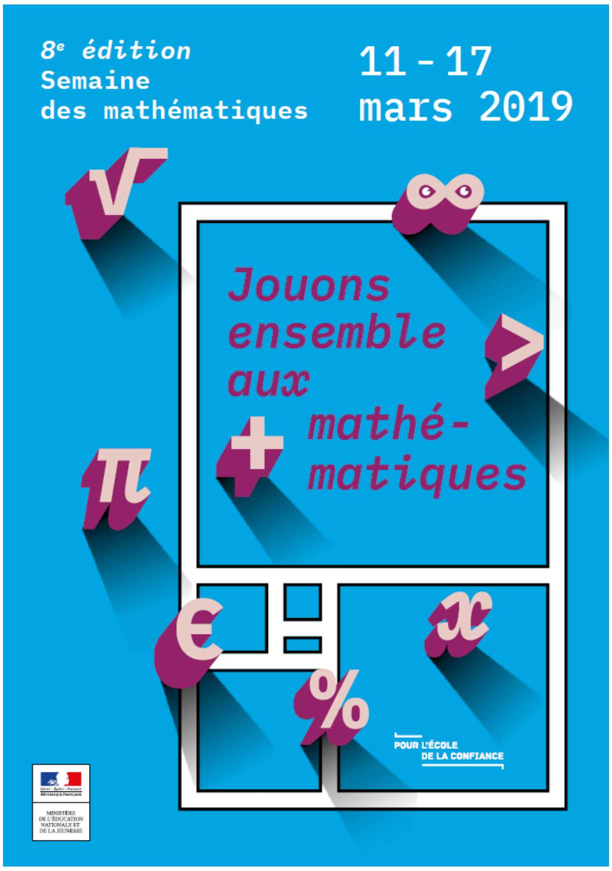
SEMAINE DES MATHÉMATIQUES 2019

Jouons ensemble aux mathématiques

2 - Temple Run 2

Clément Boulonne

Mardi 12 mars 2019



Résumé

Jeux... Mathématiques... Aujourd'hui, j'ai joué à mon jeu préféré sur téléphone mobile : « Temple Run 2 ». Le but du jeu est de courir pour échapper à un monstre dont on lui a volé une idole dans son antre. Courir, courir et éviter les obstacles qui sont devant vous : précipices, rochers, piques, cascade d'eau...

Dans cet article, nous allons nous intéresser à quelques aspects du jeu et inventer quelques problèmes mathématiques autour de ceux-ci.

1 Calcul de vitesse de course

1.1 sur 10 000 mètres

L'objectif du jour s'affiche dans le menu et m'indique que je dois courir 10 000 mètres avant ce soir. 10000 mètres ou 10 kilomètres !!!!

Pour un marcheur aguerri (comme moi [1]) qui marcherait à une vitesse de 6,5 km/h, les 10 km pourraient se fait en :

1. sérieusement !

Distance (en km)	6,5	10
Temps (en h)	1	t

$$6{,}5 \times t = 10 \times 1 \Leftrightarrow t = \frac{10}{6{,}5} \approx 1{,}53 \text{ h.}$$

1,53 heures !! Heu non, pardon, 1 heure, 31 minutes et 48 secondes environ. 1 heures 30 de marche donc. Il faudrait donc 1 heures 30 de jeu pour terminer les 10 kilomètres pour l'objectif journalier [2].

Sauf que dans « Temple Run 2 », on court ! Donc la vitesse est doublée par rapport à la marche « sportive » [3]. Mais plus, on peut courir une distance de 10 000 mètres en moins de 6 minutes.

La question qu'on peut se poser est donc : « En combien de temps je vais pouvoir atteindre l'objectif journalier qui est de courir 10 000 mètres ? ».

Faisons quelques mesures dans le jeu (sur l'environnement « Sky Summit » avec le personnage « Guy Dangerous ») :

- Les premiers 1 000 mètres se font en 45 secondes ;
- ensuite, chaque kilomètre se fait en 30 secondes.

Si on fait un rapide calcul, on obtient :

$$t_{10\ 000} = 45 + 9 \times 30 = 315 \text{ secondes}$$

soit 5 minutes et 15 secondes.

La vitesse du jeu moyen (en m/s) pour faire 10 000 mètres est donc :

$$V = \frac{D}{T} = \frac{10000}{315} \approx 31{,}75,$$

ce qui nous fait du :

$$\frac{31{,}75 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{31{,}75 \times 1000}{1 \times 3600} = \frac{31750}{3600} = 8{,}81 \text{ km/h},$$

et cela correspond à une vitesse conseillée pour un footing « tout doux » [4].

Remarque 1.1 (Boost de vitesse)**.** Le temps de parcours a été calculé sans prendre en compte les boosts de vitesse disséminés tout au long du parcours. Le boost de vitesse accélère d'un facteur 2 le jeu pendant 500 mètres.

Remarque 1.2 (Trébuchements)**.** Tout au long du parcours, des obstacles se dressent devant nous. Si on touche un des obstacles (exceptés ravins, cascade et piques), on trébuche. Quand on trébuche, notre vitesse est réinitialisée et le monstre qui nous poursuit apparaît à l'écran pour nous réduire la visibilité du parcours. Si on trébuche une seconde fois alors que le monstre est toujours à l'écran, il nous attrape pour nous dévorer (ce qui sonne la fin de la partie).

1.2 Généralisation

Dans cette sous-section, on ne prend pas en compte les boosts de vitesse et les trébuchements.

On voit ici que, si on augmente la lognueur du parcours, la vitesse moyenne n'est pas constante. Cela vient du fait que la première partie de course (les 1 000 premiers mètres) se parcourent en un temps plus long que les autres parties.

Si on voulait modéliser cette situation pour calculer la vitesse moyenne pour un parcours de x mètres, on utilise ce que l'on appelle une fonction *définie par morceaux*. On va tout d'abord définir la fonction T qui donne le temps de parcours (en minutes) en fonction de la distance x (en kilomètres) parcourue pendant la partie. On s'intéresse tout d'abord au temps mis pour parcourir une section de 1000 mètres après les 1000 premiers mètres.

2. si on complète l'objectif journalier, on peut avoir des récompenses en pièces d'or et en gemmes.
3. que je pratique quasi quotidiennement !
4. Source : https://www.ouest-france.fr/sport/running/quelle-allure-faut-il-vraiment-faire-son-footing-4863411

1.2.1 Après 1 000 mètres

Après 1000 mètres, si l'on ne trébuche pas et si on ne prend pas de boosts de vitesse, nous courons à vitesse constante. Ainsi, on parcourt 1000 mètres en 30 secondes et pour rappel, on a parcouru les 1000 premiers mètres en 45 secondes (c'est-à-dire en 0,75 minute).

Cela correspond à une fonction affine f telle que :

$$f(1) = 0{,}75 \quad \text{et} \quad f(2) = 0{,}75 + 0{,}5 = 1{,}25.$$

On cherche donc les coefficients a et b tels que $f(x) = ax + b$ sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. Soit on résout le système d'équations suivant d'inconnues a et b.

$$\begin{cases} a + b = 0{,}75 \\ 2a + b = 1{,}25 \end{cases}$$

ou soit [5], on utilise les propriétés sur les fonctions affines.

Propriété 1.3. *On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de ce plan. La droite passant par les points A et B est la courbe représentative d'une fonction affine f telle que :*

$$f(x) = ax + b$$

avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \quad \text{et} \quad b = y_A - ax_A = y_B - ax_B$$

On a ainsi :

$$a = \frac{1{,}25 - 0{,}75}{2 - 1} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

et :

$$b = 1{,}25 - 2 \times 0{,}5 = 1{,}25 - 1 = 0{,}25$$

Conclusion :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \quad \text{sur } [1\,;+\infty[.$$

1.2.2 Les 1 000 premiers mètres

Pour modéliser la situation sur les 1 000 premiers mètres par une fonction, il nous faut d'autres mesures :

— on parcourt les 750 premiers mètres à vitesse constante en 11 secondes ;

— on parcourt les 250 mètres suivants en 9 secondes.

Si l'on fait l'addition des temps sur les trançons de 250 mètres, on obtient bien :

$$t_{1000} = 3 \times 11 + 9 = 33 + 9 = 45 \text{ s},$$

ce qui valide notre temps mesuré lors des premières mesures.

On va devoir découper l'intervalle $[0\,;1]$ en deux : sur $[0\,;0{,}75]$, on court à une vitesse constante donc la fonction qui modélise le temps de parcours en fonction de la distance parcourue est une fonction affine et sur $[0{,}75; 1]$, on a une accélération de la vitesse donc une autre modélisation est à prévoir.

1. Sur l'intervalle $[0; 0{,}75]$, la fonction qui modélise le temps de parcours en fonction de la distance parcourue est une fonction affine, elle est même linéaire car sa courbe représentative (qui est une droite) passe par le point $(0{,}0)$. On peut ainsi déterminer le coefficient de la fonction (si on remarque que la courbe représentative passe par le point [6] $(0{,}75; 0{,}55)$:

$$a = \frac{0{,}55}{0{,}75} = \frac{55}{75} = \frac{11}{15}.$$

5. et c'est ce choix que l'on va faire !
6. $\frac{33}{60} = 0{,}55$

2. ★★★ Sur l'intervalle $[0{,}75; 1]$, on va procéder à un raccordement $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire que la dérivée de la fonction raccordement coïncident au point d'abscisse $x = 0{,}75$ et $x = 1$. Soit f un tel raccordement sur $[0{,}75; 1]$, f doit avoir les contraintes suivantes :

$$f(0{,}75) = 0{,}55 \ ; \ f(1) = 0{,}75 \ ; \ f'(0{,}75) = \frac{11}{15} \ ; \ f'(1) = 0{,}5$$

Si on veut modéliser cette fonction par un polynôme, celui-ci doit avoir un degré minimal de 3. Il faudrait donc déterminer a, b, c et d tels que :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

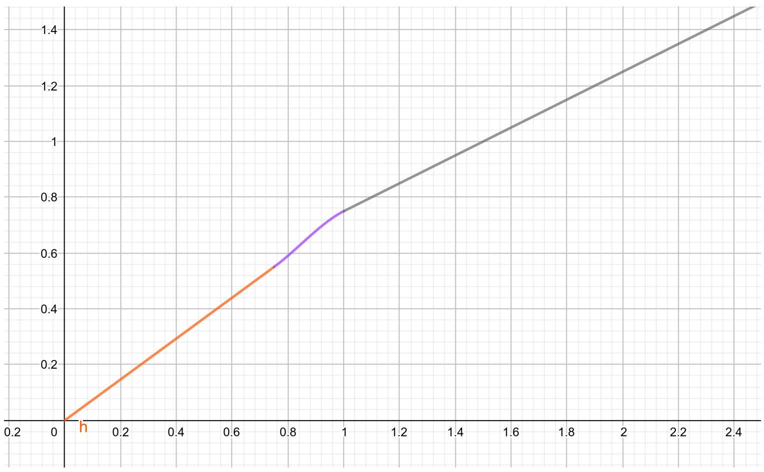
avec :

$$\begin{cases} a \times 0{,}75^3 + b \times 0{,}75^2 + c \times 0{,}75 + d = 0{,}55 \\ a \times 1^3 + b \times 1^2 + c \times 1 + d = 0{,}75 \\ 3a \times 0{,}75^2 + 2b \times 0{,}75 + c = \frac{11}{15} \\ 3a \times 1^2 + 2b \times 1 + c = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}421875a + 0{,}5625b + 0{,}75c + d = 0{,}55 \\ a + b + c + d = 0{,}75 \\ 1{,}6875a + 1{,}5b + c = \frac{11}{15} \\ 3a + 2b + c = 0{,}5 \end{cases}$$

On résout ce système d'équations sur `WolframAlpha`[7], on trouve les solutions :

$$a = -\frac{88}{15} \ ; \ b = \frac{224}{15} \ ; \ c = -\frac{353}{30} \ ; \ d = \frac{69}{20}$$

Graphiquement, on a une courbe de cette allure-là :



ce qui est très satisfaisant !

1.2.3 Vitesse moyenne, généralisation sur $[1\,;+\infty[$

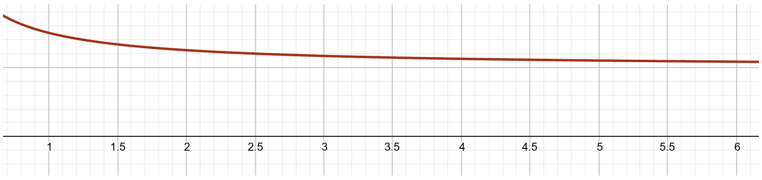
On s'intéresse à l'évolution de la vitesse moyenne tout au long du parcours de notre fugitif et plus particulièrement, après qu'il ait fait 1000 mètres. La fonction représentant le temps mis par rapport à la distance parcourue n'est pas une fonction linéaire (c'est-à-dire, la droite représentative de cette fonction ne passe pas par l'origine du repère).

Soit $x \in [1\,;+\infty[$, la vitesse moyenne est le coefficient directeur de la droite passant par l'origine du repère et par le point sur la représentation graphique de $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. On a ainsi :

$$V_M(x) = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}.$$

La courbe représentative[8] de la fonction V_M sur $[1\,;+\infty[$ est la suivante :

7. `WolframAlpha` : https://www.wolframalpha.com/
8. C'est une hyperbole !



Une brève étude de fonction nous montre que la fonction [9] V_M est décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et que [10] :

$$L = \lim_{x \to +\infty} V_M(x) = \frac{1}{2}.$$

Du coup, la vitesse moyenne, après 1000 mètres de course, décroit tout au long du parcours pour se stabiliser (sur le long terme) à 0,5 km/min. La différentielle de vitesse moyenne est de :

$$V_M(1) - L = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Voilà ! Maintenant, vous savez tout sur comment a été programmé la vitesse de course du fugitif dans Temple Run 2.

2 Vais-je avoir le coffre au trésor ?

2.1 La problématique

Le coureur peut ramasser des coffres au trésor tout au long de sa course. Ces coffres sont à une hauteur h du sol. On peut faire 25 sauts en 1000 mètres de course (donc un saut mesure 40 mètres). Le saut décrit une courbe parfaitement parabolique et symétrique (c'est-à-dire que la trajectoire atteint son maximum [11] 20 mètres après le début du saut) et le coureur attrape le coffre s'il atteint 60% de la hauteur maximale du saut.

Imaginons que, dans une course aléatoirement générée, le premier coffre apparaît à 1000 mètres du départ. À quelle distance minimale du départ doit-il commencer son saut pour être sûr d'atteindre celui-ci ?

(solution page suivante)

9. on étudiera soigneusement le signe de la fonction dérivée $V_M'(x) = -\dfrac{4}{(4x)^2} = -\dfrac{1}{16x^2}$ sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

10. du fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4x} = 0$

11. le maximum de la trajectoire du saut correspond à la hauteur h du coffre

2.2 Modélisation du saut

Dans l'énoncé, il est marqué que chaque saut mesure 40 mètres et que la trajectoire du saut est parfaitement parabolique. Donc elle peut être modélisée par une fonction du second degré du type :

$$S(x) = ax^2 + bx + c.$$

Le coureur est au niveau du sol à d_0 mètres et atterrit de nouveau sur le sol à $d_0 + 40$ mètres. De plus, la trajectoire de la parabole atteint son maximum h en $d_0 + 20$. On a donc trois images de la fonction S :

$$\begin{cases} S(d_0) = 0 \\ S(d_0 + 20) = h \\ S(d_0 + 40) = 0 \end{cases}$$

Pour que la modélisation soit cohérente, on peut noter S_{d_0} la fonction définie sur $[d_0; d_0 + 40]$ telle que :

$$\begin{cases} S(d_0) = 0 \\ S(d_0 + 20) = h \\ S(d_0 + 40) = 0 \end{cases}$$

On peut fixer la valeur $d_0 = 0$ en remarquant que la trajectoire du saut en un instant d_0 quelconque peut se déduire d'une translation de la trajectoire du saut en l'instant 0. Soit donc à interpoler la fonction suivante :

$$\begin{cases} S_0(0) = 0 \\ S_0(20) = h \\ S_0(40) = 0 \end{cases}$$

Les racines du polynôme S_0 se situent en $d_1 = 0$ et $d_2 = 40$ donc le polynôme s'écrit de la forme :

$$S_0(d) = \alpha d(d - 40).$$

On cherche donc α tel que $S_0(20) = h$. On a :

$$S_0(20) = h \Leftrightarrow \alpha \times 20 \times (-20) = h \Leftrightarrow -400\alpha = h \Leftrightarrow \alpha = -\frac{h}{400}.$$

Ainsi :

$$S_0(d) = -\frac{h}{400} \times d \times (d - 40).$$

et les translatées horizontales (pour $d_0 > 0$) sont de la forme :

$$S_{d_0}(d) = -\frac{h}{400} \times (d - d_0) \times (d - d_0 - 40).$$

Sur la figure 1, on a tracé les courbes représentatives des fonctions S_0, S_{10}, S_{20} et S_{30}.

2.3 Résolution

On cherche donc d tel que $S_0(d) \geq \frac{60}{100}h$. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} S_0(d) = \frac{60}{100}h &\Leftrightarrow -\frac{h}{400}d(d-40) = \frac{60h}{100} \Leftrightarrow -\frac{h}{400}d^2 + \frac{40h}{400}d - \frac{60}{100}h = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{h}{400}d^2 + \frac{-h}{400}(-40d) + \frac{-h}{400} \times 240 = 0 \Leftrightarrow -\frac{h}{400}(d^2 - 40d + 240) = 0 \end{aligned}$$

$-\frac{h}{400}$ étant différent de 0, on se retrouve à résoudre l'équation suivante :

$$d^2 - 40d + 240 = 0$$

Figure 1 – Courbes représentatives de S_0, S_{10}, S_{20} et S_{30}

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-40)^2 - 4 \times 240 = 1600 - 960 = 640 \geq 0$$

On a donc deux solutions à l'équation :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{640} = \sqrt{8 \times 8 \times 10} = 8\sqrt{10}.$$

$$d_1 = \frac{40 - 8\sqrt{10}}{2} = 20 - 4\sqrt{10} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{40 + 8\sqrt{10}}{2} = 20 + 4\sqrt{10}.$$

Ainsi, entre la position $d_1 = 20 - 4\sqrt{10}$ et $d_2 = 20 + 4\sqrt{10}$, le coureur peut rattraper le coffre.

2.4 Conclusion finale

Pour trouver la distance d_0 tel que $d_0 + (20 - 4\sqrt{10}) = 1000$. Soit :

$$d_0 + (20 - 4\sqrt{10} = 1000 \Leftrightarrow d_0 = 1000 - 20 + 4\sqrt{10} \Leftrightarrow d_0 = 980 + 4\sqrt{10} \approx 992{,}65 \text{ mètres.}$$

Ainsi, le point $(1000; 1{,}2)$ appartient à la courbe représentative de la fonction $S_{992{,}645}$ (voir figure 2), il faudra donc sauter au maximum à 992,65 mètres après la ligne de départ pour pouvoir obtenir le coffre qui se situe à 1000 mètres du départ.

3 Achat du bonus « Vitesse »

3.1 Le problème

Quand on ramasse des coffres au trésor, on peut collecter des objets tels que des masques ou des reliques.

Un masque nous rapporte 3 gemmes et une relique (plus rare) 7 gemmes. Avec 25 gemmes, il peut s'acheter le bonus « Vitesse » qui lui permettra, s'il ramasse un nombre de pièces suffisant pendant la course, courir 2 fois plus vite sur une distance de 250 mètres.

Combien lui faut-il ramasser de masques et de reliques (au minimum) pour obtenir le bonus « Vitesse » ?

(suite à la page suivante)

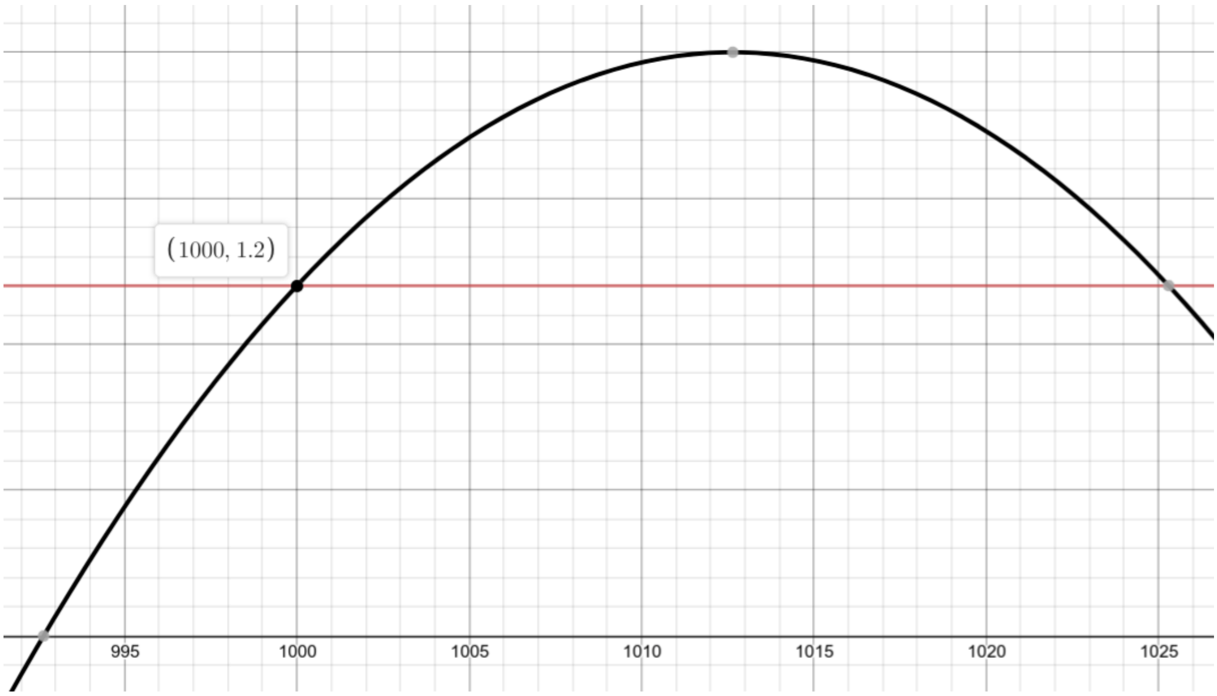


FIGURE 2 – Courbe représentative de $S_{992,645}$

3.2 Rappel de cours

Vous avez sûrement répondu qu'il fallait au minimum une relique et 6 masques car $7 + 6 \times 3 = 18 + 7 = 25$. Très bien ! Mais avez-vous démontrer le résultat par une résolution d'une équation *diophantienne* ?

Définition 3.1 (Équation diophantienne)**.** Soient a, b et c trois nombres entiers relatifs. Résoudre une *équation diophantienne*, c'est déterminer tous les nombres entiers relatifs x et y qui vérifient :

$$ax + by = c.$$

Pour résoudre de tels équations, nous allons utiliser les résultats suivants (sans chercher à les démontrer [12]) :

Théorème 3.2 (Théorème de Bézout)**.** *L'équation $ax = by = 1$ (avec a et b deux entiers relatifs) admet des solutions entières si et seulement si* $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ *(c'est-à-dire si a et b sont premiers entre eux).*

Proposition 3.3. *Si (x,y) sont solutions de l'équation $ax + by = 1$ alors (dx,dy) sont solutions de $ax + by = d$.*

Lemme 3.4 (Lemme de Gauss)**.** *Si un nombre entier a divise bc (b et c deux nombres entiers) et si* $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ *(c'est-à-dire si a et b sont premiers entre eux), alors a divise c.*

3.3 La résolution du problème

Pour résoudre le problème, il faut résoudre l'équation diophantienne d'inconnues m et r suivante :

$$3m + 7r = 25 \qquad (E)$$

avec m le nombre de masques ramassés et r le nombre de reliques. En plus, il faut trouver m et r positifs [13]

12. Pour les lecteurs en soif de démonstration, vous pouvez vous reporter sur des documents numériques.
13. en réalité, on ne peut pas ramasser un nombre négatif d'objets.

On remarque tout d'abord que PGCD(3,7) = 1 donc l'équation :

$$3m + 7r = 1 \tag{E_1}$$

a des solutions entières (d'après le théorème de Bézout). Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide inversée :

$$\begin{aligned} 7 &= 3 \times 2 + 1 \\ 1 &= 7 - 3 \times 2 \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (E_1) est :

$$m_0 = -2 \quad \text{et} \quad r_0 = 1.$$

On peut déduire une solution particulière de (E) en considérant $m_1 = 25m_0 = -50$ et $r_1 = 25r_0 = 25$. On a alors :

$$3 \times (-50) + 7 \times 25 = 25. \tag{E_0}$$

On peut alors combiner l'équation (E_0) avec (E) comme suivant :

$$\begin{aligned} -3 \times 50 + 7 \times 25 - (3m + 7r) = (25 - 25) &\Leftrightarrow -(3 \times 50 - 7 \times 25 + 3m + 7r) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \times 50 + 3m + 7r - 7 \times 25 = 0 \Leftrightarrow 3(m + 50) + 7(r - 25) = 0. \end{aligned}$$

En passant $+7(r - 25)$ « de l'autre côté du signe = », on obtient :

$$3(m + 50) = -7(r - 25).$$

On utilise ensuite deux fois le lemme de Gauss comme suit :
- 3 divise $-7(r - 25)$ et PGCD$(3, -7)$ = PGCD(3,7) = 1 donc 3 divise $(r - 25)$. Il existe donc un entier relatif k tel que $3k = r - 25$, c'est-à-dire $r = 3k + 25$.
- -7 divise $3(m + 50)$ et PGCD$(3, -7) = 1$, donc -7 divise $(m + 50)$. Il existe donc un entier relatif k tel que $-7k = m + 50$, c'est-à-dire $m = -7k - 50$.

Ainsi les solutions de l'équation diophantienne (E) sont :

$$\{k \in \mathbb{Z},\ m = -7k - 50 \quad \text{et} \quad r = 3k + 25.\}$$

On cherche maintenant les solutions simultanément positives, c'est-à-dire les entiers relatifs k vérifiant :

$$\begin{cases} 3k + 25 \geq 0 \\ -7k + -50 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k \geq 25 \\ -7k \geq 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{-25}{3} \\ k \leq \frac{50}{-7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{25}{3} \\ k \leq -\frac{50}{7} \end{cases}.$$

En combinant les deux inéquations et en remarquant que :

$$-\frac{25}{3} \approx -8{,}33 \quad \text{et} \quad -\frac{50}{7} \approx -7{,}14,$$

on obtient :

$$-8{,}33 \leq k \leq -7{,}14.$$

Ainsi il existe une solution entière simultanément positive pour $k = -8$. On a donc :

$$r = 3 \times -8 + 25 = 1 \quad \text{et} \quad m = -7 \times -8 - 50 = 56 - 50 = 6.$$

Il faut donc ramasser une relique et six masques au minimum pour obtenir le bonus Vitesse.