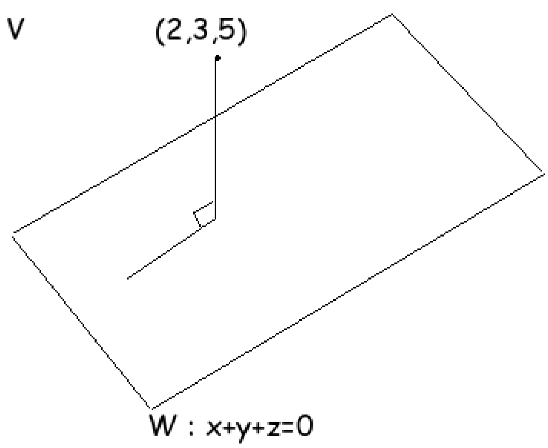
Mais il y a un problème quand la distance est mal prise. Par exemple :



La notion de meilleure approximation justifie le choix de d_2.

Revenons à un problème bien classique qui est le suivant :

"Quelle est la meilleure approximation à $(2, 3, 5)$ *dans le plan* $x + y + z = 0$ *?"*



1.4.1 Projection orthogonale sous un sous-espace (dimension finie)

Définition 1.4.1. $(v_1, ..., v_k)$ est une base orthonormée si :

1) $< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

2) $(v_1, ..., v_k)$ forment une base de sous-espace.

Méthode. Soit $(v_1, ..., v_k)$ une base orthonormée de sous-espace. On définit $P_W : V \to W$ (avec W un hyperplan de V) application linéaire telle que :

$$P_W(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{k} < \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{x} > \overrightarrow{v_i}$$

On a ainsi : $y \in W$, $P_W(y) = y$[1] et $\mathrm{Im}(P_W) = W$

Propriété 1.4.1 (Propriétés de P_W)**.** *(1) P_W est linéaire.*
(2) $P_W^2 = P_W$
(3) $< P_W(x), y >=< x, P_W(y) >$ (P_W est symétrique par rapport au produit scalaire)
(4) $P_W(x) \perp (x - P_W(x))$ (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(P_W) \perp W$)

Démonstration. (1) évident
(2)

$$\begin{aligned} P_W(P_W(x)) &= P_W\left(\sum_i < v_i, x > v_i\right) \\ &= \sum_i < v_i - x > P_W(x_i) \\ &= \sum_i < v_i, x > v_i = P_W(x) \end{aligned}$$

(3)

Exercice 1.4.1.

[1]

$$P_W(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{k} < \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{x} > \overrightarrow{v_i}$$

$y \in W$, $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$:

$$P_W(y) = \sum_{i=1}^{k} < v_i, \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j}_{y} > \overrightarrow{v_i}$$

Or :

$$\sum_j \lambda_j < v_i, v_j >= \begin{cases} \lambda_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

et donc :

$$P_W(y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i = y$$

(4)

$$\begin{aligned} < P_W(x), x - P_W(x) > &= < P_W(x), x > - < P_W(x), P_W(x) > \\ &= < P_W(x), x > - < x, P_W(x) > \\ &= 0 \end{aligned}$$

Autre démonstration : $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(P_W)$, $P_W(\overrightarrow{x}) = 0$ Si $P_W(y) = y \in W = \mathrm{Im}(P_W)$:

$$< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, P_W(\overrightarrow{y}) >=< P_W(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >= \overrightarrow{0}$$

□

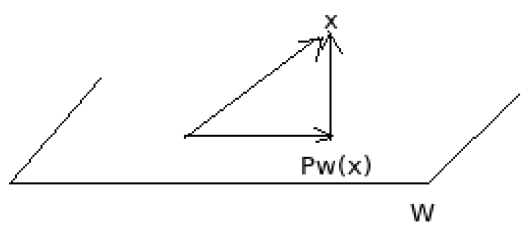
Exercice 1.4.2. Soit $P : V \to V$ tel que $P^2 = P$. On veut montrer que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Im}(P) = V$:

$$(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P$$

On peut montrer que :
- $\mathrm{Im}(I - P) = \mathrm{Ker}(P)$
- $\mathrm{Ker}(I - P) = \mathrm{Im}(P)$
- $\mathrm{Im}(I - P) \perp \mathrm{Im}(P)$
- $\mathrm{Ker}(P) \perp \mathrm{Im}(P)$

Proposition 1.4.2. *Soit $(V, <, >)$ un espace euclidien et soit W un sous-espace de dimension finie. Si $x \in V$, la meilleure approximation à x sur W est précisement $P_W(x)$.*

Définition 1.4.2. "Meilleure approximation" = vecteur sur W qui est le plus proche de x.



Problème. *Quel est le vecteur $\overrightarrow{y} \in W$ tel que :*

$$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| = \inf\{\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z}\|, \overrightarrow{z} \in W\}?$$

*Selon la **Proposition 1.4.2**, la réponse est $y = P_W(x)$.*

Démonstration.

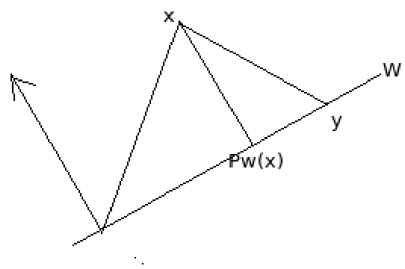
$$x = \underbrace{P_W(x)}_{W} + \underbrace{(I - P_W)(x)}_{W^\perp}$$

Si $y \in W$:

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= < x-y, x-y > \\
&= < P_W(x) + (I-P_W)(x) - y, P_W(x) + (I-P_W)(x) - y > \\
&= < P_W(x), P_W(x) > + \underbrace{< P_W(x), (I-P_W)(x) >}_{0} - < P_W(x), y > \\
&\qquad + \underbrace{< (I-P_W)(x), P_W(x) >}_{0} + < (I-P_W)(x), (I-P_W)(x) > \\
&\qquad + \underbrace{< (I-P_W)(x), y >}_{0} - < y, P_W(x) > \\
&\qquad - \underbrace{< y, (I-P_W)(x) >}_{0} + < y, y > \\
&= < P_W(x), P_W(x) > - < P_W(x), y > + < (I-P_W)(x), (I-P_W)(x) > \\
&\qquad - < y, P_W(x) > + < y, y >
\end{aligned}$$

On rappelle qu'on veut montrer que :

$$\|x-y\|^2 = \|(I-P_W)(x)\|^2 + \|P_W(x) - y\|$$



$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= < P_W(x), P_W(x) > - < P_W(x), y > \\
&\qquad + < (I-P_W)(x), (I-P_W)(x) > - < y, P_W(x) > + < y, y > \\
&= \|(I-P_W)(x)\|^2 + < P_W(x), P_W(x) > -2 < y, P_W(x) > + < y, y > \\
&= \|(I-P_W)(x)\|^2 + < P_W(x) - y, P_W(x) - y > \\
&= \|(I-P_W)(x)\|^2 + \|P_W(x) - y\|^2
\end{aligned}$$

On finit la démonstration en remarquant que le minimum est atteint quand $y = P_W(x)$ (c'est-à-dire quand $\|P_W(x) - y\|^2 = 0$). □

Problème. *1) Quelle est la meilleure approximation au point* $(2,3,5)$ *sur le sous-espace* $x + y + z = 0$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

2) Quelle est la meilleure approximation à $\sin(x)$ *parmi toutes les fonctions de la forme* $ax+b$ *?*

1.4.2 Recherche de bases orthonormées : Gram-Schmidt

Proposition 1.4.3. *Soit $W \subset V$ un sous-espace de dimension finie. Soit $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_k})$ une base quelconque de W. On définit :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \frac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|} \\
\overrightarrow{v_2} &= \frac{\overrightarrow{v_2} - < \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_1} > \overrightarrow{v_1}}{\|\overrightarrow{v_2} - < \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_1} > \overrightarrow{v_1}\|} \\
\overrightarrow{v_3} &= \frac{\overrightarrow{u_3} - < \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{v_1} > \overrightarrow{v_1} - < \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{v_2} > \overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{u_3} - < \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{v_1} > \overrightarrow{v_1} - < \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{v_2} > \overrightarrow{v_2}\|}
\end{aligned}$$

Exercice 1.4.3. Trouver une base orthonormée du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le plan $x + y + z = 0$.

Une base (non orthonormée) du sous-espace en question est : $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1)$. On peut vérifier qu'en appliquant Gram-Schmidt pour orthonormaliser la base, qu'on obtient :

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
P_W(x) &= < v_1, x > v_1 + < v_2, x > v_2 \\
&= < (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)(x_1, x_2, x_3) > (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) \\
&\quad + < (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (x_1, x_2, x_3) > (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}) \\
&= \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) + \left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + \frac{x_2}{\sqrt{6}} - \frac{2x_3}{\sqrt{6}}\right)(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}) \\
&= \left(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 + 2x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$P_W(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$P_W(2, 3, 5)^T = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Exercice 1.4.4 (Réponse au problème 2))**.** Soit $W \subset \mathcal{L}([-\pi, \pi]) = \{ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$. La base de $\mathcal{L}([-\pi, \pi])$ est $u_1 = 1$ et $u_2 = x$. On pose comme produit scalaire :

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

On utilise le procédé de Gram-Schmidt pour orthonormaliser (u_1, u_2) ;

$$v_1 = 1,\ v_2 = \frac{\sqrt{3}x}{\pi}$$

$$P_W(\sin(x)) = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx\right)}_{0} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi^2}\int_{-\pi} x\sin(x)dx\right)\frac{\sqrt{3}x}{\pi}$$

$$u = x\, du = dx$$

$$dv = \sin(x)dx, \; v = -\cos(x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = \Big[x \cos x\Big]_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx}_{\Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi}} = 2\pi$$

$$P_W(\sin(x)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx\right)\frac{\sqrt{3}}{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi^2}2\pi\frac{\sqrt{3}x}{\pi} = \frac{3x}{\pi^2}$$

Chapitre 2

Analyse de Fourier

2.1 Polynômes trigonométriques

On considère $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ l'espaces des fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$, la base de $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ est :

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), ...\}$$

Définition 2.1.1. Un polynôme trigonométrique d'ordre k est défini par :

$$a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)$$

Remarque 2.1.1. L'ensemble des polynômes trigonométriques d'ordre k est un sous-espace de $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ de dimension $2l + 1$. On note $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ l'ensemble des polynômes trigonométriques d'ordre k.

Problème. *Trouver la formule pour la projection orthogonale sur $\mathcal{W}_k$, $P_{\mathcal{W}_k}(f)$.*

Indication. 1) Trouver une base orthonormée de $\mathcal{W}_k$. Pour cela, on va vérifier que :

$$\begin{aligned} < 1, \cos(jx) >= 0 \text{ et } < 1, \sin(jx) >= 0, j \neq 0 \\ < \cos(jx), \sin(mx) >= 0, j, m \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

2) Calculer :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx$$

et vérifier :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq 0 \\ 1 \text{ si } k = 0 \end{cases}$$

3) Utiliser ce résultat et les formules :

$$\cos(jx) = \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2}, \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

pour montrer (2.1).

Réponse.

$$\begin{array}{rcl} < \cos(jx), \cos(kx) >= 0 & \text{si} & j \neq k \\ < \sin(jx), \sin(kx) >= 0 & \text{si} & j \neq k \\ < \cos(jx), \sin(mx) >= 0 & \text{pour} & j, m \geq 0 \end{array}$$

et :

$$\begin{aligned} j \neq 0,\ \|\cos(jx)\|^2 &= < \cos(jx), \cos(jx) > \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2} dx \\ &= \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2ijx} + 2 + e^{-2ijx}) dx \\ &= \frac{4\pi}{8\pi} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a ainsi : $\|\cos(jx)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \|\sin(jx)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ijx} - e^{-ijx}}{2i} dx \\ &= -\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -2dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc : $\|\sin(jx)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\|1\| = 1$.

Conclusion. $\{1, \sqrt{2}\cos(x), \sqrt{2}\sin(x), ..., \sqrt{2}\cos(kx), \sqrt{2}\sin(kx)\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}_k$.

Proposition 2.1.1.

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{W}_k}(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sqrt{2}\cos(jx)dx \right)\cos(jx) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sqrt{2}\sin(jx)dx \right)\sin(jx) \end{aligned}$$

Exercice 2.1.1. Calculer :

$$P_{\mathcal{W}_1}(\cos^2(x)),\ P_{\mathcal{W}_2}(\cos^2(x)$$

Exercice 2.1.2. Soit $f(x) = x$, calculer $P_{\mathcal{W}_k}(f)$.

On a la relation suivante :

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\cos(2x)}{2}}_{\mathcal{W}_2}$$

On a ainsi :

$$P_{\mathcal{W}_2}(\cos^2(x)) = \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

et :

$$P_{\mathcal{W}_1}(\cos^2(x)) = \frac{1}{2}$$

Pour calculer $P_{\mathcal{W}_k}(x)$, on calcule par parties ;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{ijx}dx$$

On pose :

$$u = x \Rightarrow du = dx \text{ et } dv = e^{ijx}dx \Rightarrow v = \frac{e^{ijx}}{ij}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{ijx}dx &= \left[\frac{1}{2\pi}\frac{xe^{ijx}}{ij}\right]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ijx}}{ij}dx}_{0} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\pi e^{ij\pi}}{ij} + \frac{1}{2\pi}\frac{\pi e^{-ij\pi}}{ij} \\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{ij\pi}}{ij} + \frac{1}{2}\frac{e^{-ij\pi}}{ij} \\
&= \frac{1}{ij}\cos(j\pi) = -\frac{i}{j}(-1)^j
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx}dx = \begin{cases} 0 \text{ si } j = 0 \\ -\frac{i}{j}(-1)^j \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

On cherche maintenant :

$$< x, \cos(jx) > = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sqrt{2}\cos(jx)dx \tag{2.2}$$

$$< x, \sin(jx) > = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sqrt{2}\sin(jx)dx \tag{2.3}$$

On a que (2.2) $= 0$ car la fonction cos est une fonction paire sur $[-\pi, \pi]$. Pour (2.3) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(jx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{e^{ijx} - e^{-ijx}}{2i}\right)dx = \frac{(-1)^{j+1}}{j}$$

Enfin :

$$P_{\mathcal{W}_k}(x) = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{(-1)^{j+1}}{j}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\sin(jx) = 2\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\sin(jx)$$

Remarque 2.1.2. On peut changer le produit scalaire :

$$< f, g >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Mais il faut changer la famille orthonormée[1] :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), ...\right)$$

$\mathcal{W}_k =< \sqrt{2}, \cos(x), \sin(x), ..., \cos(kx), \sin(kx) >$.

[1]Avant la **Proposition 2.1.1**, on avait dit que $E := \{1, \sqrt{2}\cos(x), \sqrt{2}\sin(x), ..., \sqrt{2}\cos(kx), \sqrt{2}\sin(kx)\}$ formait une base orthonormée de $\mathcal{W}_k$. En fait, pas tout à fait ! On le verra plus tard. On considère alors que E est juste une famille orthonormée pour $\mathcal{W}_k$

2.2 Utilisation des espaces hermitiens

On veut utiliser les nombres complexes.

Définition 2.2.1 (Espaces hermitiens)**.** Soit $(V, <>)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. $<,>: V \times V \to \mathbb{C}$ est un produit hermitien si :

1) $< \overrightarrow{v_1} + \lambda \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w} >=< \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w} > +\lambda < \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w} >$

2) $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >= \overline{< \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} >}$

3) $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} >\geq 0$ et $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} >= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = 0$

Exemple 2.2.1. $\{(z_1, ..., z_n), z_i \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^n$:

$$< (z_1, ..., z_n), (w_1, ..., w_n) >= \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$$

Exemple 2.2.2. On considère ;

$$\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \text{ fonctions continues}\}$$

et on définit le produit hermitien suivant :

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Exercice 2.2.1. Montrer que dans les deux exemples, les espaces considérés sont des espaces hermitiens.

Définition 2.2.2.
- Norme : $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}}$
- On dit que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux si $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >= 0$
- Famille orthonormée $(v_1, ..., v_k)$:

$$< \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j} >= \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 2.2.1. $(1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, ...)$ *est une famille orthonormée.*

Démonstration.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq 0 \\ 1 \text{ si } k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} < e^{imx}, e^{inx} > &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}}dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = n \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

Définition 2.2.3 (Polynômes trigonométriques complexes)**.** Soit $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. On définit les polynômes trigonométriques quelconques :

$$\{a_{-k}e^{-ikx} + ... + a_0 + a_1e^{ix} + ... + a_ke^{ikx},\ a_{-k}, ..., a_k \in \mathbb{C}\}$$

Proposition 2.2.2. *$(\mathcal{W}_n)_{0\leq n\leq k}$ forme une suite d'ensembles inclus dans $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.*

Définition 2.2.4. Soit $f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. On définit la projection de f sur $\mathcal{W}_k$:

$$S_kf = \sum_{m=-k}^{k} < f, e^{imx} > e^{imx} = \sum_{m=-k}^{k} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx\right)}_{\widehat{f}(m)} e^{imx} \tag{2.4}$$

Définition 2.2.5.

$$\widehat{f}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx$$

est le m-ième coefficient de Fourier.

On a donc une réécriture de la formule (2.4) :

$$S_kf = \sum_{m=-k}^{k} \widehat{f}(m)e^{imx}$$

2.3 Idée de base de l'analyse de Fourier

Soit $f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. On considère la suite $(\widehat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}$. Peut-on réécrire la fonction à l'aide de la suite des coefficients de Fourier ?

Ici, on considère une fonction f continue sur $[-\pi,\pi]$. On peut l'interpoler en un nombre fini de points (ici, on a interpolé la fonction sur 10 points équidistants sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$). On peut aussi considérer ..., $\widehat{f}(-1), \widehat{f}(0), \widehat{f}(1), ...$ et :

$$e^{ix} = \cos(kx) - i\sin(kx)$$

Exercice 2.3.1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$[2] tel que $f(\pi) = f(-\pi)$. Quel est le rapport entre $(\widehat{f}(n))$ et $(\widehat{f'}(n))$?

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx = in\widehat{f}(n)$$

Exercice 2.3.2. Soit $f(x) = x$. Calculer $\widehat{f}(n)$.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(0) &= 0 \\ \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{xe^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}dx}_{=0}\right) \end{aligned}$$

[2]ensemble des fonctions différentiables à dérivées continues

On a : $e^{-in\pi} = (e^{-i\pi})^n = (-1)^n$.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi(-1)^n}{-in} - \frac{(-\pi)(-1)^n}{-in}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi(-1)^n}{-in} = \frac{(-1)^n}{2\pi}\end{aligned}$$

Pour $f(x) = x$:

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \frac{(-1)^n}{2\pi} \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$$

Propriété 2.3.1 (sur les coefficients de Fourier)**.** *Soit* $f, g \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$.

1) $\widehat{f+g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$

2) $(\widehat{\lambda f})(n) = \lambda \widehat{f}(n)$

3) $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$

4) Soit $f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ *étendue par périodicité*[3]*. On définit* $f_\tau = f(x-\tau)$.

$$\widehat{f_\tau}(n) = \widehat{f}(n)e^{-in\tau}$$

Démonstration. 1)

Exercice 2.3.3.

2)

Exercice 2.3.4.

3)

$$\begin{aligned}\widehat{\overline{f}}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{inx}}dx \\ &= \overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\right)} = \overline{\widehat{f}(n)}\end{aligned}$$

4)

$$\widehat{f_\tau}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\tau)e^{-inx}dx$$

On pose $y = x - \tau$, $dy = dx$.

$$\begin{aligned}\widehat{f_\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\tau}^{\pi-\tau} f(y)e^{-iny}e^{-in\tau}dy \\ &= e^{-in\tau}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\tau}^{\pi-\tau} f(y)e^{-iny}dy \\ &= e^{-in\tau}\widehat{f}(n)\end{aligned}$$

□

Définition 2.3.1 (Fonction étendue par périodicité)**.** Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. On peut étendre f sur I tel que $[a,b] \subset I$ où on répète $f([a,b])$ sur le reste de l'intervalle I.

[3]voir **Définition 2.3.1**

Exemple 2.3.1. Soit $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$. Sur la figure suivante, on a étendue la fonction par périodicité sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

Proposition 2.3.2. *Soit f tel que $f(x + 2\pi) = f(x)$. Alors :*

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_a^{2\pi+a} f(x)dx$$

Définition 2.3.2 (Produit de convolution)**.** Soient $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (étendue par périodicité si besoin) :

$$f * g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

Exercice 2.3.5. Calculer $\widehat{f * g}(n)$.

Exercice 2.3.6. $g(x) = e^{inx}$, $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{int}dt$$

On pose $x - t = y$, $dt = -dy$.

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\pi+x}^{x-\pi} f(y)e^{inx}e^{-iny}dy = \frac{e^{inx}}{2\pi} \int_{-\pi+x} \pi + xf(y)e^{-inx}dy = e^{inx}\widehat{f}(x)$$

Donc : $(f * g)(x) = \widehat{f}(n)e^{inx}$.

Exercice 2.3.7. Monter que :

1) $f * g = g * f$.
2) $(f * g) * h = f * (g * h)$
3) $(f + g) * h = f * h + g * h$

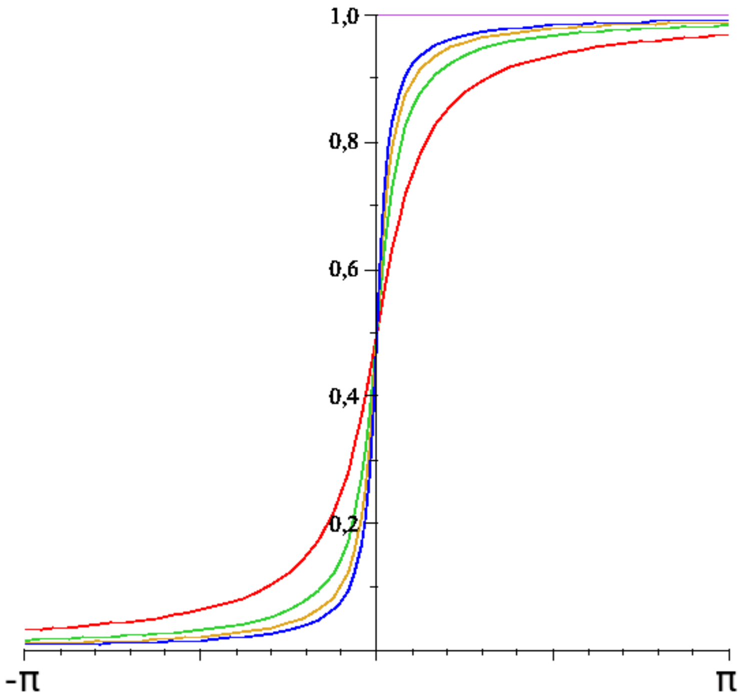
Proposition 2.3.3.

$$S_k f = \sum_{m=-k}^{k} \widehat{f}(n)e^{inx} = f * \left(\sum_{m=-k}^{k} e^{imx} \right)$$

$$S_k f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g_k(t)dt$$

Définition 2.3.3. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \to f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que si $n \geq N$ alors $\|f - f_n\| < \varepsilon$ avec :

$$\|f - f_n\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_n|^2 dt \right)^{1/2}$$



Sur la figure, l'intégrale ne "voit" pas les décalages des fonctions f_n.

Chapitre 3

Analyse hilbertienne

3.1 Construction de $\mathbb{R}$

Définition 3.1.1. $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $p, q \in \mathbb{Z}$. On définit la distance entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{m}{n}$:

$$d\left(\frac{p}{q}, \frac{m}{n}\right) = \left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right|$$

Définition 3.1.2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que si $m, k > N$ alors $d(a_m, a_k) < \varepsilon$.

Définition 3.1.3. Deux suites de Cauchy (a_n) et (b_n) sont équivalentes si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que si $n > N$ alors $d(a_n, b_n) < \varepsilon$.

Définition 3.1.4. On appelle complété de $\mathbb{Q}$, l'ensemble des classes d'équivalence des suites de Cauchy.

Définition 3.1.5. On définit $\mathbb{R}$ comme le complété de $\mathbb{Q}$.

Proposition 3.1.1. *Soit d la distance sur $\mathbb{Q}$:*

$$\begin{array}{cccc} d & : & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ & & \left(\frac{p}{q}, \frac{m}{n}\right) & \mapsto & d\left(\frac{p}{q}, \frac{m}{n}\right) = \left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right| \end{array}$$

Si[1] $x = [(a_n)]$, $y = [(b_n)]$, $d(x, y) = \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n|$ [2].

Démonstration.

Exercice 3.1.1. Il faut vérifier que ceci est bien définie et que $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant deux propriétés d'une distance.

□

Définition 3.1.6. Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X, converge dans X.

Proposition 3.1.2. *Le complété d'un espace métrique est complet.*

[1] Avec les notations de la **Définition 3.1.3**

[2] C'est une extension de la distance de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$

3.2 Espaces L^1, L^2, L^∞

Définition 3.2.1. $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=}$ le complété de $(\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C}), d_2)$ avec :

$$d_2(f,g) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-g|^2 dt\right)^{1/2}$$

Définition 3.2.2. $L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=}$ le completé de $(\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C}), d_1)$ avec :

$$d_1(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-g| dt$$

Définition 3.2.3. $L^\infty([-\pi,\pi],\mathbb{C}) = (\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C}), d_\infty)$[3] avec :

$$d_\infty(f,g) = \max_{-\pi\leq t\leq\pi} |f(t)-g(t)|$$

Theorème 3.2.1. *La famille orthonormée $\{e^{int}, n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ (resp. de $L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$) dans le sens suivant :*

$$\|f - S_k f\|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad \text{(resp. } \|f - S_k f\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\text{)}$$

où S_k est la projection orthogonale de L^2 sur $W_k = \{e^{int}, -k \leq n \leq k\}$. En particulier, si $f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ alors :

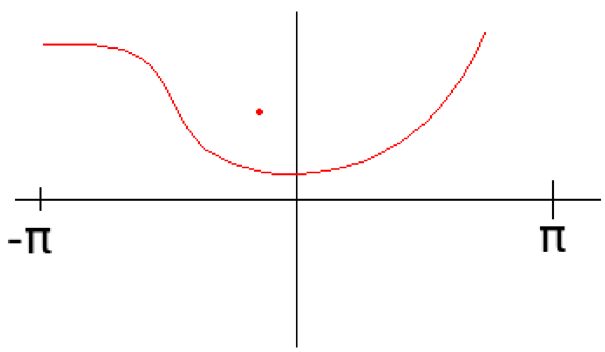
$$\|S_k f - f\|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad \text{(resp. } \|S_k f - f\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\text{)}$$

On dit alors que $S_k f \to f$ dans L^2 (resp. $S_k f \to f$ dans L^1).

Attention :.

$$S_k f(t) = \sum_{m=-k}^{k} \widehat{f}(m) e^{imt}$$

On ne dit pas que $S_k f(t) \to f(t)$. Si $f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, la convergence ponctuelle ou uniforme de $S_k f$ vers f n'est pas assuré par le **Théorème 3.2.1**.

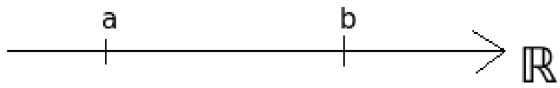


Remarque 3.2.1. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable $f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$ et $g \neq f$ sur K alors $f = g$ en tant qu'élément de L^2.

En particulier, la notion de "valeur" $f(t)$ pour $f \in L^2$ n'a aucun sens.

[3] déjà complet

3.3 Théorie de la mesure « pour les nuls »



Définition 3.3.1. On définit :

$$m(\emptyset) = \emptyset,\ m([a,b]) = b - a$$

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ un ensemble dénombrable d'intervalles dans $\mathbb{R}$.

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} m(I_k),\ \bigcup_{k=1}^{n} I_k \supset A \right\} \tag{3.1}$$

Exercice 3.3.1. On doit tout de même vérifier que :

$$m([a,b]) = b - a$$

dans la formule (3.1).

Exercice 3.3.2. Si A dénombrable, $m(A) = 0$.

Idée. On définit $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ et $I_j = \{t,\ |t - a_j| < \frac{\varepsilon}{2t}\}$

$$\sum m(I_j) = \varepsilon$$

Si $\varepsilon \to 0$, on a $m(A) = 0$.

Proposition 3.3.1. *Soit $B \subset \mathbb{R}$ quelconque et $A \subset \mathbb{R}$. En général :*

$$m(A \cap B) + m(A^C \cap B) \neq m(B) \tag{3.2}$$

Définition 3.3.2. $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble mesurable si elle ne vérifie pas la formule (3.2) (c'est-à-dire quand on a égalité), c'est-à-dire $B \subset \mathbb{R}$:

$$m(A \cap B) + m(A^C \cap B) = m(B)$$

Les ensembles non mesurables sont très difficile à construire : c'est pour cette raison qu'on aime bien travailler avec des ensembles mesurables.

3.4 Espaces de Hilbert et espaces de Banach

3.4.1 Espaces de Banach

Définition 3.4.1. Un espace de Banach est un espace normé complet.

Remarque 3.4.1. Un espace normé de dimension finie est complet.

Exemple 3.4.1. 1. Soit l_∞ l'ensemble des suites $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tel que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$$

On la munit de la norme suivante :

$$\|\{a_n\}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Ainsi

$$\{a_n\} + \{b_n\} =: \{a_n + b_n\}$$
$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$$

2. $\mathcal{C}([a,b])$ est l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$. On munit cet espace d'une norme :

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Cet espace est complet (une suite de fonctions continues qui converge uniformément converge en une fonction continue).

3. Soit l_1 l'ensemble des suites $\{a_n\}$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

et on la munit de la norme :

$$\|\{a_n\}\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Exercice 3.4.1. Soit $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in l_1$. Montrer que :

1. $\{a_n + b_n\} \in l_1$,
2. $\|\{a_n + b_n\}\| \leq \|\{a_n\}\| + \|\{b_n\}\|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \\ &= \|\{a_n\}\|_1 + \|\{b_n\}\|_1\end{aligned}$$

3.4.2 Espaces de Hilbert

Définition 3.4.2. Un espace de Hilbert $(H, <,>)$ est un espace hermitien complet.

Rappel. (1) $< \lambda v_1 + v_2, w >= \lambda < v_1, w > + < v_2, w >$

(2) $< v, w >= \overline{< w, v >}$

(3)

$$\begin{aligned}< v, v > &\geq 0 \\ &= \text{ si et seulement si } v = 0\end{aligned}$$

Exercice 3.4.2. Un espace hermitien à dimension finie est complet.

Exemple 3.4.2. Soit $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C}])$. On le munit de la norme :

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

$$< f,g >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$$

On a que $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ est le completé de cet espace.

Exemple 3.4.3. Soit l_2 l'ensemble des suites $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\sum |a_n|^2 < \infty$$

$$< \{a_n\},\{b_n\} > \text{ " = " } \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\overline{b_n}$$

Theorème 3.4.1. *l_2 est un espace de Hilbert.*

Démonstration. 1) Montrer que l_2 est un espace vectoriel, c'est-à-dire si $\sum|a_n|^2 < +\infty$ et $\sum|b_n|^2 < +\infty$ alors $\sum|a_n+b_n|^2 < +\infty$.

$$|a_n+b_n|^2 \leq |a_n|^2 + \underbrace{2|a_n||b_n|}_{\leq|a_n|^2+|b_n|^2} + |b_n|^2$$

$$\leq 2|a_n|^2 + 2|b_n|^2$$

$$\sum|a_n+b_n| \leq 2\sum|a_n|^2 + 2\sum|b_n|^2 < \infty$$

2) Si $\sum|a_n|^2 < \infty$ et $\sum|b_n|^2 < \infty$, est-ce que $\sum a_n\overline{b_n}$ converge ?

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n\overline{b_n}$$

Soit :

$$\overrightarrow{v_N} = (a_{-N},...,a_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$$

$$\overrightarrow{w_N} = (b_{-N},...,b_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$$

$$|<\overrightarrow{v_N},\overrightarrow{w_N}>| \leq \|\overrightarrow{v_N}\|^2\|\overrightarrow{w_N}\|^2$$

3) (i) Soit $\{a_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de Cauchy dans l_2 :

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \cdots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

$\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que si $r,s > N$ alors :

$$\{a_n^r\} - \{a_n^s\} < \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n^r - a_n^s|^2 < \varepsilon^2$$

On doit montrer que $\{a_n^r\}_{r=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

$$|a_n^r - a_n^s| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_n^r - a_n^s| < \varepsilon^2$$

$\Rightarrow \{a_n^r\}_{r=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy.

(ii) Montrer que le candidat appartient à l_2. Soit $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$, on doit montrer que :

$$a_n = \lim_{r\to\infty} a_n^r$$

Il existe k tel que si $r \geq k$ alors :

$$\|\{a_n^k\} - \{a_n^r\}\|^2 \leq 1$$

$$\begin{aligned}\sum |a_n|^2 &\leq \sum \left(|a_n - a_n^k|^2 + |a_n^k|^2\right) \\ &= \sum \left|\lim_{r\to\infty} a_n^r - a_n^k\right|^2 + \sum |a_n^k|^2\end{aligned}$$

On remarque que pour chaque r

$$\begin{aligned}\sum |a_n^r - a_n^k|^2 &\leq 1 \\ \sum \left|\lim r \to \infty a_n^r - a_n^k\right|^2 &\leq 1 \\ &\Rightarrow \sum |a_n|^2 \leq 1 + \|\{a_n^k\}\|^2 < \infty \end{aligned} \tag{3.3}$$

En remplaçant 1 par ε dans (3.3), on prouve que

$$\|\{a_n\}\|^2 = \lim_{r\to\infty} \|\{a_n^r\}\|^2$$

(iii) Il faut montrer que :

$$\|\{a_n\} - \{a_n^r\}\| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que si $r > N$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n - a_n^r|^2 < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M$ tel que si $r, s > M$

$$\|\{a_n^r\} - \{a_n^s\}\|^2 < \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n^s r - a_n^s|^2 < \varepsilon$$

Par définition

$$a_n = \lim_{r\to\infty} a_n^r$$

Pour chaque $s \geq M$

$$\sum |a_n^s - a_n^r| < \varepsilon$$

Donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n^r - a_n^s| < \limsup \sum |a_n^r - a_n^s|^2 < \varepsilon$$

□

Définition 3.4.3. On dit que H est séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable dense.

La définition 3.4.3 est une condition (standard) supplémentaire qu'on considéra pour un espace de Hilbert.

Exemple 3.4.4.
- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}]$

– ℓ_2 est l'ensemble des suites $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty.$$

On munit cet ensemble de la norme suivante

$$< \{a_n\}, \{b_n\} >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}.$$

Définition 3.4.4. $K \subset H$ est un sous-espace fermé si
- K est un sous-espace vectoriel,
- K est fermé dans H (c'est-à-dire une suite de Cauchy dans K qui converge dans K).

Remarque 3.4.2. **Attention !** Tous les sous-espaces ne sont pas fermés.

Exercice 3.4.3. $H = \ell_2$, $K = \{\{a_n\}, \sum |n||a_n|^2 < \infty\}$.

1) Montrer que K est un sous-espace.

2) Montrer qu'il n'est pas fermé.

Exercice 3.4.4. $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \subset L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.

Exercice 3.4.5. Tout sous-espace de dimension finie est fermée.

Définition 3.4.5. Une famille orthonormale de vecteurs $\{\varphi_n\}$ est une famille telle que

$$< \varphi_i, \varphi_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Définition 3.4.6. Soit H un espace de Hilbert et $\{\varphi_n\}$ une famille orthonormale. Cette famille est complète si le plus petit sous-espace fermé qui contient tous les φ_n est H.

Remarque 3.4.3. Une famille orthonormale complète constitue une base de H.

On veut prouver le théorème suivant :

Theorème 3.4.2. *$\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de $(L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}), <,>)$ tel que*

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Pour cela, on va montrer un certain nombre de propositions.

Proposition 3.4.3. *Tout espace de Hilbert H (séparable) admet une base orthonormée.*

Idée de la preuve. $\{f_i\} \in H$ est un sous-ensemble dénombrable dense. On peut supposer que les f_i sont linéairement indépendants. On utilise Gram-Schmidt pour obtenir une famille orthonormée.

Il faut montrer que $u_1, u_2, ...$ est une base. Tout vecteur $f \in H$ peut être approximé par une somme (finie) de u_i. Il existe une sous suite $f_{i_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ (f_i sont denses dans H).

On remarque que chaque f_{i_k} est une combinaison finie de u_j, donc f est approximé par des sommes finies des u_j. □

Proposition 3.4.4 (Inégalité de Bessel)**.** *Soient H un espace de Hilbert et $\{\varphi_n\}$ une famille orthonormée. Si $f \in H$, alors*
$$\|f\|^2 \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f, \varphi_n >|^2$$

Démonstration. On définit
$$S_k f := \sum_{|n|<k} < f, \varphi_n > \varphi_n, \quad S_k f \in H.$$

$$\begin{aligned}\|S_k f\|^2 &=< \sum_{|n|<k} < f, \varphi_n > \varphi_n, \sum_{|i|<k} < f, \varphi_i > \varphi_i > \\ &= \sum_{|n|<k}\sum_{|i|<k} < f, \varphi_n > \overline{< f, \varphi_i >} < \varphi_n, \varphi_i > \\ &= \sum_{|i|<k} < f, \varphi_i > \overline{< f, \varphi_i >} \\ &= \sum_{|i|<k} | < f, \varphi_i > |^2.\end{aligned}$$

On vérifie que $\|f\|^2 \geq \|S_k f\|^2$, $\forall k$ (en exercice : en remarquant que $S_k f$ est une projection orthogonale de f sur $< \varphi_{-k}, ..., \varphi_k >$). Ainsi, on a :
$$\|f\|^2 \geq \sum | < f, \varphi_n > |^2.$$

□

Définition 3.4.7 (selon Kolmogorov-Fonnin)**.** Une famille orthonormée est fermée si elle vérifie l'égalité de Parseval :
$$\forall f \in H, \quad \|f\|^2 = \sum | < f, \varphi_n > |^2.$$

Theorème 3.4.5. *Une famille orthonormée fermée est équivalente à une base orthonormée.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit $f \in H$,
$$S_k f = \sum_{|n|\leq k} < f, \varphi_n > \varphi_n.$$

Il faut montrer que $\lim_{k\to\infty} S_k f = f$ ou
$$\lim_{k\to\infty} \|f - S_k f\|^2 = 0.$$

On peut écrire f comme
$$f = S_k f + (f - S_k f).$$

Ainsi, on a
$$\begin{aligned}\|f\|^2 &=< S_k f + (f - S_k f), S_k f + (f - S_k f) > \\ &= \|S_k f\|^2 + \|f - S_k\|^2, \\ \|f - S_k\|^2 &= \|f\|^2 - \|S_k f\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{|n|\leq k} | < f, \varphi_n > |^2.\end{aligned}$$

Comme la famille est fermée,
$$\|f\|^2 - \sum_{|n|\leq k} | < f, \varphi_n > |^2 \to 0 \Rightarrow \|f - S_k f\|^2 \to 0$$
$$\Rightarrow \{\varphi_n\} \text{ forment une base.}$$

($\Leftarrow$) Soit $\{\varphi_n\}$ une base orthonormée, $f \in H$. Comme $\{\varphi_n\}$ est une base, soit $u_1, u_2, ..., u_k, ...$ une suite de vecteurs telle que

1) $u_k \to f$ quand $k \to \infty$,
2) $\forall k$, u_k est une combinaison linéarie finie de φ_n.

On a ainsi

$$u_1, u_2, u_3, ... \to f.$$

On peut s'arranger pour que u_k soit une combinaison linéaire de $\varphi_{-k}, ..., \varphi_k$.

$$\|S_k f - f\|^2 \leq \|u_k - f\|^2 \leq \varepsilon.$$

$S_k f$ est la projection orthogonoale. Donc :

$$\|S_k f - f\|^2 \to 0.$$

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = \|S_k f\|^2 + \underbrace{\|S_k f - f\|^2}_{=0} &\Rightarrow \|S_k f\|^2 \to \|f\|^2 \\ &\Rightarrow \|f\|^2 = \sum | < f, \varphi_n > |^2. \end{aligned}$$

□

Définition 3.4.8. Deux espaces X et Y de Hilbert sont isométriques s'il existe une application linéaire inversible

$$T : X \to Y$$

tel que

$$< Tx_1, Tx_2 >_Y = < x_1, x_2 >_X, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Theorème 3.4.6 (Riesz-Fischer). *Soient $\{\varphi_n\}_{n \in I}$ une famille orthonormée et $\{c_i\}$ une suite de nombres complexes tel que $\sum_{i \in I} |c_i|^2 < \infty$ alors il existe un vecteur f tel que*

$$c_i = < f, \varphi_i > \quad et \ \|f\| = \sum_{i \in I} |c_i|^2.$$

Corollaire 3.4.1. *Tout espace de Hilbert (séparable) est isométrique à ℓ_2.*

Démonstration du corollaire 3.4.1. Soit $\{\varphi_n\}$ une base orthonormée de l'espace de Hilbert. Soit :

$$\begin{array}{cccc} T & : & H & \to & \ell_2 \\ & & f & \mapsto & \{< f, \varphi_n >\}_{n \in \mathbb{Z}} \end{array}.$$

On veut montrer que T est injective, c'est-à-dire $\forall n$, $< f, \varphi_n >= 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

$$\|f\|^2 = \sum | < f; \varphi_n > |^2 = 0 \Rightarrow f = 0.$$

La surjectivité de T est dûe au théorème 3.4.6. Reste à montrer que T est une isométrie, on veut donc montrer que

$$\begin{aligned} < f, g > &= < \{f, \varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{< g, \varphi_k >\} >_{\ell_2} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} < f, \varphi_n > \overline{< g, \varphi_n >}. \end{aligned}$$

On pose

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < f, \varphi_n > \varphi_n \quad \text{et} \quad g = \sum n \in \mathbb{Z} < g, \varphi_k > \varphi_k,$$

et donc :

$$\begin{aligned} < \sum < f, \varphi_n > \varphi_n, \sum < g, \varphi_k > \varphi_k > &= \sum_{n,k} < f, \varphi_n > \overline{< g, \varphi_k >} \delta_{nk} \\ &= \sum_n < f, \varphi_n > \overline{< g, \varphi_n >}. \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 3.4.6 de Riesz-Fischer. L'idée est d'écrire

$$f = \sum_{i\in I} c_i \varphi_i. \tag{3.4}$$

On vérifie que (3.4) est bien définie. Soient

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I = \mathbb{Z},$$

avec $I_k = \{-k, ..., k\}$ et on définit :

$$f_k = \sum_{i\in I_k} c_i \varphi_i.$$

Les f_k sont bien définies et on vérifie que $\{f_k\}$ forment une suite de Cuachy dans H.

$$\|f_{k+p} - f_k\|^2 = \sum_{k+p\geq|i|\geq k} c_i \varphi_i. \tag{3.5}$$

Mais

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} |c_i|^2 < \infty.$$

Donc $k \mapsto \sum_{-k}^{k} |c_i|^2$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ on peut faire tendre (3.5) en une quantité aussi petite que l'on veut. □

Définition 3.4.9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe un sous-ensemble discret $\{a_i\} \subset \mathbb{R}$ en dehors duquel f est continue et les limites

$$f(a_i - 0) = \lim_{\varepsilon\nearrow 0} f(a_i + \varepsilon),$$
$$f(a_i + 0) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} f(a_i + \varepsilon)$$

existent.

Définition 3.4.10 ($\mathcal{C}^1$ par morceaux)**.** f définie sur $[a, b]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si $\exists a_0, a_1, ..., a_n$ avec $a = a_0 < a_1 < ... < a_n <= b$ tels que :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \quad f_i = f|_{]a_{i-1}, a_i[}.$$

La restriction de f à $]a_{i-1}, a_i[$ est prolongeable sur $[a_{i-1}, a_i]$ en une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 3.4.4. f est nécessairement continue par morceaux par la définition 3.4.9 mais pas nécassirement continue.

Theorème 3.4.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux ($\Rightarrow$ continue par morceaux). Si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \tag{3.6}$$

alors

$$f(x) = \sum \widehat{f}(n) e^{inx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Theorème 3.4.8. *[Énoncé équivalent au théorème 3.4.7 Sous l'hypothèse* (3.6)

$$\sum \widehat{f}(n) e^{inx} \to \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lemme 3.4.9 (Noyau de Dirichlet)**.**

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) x}{\sin(x/2)}.$$

Démonstration. On peut remarquer que

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-inx} = e^{-iNx}(1 + e^i x + \ldots + e^{i2Nx})/$$

$\square$

Pour démontrer les théorèmes 3.4.7 et 3.4.8, on doit calculer

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\Big((N + \frac{1}{2})t\Big)}{\sin(t/2)} f(x+t) dt, \end{aligned}$$

et ensuite

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Big((N + \frac{1}{2})t\Big)}{\sin(t/2)} f(x+t) dt.$$

On utilise le lemme suivant ;

Lemme 3.4.10. *Soit $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On pose*

$$I(\lambda) = \int_a^b s(t) \sin(\lambda t) dt.$$

Alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = 0.$$

Démonstration. Avant de donner une démonstration de ce lemme, on en donne l'intuition par cette figure :

Ainsi,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin(\lambda t) f(t) dt = 0.$$

Sans perte de généralité, on suppose que s est continue sur $[a, b]$. On note $h : \pi/\lambda$. On veut calculer :

$$I(\lambda) = \int_a^b s(t) \sin(\lambda t) dt.$$

On fait le changement de variable suivant :

$$t = \tau + h, \qquad dt = d\tau.$$

Comme $\sin(\lambda\tau + \pi) = -\sin(\lambda T)$,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b s(t) \sin(\lambda t) dt \\ &= \int_{a-h}^{b-h} s(\tau + h) \sin(\lambda(\tau + h)) d\tau \\ &= -\int_{a-h}^{b-h} s(\tau + h) \sin(\lambda\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$2I(\lambda) = -\int_{a+h}^{a} s(\tau + h) \sin(\lambda\tau) d\tau + \int_a^{b-h} (s(\tau) - s(\tau + h)) \sin(\lambda\tau) d\tau + \int_{b-h}^{b} s(\tau) \sin(\lambda\tau) d\tau.$$

En prenant la limite ($\lambda \to \infty \Rightarrow h \to 0$),

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \int_{a-h}^{a} s(\tau + h) \sin(\lambda\tau) d\tau = 0, \\ \lim_{h\to 0} \int_{b-h}^{b} s(\tau) \sin(\lambda\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

On utilise la continuité de s pour dire que

$$\lim_{h\to 0} s(\tau) - s(\tau + h) = 0.$$

Donc :

$$\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = 0.$$

□

Lemme 3.4.11.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\Big((N + \frac{1}{2})t\Big)}{\sin(t/2)} dt = 1.$$

Démonstration.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

□

Démonstration du théorème 3.4.8. On rapelle qu'il nous faut calculer

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\Big((N + \frac{1}{2})t\Big)}{\sin(t/2)} f(x + t) dt \tag{3.7}$$

On considère la fonction

$$s_+(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2\sin(t/2)} \text{ définie sur } [0, \pi].$$

Elle est continue par morceaux sur $[0, \pi]$ [4]. Par le lemme 3.4.10, s_+ est continue par morceaux sur $[0, \pi]$ donc :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi s_+(t) \sin\Big(\Big(N + \frac{1}{2}\Big)t\Big) dt = 0,$$

et par le lemme 3.4.11,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\big((N+\frac{1}{2})t\big)}{\sin(t/2)} f(x+0) dt = 1$$

Donc :

$$\lim_{N\to\infty} \bigg(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi s_+(t) \sin\Big((N + \frac{1}{2})t\Big) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\big((N+\frac{1}{2})\big)}{\sin(t/2)} f(x+0) dt \bigg) = \frac{1}{2} f(x+0).$$

De la même façon,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin\big((N+\frac{1}{2})t\big)}{\sin(t/2)} f(x+t) dt = \frac{f(x+0)}{2}.$$

Conclusion,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{inx} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big((N+\frac{1}{2})t\big)}{\sin(t/2)} f(x+t) dt \\ &= \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.4.2. *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a convergence ponctuelle :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} = f(x), \qquad \forall x.$$

Theorème 3.4.12. *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique de période 2π, la série de Fourier converge de façon absolue et uniforme.*

Remarque 3.4.5. $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$:

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(n) &= \Big[\frac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -inf(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= in\widehat{f}(n). \end{aligned}$$

[4] Pour $t > 0$, évident. Pour $t = 0$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \frac{t}{2\sin(t/2)} \text{ existe !}$$

Remarque 3.4.6.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} n^2\left|\widehat{f}(n)\right|^2 &= \sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f'}(n)\right|^2\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(n)|^2 dn = \|f'\|_2^2.\end{aligned}$$

Démonstration. Il faut estimer :

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |S_M f(x) - S_N f(x)|. \tag{3.8}$$

On a pour $M > N$

$$S_M f(x) - S_N f(x) = \sum_{n=-M}^{-N-1} \widehat{f}(n)e^{inx} + \sum_{m=N+1}^{M} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=-M}^{-N-1} \widehat{f}(n)e^{inx}\right| &\leq \sum_{n=-M}^{-N-1} |\widehat{f}(n)|\\ &= \sum_{n=-M}^{-N-1} \frac{1}{n}\Big(n|\widehat{f}(n)|\Big)\\ &\leq \Big(\sum_{n=-M}^{-N-1}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=-M}^{-N-1} n^2|\widehat{f}(n)|^2\Big)^{1/2}\\ &\leq \Big(\sum_{n=-M}^{-N-1}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}\|f'\|_2\end{aligned} \tag{3.9}$$

On a convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ donc comme l'estimation (3.9) ne dépend pas de x,

(3.8) : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists R$ tel que si $M, N > R,\qquad |S_M f(x) - S_N f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [-\pi,\pi].$

□

Corollaire 3.4.3. *Si f est périodique de période 2π :*

$$S_N f \to f \ \textit{dans}\ L_2.$$

Démonstration. Convergence uniforme ⇒ convergence dans L_2. En effet, si f_n tend vers f uniformément :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_n - f|^2 dx \leq \max|f_n - f|^2 \to 0.$$

□

Remarque 3.4.7. $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{inx}$ est une combinaison linéaire de $\{e^{-iNx}, .., e^{iNX}\}$.

Corollaire 3.4.4. *L'espace des fonctions dans L_2 qui peuvent être approximés par des combinaisons liires de e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, contient l'espace $\mathcal{C}^1 \subset L_2$ ($\mathcal{C}^1 \subset L_2$ sous-espace vectoriel).*

Remarque 3.4.8. Le plus petit sous-espace fermé dans L_2 qui contient $\mathcal{C}^1$ est L_2 (on dit que $\mathcal{C}^1$ est dens dans L_2), c'est-à-dire que tout élément de L_2 peut être approximé (dans L_2) par une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^1 \subset L_2$.

Démonstration du théorème 3.4.2. À partir des remarques précédentes, on peut affirmer que e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de L_2. □

Exemple 3.4.5. Soit $K_n \in \mathcal{C}^1$ tel que

1. $K_n \geq 0$,
2. $\int K_n dx = 1$,
3. $K_n \equiv 0$ sur $[-\infty, -1/n]$ et $[1/n, +\infty[$.

Si $f \in L_2$,

1. $K_n * f$ est $\mathcal{C}^1$,
2. $K_n * f \to f$ dans L_2.

Ainsi $\mathcal{C}^1$ est dens dans L_2.