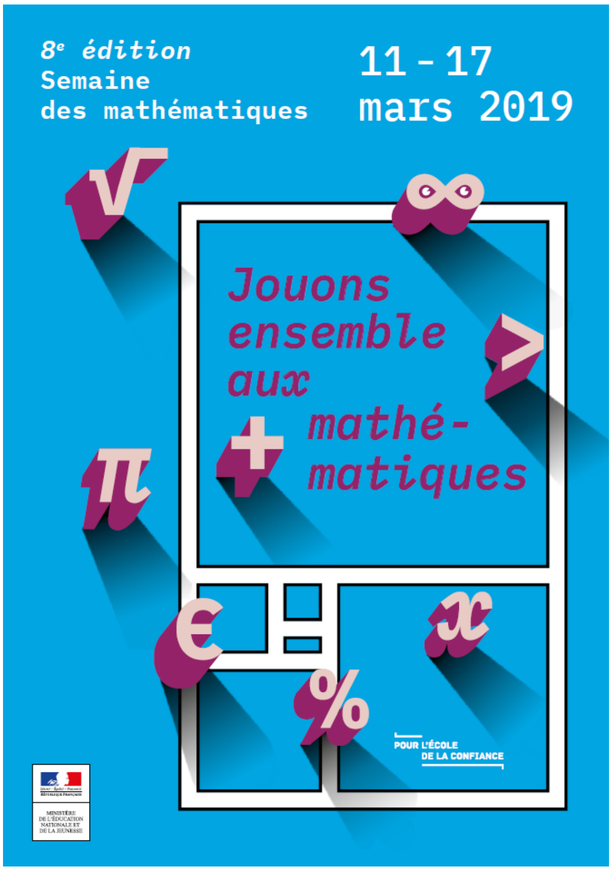
SEMAINE DES MATHÉMATIQUES 2019

Jouons ensemble aux mathématiques

5 - Rebond de billard

Clément Boulonne

Vendredi 15 mars 2019



Résumé

C'est le dernier article de la Semaine des Mathématiques 2019. Déjà ! Nous avons vu différents types de jeux : dés, jeux de cartes, jeux vidéo, jeux de poursuite, jeux de stratégie et de hasard. On va s'intéresser dans ce dernier article à un jeu bien connu qui lie précision et stratégie, le billard.

Nous avons vu aussi que ces jeux peuvent être reliés à différentes facettes des mathématiques : probabilités, modélisation de fonctions, équations diophantiennes, géométrie, comptabilité...

Dans cet article, nous allons aborder un problème de trajectoire au billard. Ici, nous allons utiliser la géométrie analytique, c'est-à-dire la géométrie dans un plan muni d'un repère orthonormé et quelques outils vus au collège (symétrie) et au lycée (produit scalaire, norme) pour le résoudre.

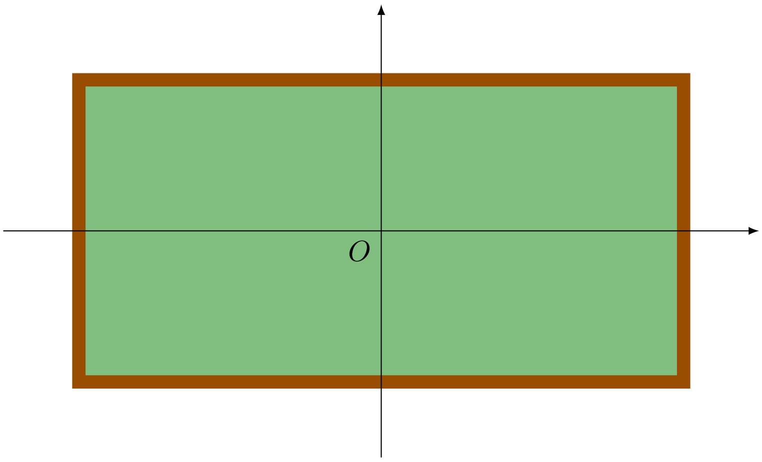
1 Contexte

1.1 Modélisation de la table de billard

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on considère un rectangle centré en l'origine O du repère de longueur en abscisse 8 et de largeur en ordonnées 4.

Ce rectangle modélise la table de billard. Les bordures de table sont représentés par les droites d'équation « $x = -4$ » ; « $x = 4$ » ; « $y = -2$ » ; « $y = 2$ ». Ainsi, l'ensemble de points appartenant au billard est l'ensemble :

$$B = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \ -4 \leq x \leq 4 \quad \text{et} \quad -2 \leq y \leq 2 \right\}.$$

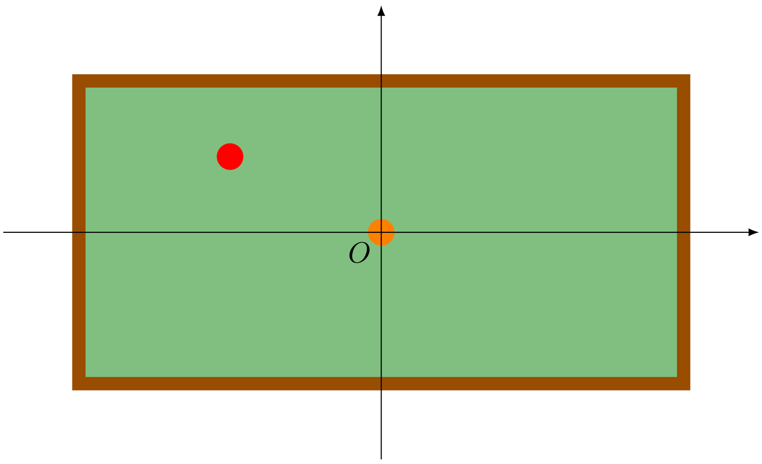


1.2 Position des boules au départ

On place :

— une boule orange à l'origine O du repère, c'est la boule que l'on va frapper avec la queue de billard ;

— une boule rouge dont la position sur la table sera désignée par le point R. Les coordonnées du point R seront notées $(\alpha; \beta)$ (au moins pour le cas général) avec [1] $-4 < \alpha < 4$ et $-2 < \beta < 2$.

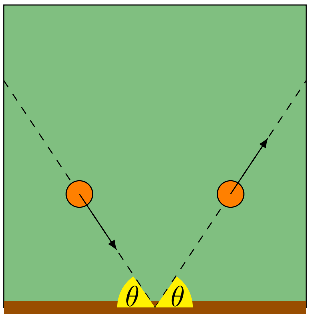


1.3 Rebond sur le bord

La boule orange (mais aussi la boule rouge) peut rebondir sur l'un des quatre bords de la table. Si on note θ l'angle entre le rebord et la trajectoire de la boule un court instant pendant qu'elle tape sur le bord alors la boule repart avec le même angle θ du bord.

Un dessin vaut mieux qu'un long discours !

1. inégalité strict car on ne veut pas que la boule rouge soit au bord de la table.



1.4 Boule touchée

Pour faciliter le problème, on dira que les deux boules se rencontrent si et seulement si la trajectoire de l'une rencontre exactement la position de l'autre.

Ainsi, si la boule rouge est placée en coordonnées (α,β) (avec $-4 < \alpha < 4$ et $-2 < \beta < 2$), la boule orange rencontre (et impacte) la boule rouge si et seulement si le point de coordonnées (α,β) appartient à la trajectoire [2] de la boule orange.

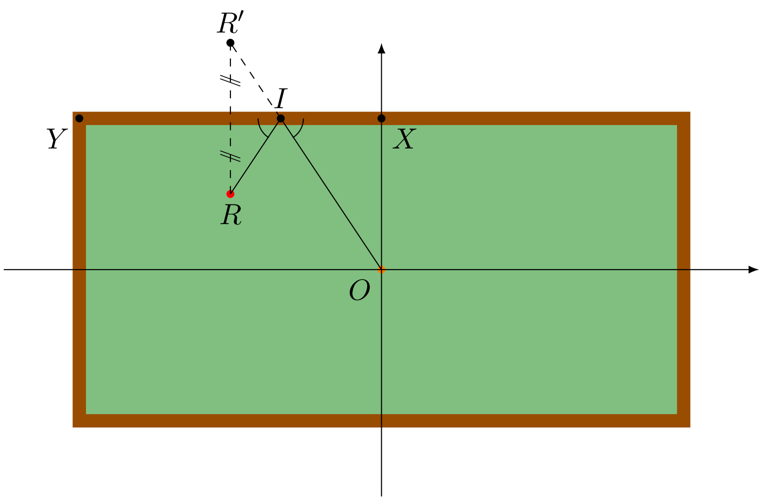
1.5 Le problème

Avec les conditions initiales données, comment faut-il frapper la boule orange pour qu'elle fasse un rebond sur un des quatre bords du billard et qu'elle impacte la balle rouge ? Pour ce faire, on va noter I le point de rencontre de la boule orange sur l'un des rebords du billard et on va calculer les coordonnées du point I et la mesure de l'angle $\widehat{OIR}$ en degrés (qu'on appelera *angle de tir* tout au long de cet article).

1.6 Une construction géométrique de la solution

Vous avez peut-être réfléchi à comment obtenir à coup sûr cette trajectoire. En fait, le problème est assez simple, sa construction géométrique peut se faire par des élèves en classe de collège.

Plaçons un point R au hasard sur le billard et on veut que la boule orange rebondisse sur le rebord caractérisé par la droite $(\mathcal{D})$ d'équation cartésienne « $y = 2$ ». Pour obtenir la première partie de la trajectoire, on va construire le point R' symétrique du point R par rapport à $(\mathcal{D})$. La droite (OR') intersecte $(\mathcal{D})$ au point I. On a plus qu'à tracer les segments $[OI]$ et $[IR]$, l'angle $\widehat{OIR}$ est ainsi formé.



Démonstration. On utilise les propriétés de symétrie sur les mesures d'angles. R' étant le symétrique de R par rapport à la droite $(\mathcal{D})$, l'angle $\widehat{RIY}$ a même mesure que l'angle $\widehat{R'IY}$. On a ensuite tracer

2. on peut considérer une trajectoire comme une ligne brisée par les rebors du billard

la droite $(R'O)$ puis placer le point I intersection des droites $(\mathcal{D})$ et $(R'O)$. Les angles $\widehat{R'IY}$ et $\widehat{XIO}$ sont opposés par le sommet et donc de même mesure. Ainsi :

$$\widehat{RIY} = \widehat{R'IY} = \widehat{XIO}.$$

□

Remarque 1.1. Il faut aussi considérer les cas des autres bords [3]. Ce sera fait dans la résolution. Pour ce qui est de la construction géométrique de la résolution du problème, la construction est exactement le même sauf qu'il faut considérer la symétrie d'axe « $y = -2$ » (bord Sud), « $x = -4$ » (bord Ouest), « $x = 4$ (bord Est).

Remarque 1.2. Il se peut que si l'on place mal les deux boules, la seule possibilité est d'abord toucher la boule rouge puis de faire le rebond, ce qui n'est pas demandé dans le problème. C'est le cas quand l'angle de tir est de 0 degrés ou quand le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IR}$ est égal au produit des normes des deux vecteurs précédemments cités [4].

Nous allons maintenant calculer la mesure de cet angle, dans un premier temps, sur une application numérique (en fixant les coordonnées du point R) puis dans la cas général.

2 Une application numérique

Avant d'aborder l'application numérique, on rappelle quelques résultats

2.1 Préliminaires sur le produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un vecteur dans le plan [5] noté $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.1 (Norme d'un vecteur)**.** Si on munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la *norme* du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ est donnée par la formule :

$$\vec{u} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La norme représente la « longueur » du vecteur.

Définition 2.2 (Produit scalaire de deux vecteurs)**.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$, le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par la formule suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Propriété 2.3. *Dans un repère orthonormé, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coorodnnées respectives $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ alors le produit scalaire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut s'exprimer de la manière suivante :*

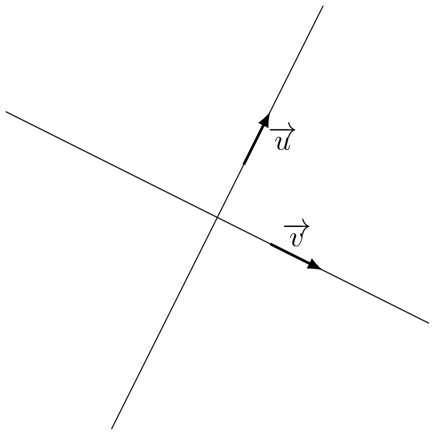
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

On ne rentrera pas dans les détails des propriétés du produit scalaire. On va plutôt décrire comment on peut définir des mesures d'angles avec le produit scalaire.

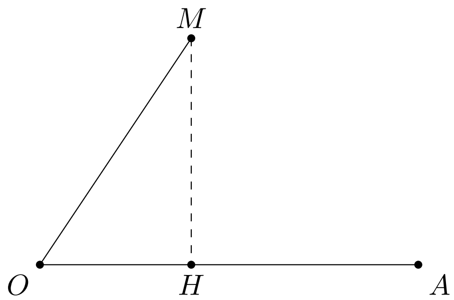
Définition 2.4. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si l'un des deux vecteurs est le vecteur nul ou si $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ alors (OA) et (OB) sont deux droites perpendiculaires.

Propriété 2.5. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

3. ici, on n'a traité que le cas « bord Nord »
4. La formule qui lie le cosinus de l'angle formé par deux vecteurs de même origine, les normes de ces deux vecteurs et le produit scalaire sera rappelée dans la section suivante.
5. c'est suffisant pour notre étude !



Définition 2.6. Soit D un droite et M un point du plan. Le *projeté orthogonal* du point M est le point d'intersection H de la droite D et de la perpendiculaire à D passant par M.



Propriété 2.7. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts du vecteur nul tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).*

Remarque 2.8. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts du vecteur nul tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

1. Si $\widehat{AOB}$ est aigu alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$.
2. Si $\widehat{AOB}$ est droit alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.
3. Si $\widehat{AOB}$ est obtus alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$.

Propriété 2.9. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts du vecteur nul :*

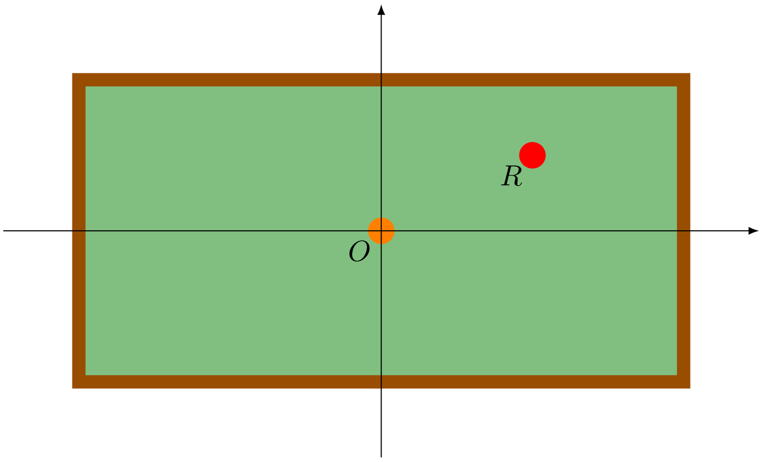
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u};\vec{v})})$$

où $\widehat{(\vec{u};\vec{v})}$ est l'angle orienté formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On utilisera cette propriété en particulier pour calculer une mesure d'angle dans un repère orthonormé.

2.2 Contexte

On fixe les coordonnées de $R(\alpha;\beta)$ pour une application numérique. On prendra $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. On étudie les différents cas de rebond.



2.3 Bord Nord

1. On cherche les coordonnées du point R' symétrique du point R par rapport à la droite (B_N) d'équation cartésienne « $y = 2$ ». La droite (B_N) étant horizontale, l'abscisse du point R' est égale à l'abscisse du point R, c'est-à-dire 2. On considère la droite (RR') (verticale cette fois-ci) et J l'intersection de (RR') avec (B_N). Comme R' est le symétrique de R par rapport à l'axe (B_N), on a : $RJ = JR'$ c'est-à-dire :

$$\sqrt{(2-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow |x-2| = 1$$

Les solutions de l'équations sont $y = 3$ et $y = 1$. Or si $y = 1$, on se retrouve avec les coordonnées R. Ainsi les coordonnées de R' sont $(2; 3)$.

2. On cherche ensuite l'équation de droite passant par les points O et R. La droite passant par l'origine du repère, son ordonnée à l'origine est 0. Donc le coefficient directeur de la droite est :

$$a = \frac{y_{R'} - y_O}{x_{R'} - x_O} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi : $(OR') : y = \frac{3}{2}x$.

3. Soit I l'intersection de la droite (B_N) avec la droite (OR'). Comme (B_N) a pour équation cartésienne « $y = 2$ », on a $I(x_I; 2)$. x_I se détermine avec l'équation cartésienne de (OR') :

$$2 = \frac{3}{2}x_I \Leftrightarrow x_I = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi $I(4/3; 2)$.

4. On calcule le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IR}$. Les coordonnées de ces deux vecteurs sont :

$$\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix} x_O - x_I \\ y_O - y_I \end{pmatrix} \ \overrightarrow{IO}\begin{pmatrix} -4/3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IR}\begin{pmatrix} x_R - x_I \\ y_R - y_I \end{pmatrix} \ \overrightarrow{IR}\begin{pmatrix} 2 - 4/3 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{IR}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut ainsi calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR}$ grâce à la propriété 2.3 :

$$\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR} = -\frac{4}{3} \times \frac{2}{3} + -2 \times -1 = -\frac{8}{9} + 2 = \frac{10}{9}.$$

5. On peut maintenant calculer l'angle de tir $\widehat{OIR}$ grâce à la formule de la propriété 2.9.

$$\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR} = \left\|\overrightarrow{IO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{IR}\right\| \times \cos(\widehat{OIR}) \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 2^2} \times \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (-1)^2} \times \cos(\widehat{OIR})$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cos(\widehat{OIR}) = \frac{10/9}{\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{36}{9}} \times \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{9}{9}}} \\
&\Leftrightarrow \cos(\widehat{OIR}) = \frac{10}{9} \times \frac{1}{\frac{1}{9} \times \sqrt{52} \times \sqrt{13}} \\
&\Leftrightarrow \cos(\widehat{OIR}) = \frac{10}{9} \times 9 \times \frac{1}{2\sqrt{13} \times \sqrt{13}} \\
&\Leftrightarrow \cos(\widehat{OIR}) = \frac{10}{2} \times \frac{1}{13} \\
&\Leftrightarrow \cos(\widehat{OIR}) = \frac{5}{13}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\widehat{OIR} = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67{,}38^\circ$$

Conclusion : il faut tirer la boule orange avec un angle de tir de $67{,}38^\circ$ (au centième de degré près) pour la faire rebondir sur le bord Nord au point de coordonnées $I(4/3; 2)$.

2.4 Bord Sud

Pour les autres cas, nous ne détaillerons pas les calculs. On donne les caractéristiques les plus importantes.

- R' symétrique de R par rapport à la droite (B_S) d'équation cartésienne « $y = -2$ » a pour coordonnées $(2; -5)$.
- I intersection avec (OR') et (B_S) a pour coordonnées $(\frac{4}{5}; -2)$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IR}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IR}\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 3 \end{pmatrix}$$

- L'angle $\widehat{OIR}$ a pour mesure $43{,}6^\circ$ (au centième de degré près)

2.5 Bord Ouest

- R' symétrique de R par rapport à la droite (B_O) d'équation cartésienne « $x = -4$ » a pour coordonnées $(-10; 1)$.
- I intersection avec (OR') et (B_S) a pour coordonnées $(-4; \frac{4}{10})$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IR}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{4}{10} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IR}\begin{pmatrix} 6 \\ \frac{6}{10} \end{pmatrix}$$

- L'angle $\widehat{OIR}$ a pour mesure $11{,}42^\circ$ (au centième de degré près)

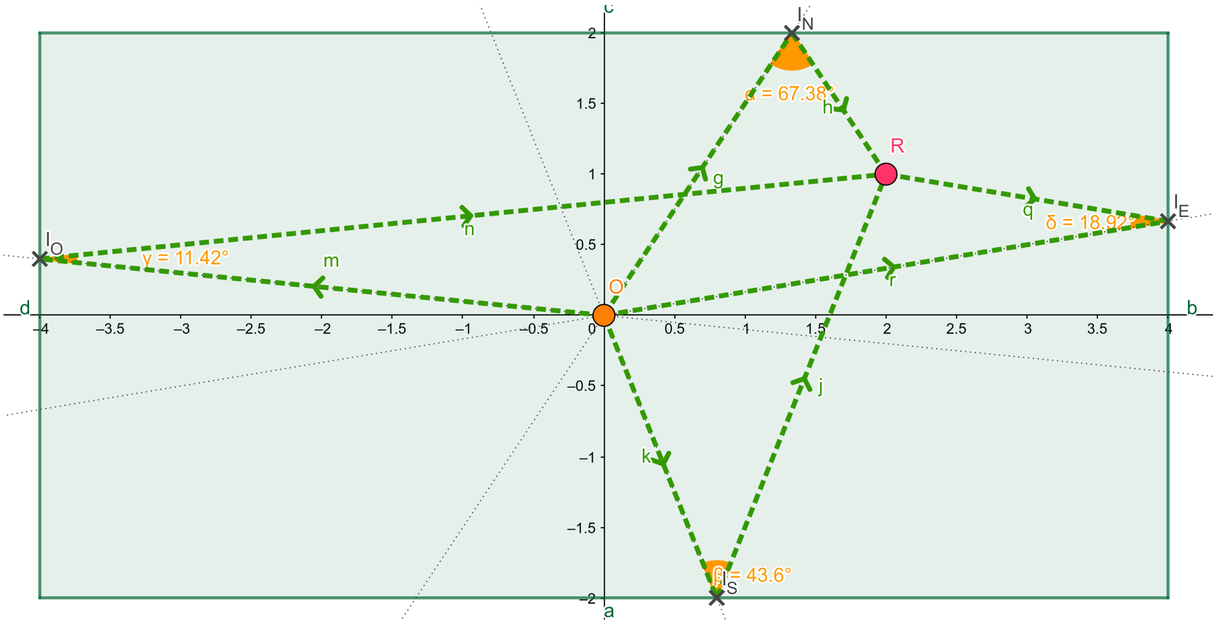
2.6 Bord Est

- R' symétrique de R par rapport à la droite (B_E) d'équation cartésienne « $x = 4$ » a pour coordonnées $(6; 1)$.
- I intersection avec (OR') et (B_S) a pour coordonnées $(4; \frac{2}{3})$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IR}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IR}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

— L'angle $\widehat{OIR}$ a pour mesure 18,92° (au centième de degré près)

2.7 Illustration sur GeoGebra



3 Cas général, bord Nord

On traite ici le cas où la boule orange doit toucher le bord Nord du billard avant d'impacter la boule rouge. La résolution des autres cas est assez semblable, on en parlera lors de la construction de l'algorithme de résolution.

Soit $(\alpha;\beta)$ les coordonnées de R tels que $-4<\alpha<4$ et $-2<\beta<2$. Le point R est mobile sur le billard contrairement à la position du point O qui restera toujours à l'origine du repère orthonormé.

3.1 Coordonnées de R' et équation cartésienne de (OR)

Dans la construction de la résolution du problème, on avait considérer un point R' symétrique du point R par rapport à la droite (B_N) d'équation « $y=2$ ».

Soit J intersection des droites (RR') et (B_N). Comme R et R' sont symétrique par rapport à l'axe (B_N), on a la propriété suivante, $RJ=JR'$. De plus, comme $J\in(B_N)$, l'ordonnée de J est 2 puis comme la droite (B_N) est horizontale et que la droite (RR') est perpendiculaire à (B_N), la droite (RR') est verticale ; l'abscisse de J est donc l'abscisse de R, c'est-à-dire α. On a donc : $J(\alpha;2)$. On peut donc calculer les coordonnées de R' en utilisant les propriétés de la symétrie axiale :

$$RJ=JR' \Leftrightarrow RJ^2=R'J^2 \Leftrightarrow (x_J-x_R)^2+(y_J-y_R)^2=(x_J-x_{R'})^2+(y_J-y_{R'})^2$$

Avant de développer le calcul, il faut remarquer que la droite (RR') est une droite verticale donc l'abscisse du point R' est égale à l'abscisse du point R c'est-à-dire α. On a donc :

$$\begin{aligned} RJ^2=R'J^2 &\Leftrightarrow (\alpha-\alpha)^2+(2-\beta)^2=(\alpha-\alpha)^2+(2-y_{R'})^2 \\ &\Leftrightarrow (2-\beta)^2=(2-y_{R'})^2 \\ &\Leftrightarrow 4-4\beta+\beta^2=4-4y'_R+y_{R'}^2 \\ &\Leftrightarrow y_{R'}^2-4y_{R'}+\beta(4-\beta)=0 \end{aligned}$$

On résout l'équation du second degré avec la méthode du discriminant :

$$\Delta=(-4)^2-4\beta(4-\beta)=16-4\beta(4-\beta)=4\times(4-\beta(4-\beta)).$$

β étant compris strictement entre -2 et 2, $\beta(4-\beta) < 4$, le discriminant est toujours positif. On a donc deux solutions :

$$y_1 = \frac{4 - \sqrt{4 \times (4 - \beta(4-\beta))}}{2} = 2 - \sqrt{4 - (\beta(4-\beta))}$$

$$\text{et} \quad y_2 = \frac{4 + \sqrt{4 \times (4 - \beta(4-\beta))}}{2} = 2 + \sqrt{4 - \beta(4-\beta)).}$$

Développons l'expression de y_1 :

$$y_1 = 2 - \sqrt{4 - 4\beta + \beta^2} = 2 - \sqrt{(2-\beta)^2} = 2 - 2 + \beta = \beta.$$

Ainsi y_1 correspond à l'ordonnée de R. Ainsi $y_2 = y_{R'}$. Développons l'expression pour y_2 :

$$y_2 = 2 + \sqrt{4 - 4\beta + \beta^2} = 2 + \sqrt{(2-\beta)^2} = 2 + 2 - \beta = 4 - \beta.$$

Conclusion : $R'(\alpha; 4-\beta)$. On peut ainsi donner l'équation cartésienne de (OR') :

$$y = \frac{4-\beta}{\alpha} x \quad (\alpha \neq 0)$$

Si $\alpha = 0$ alors la droite a pour équation cartésienne $x = 0$.

3.2 Coordonnées du point I

I étant l'intersection de la droite (B_N) d'équation cartésienne « $y = 2$ et la droite (OR') d'équation cartésienne « $y = \frac{4-\beta}{\alpha} x$ », on a alors :

$$\begin{cases} 2 = \frac{4-\beta}{\alpha} x_I \\ y_I = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{2\alpha}{4-\beta} \\ y_I = 2 \end{cases}$$

Conclusion : I a pour coordonnées $\left(\frac{2\alpha}{4-\beta}; 2\right)$.

Remarque 3.1. On a abordé le cas $\alpha \neq 0$. Si $\alpha = 0$ alors I a pour coordonnées $(0; 2)$ (à condition que $\beta < 0$).

Remarque 3.2. Il faut aussi remarquer que $4 - \beta \neq 0$. C'est le cas car β est strictement compris entre -2 et 2.

3.3 Outils vectoriels

On a alors :

$$O(0;0) \ ; \ I\left(\frac{2\alpha}{4-\beta}; 2\right) \ ; \ R(\alpha; \beta)$$

On peut donc calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IR}$:

$$\overrightarrow{IO} \begin{pmatrix} -\frac{2\alpha}{4-\beta} \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IR} \begin{pmatrix} \alpha - \frac{2\alpha}{4-\beta} \\ \beta - 2 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{IR} \begin{pmatrix} \frac{\alpha(4-\beta)-2\alpha}{4-\beta} \\ \beta - 2 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{IR} \begin{pmatrix} \frac{\alpha(2-\beta)}{4-\beta} \\ \beta - 2 \end{pmatrix}$$

On peut calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IR}$:

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{IO}\right\| &= \sqrt{\left(-\frac{2\alpha}{4-\beta}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{4\alpha^2}{(4-\beta)^2} + 4} \\ &= \frac{1}{4-\beta}\sqrt{4\alpha^2 + 4(4-\beta)^2} = \frac{2}{4-\beta}\sqrt{\alpha^2 + (4-\beta)^2}. \\ \left\|\overrightarrow{IR}\right\| &= \sqrt{\left(\frac{\alpha(2-\beta)}{4-\beta}\right)^2 + (\beta-2)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2(2-\beta)^2 + (2-\beta)^2(4-\beta)^2}{(4-\beta)^2}} = \frac{2-\beta}{4-\beta}\sqrt{\alpha^2 + (4-\beta)^2} \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IR}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR} &= \frac{-2\alpha}{4-\beta} \times \frac{\alpha(2-\beta)}{4-\beta} + -2(\beta-2) = \frac{-2\alpha^2(2-\beta)}{(4-\beta)^2} + \frac{-2(\beta-2)(4-\beta)^2}{(4-\beta)^2} \\
&= \frac{-2(\alpha^2(2-\beta) + (\beta-2)(4-\beta)^2)}{(4-\beta)^2} = \frac{-2(\beta-2)((4-\beta)^2 - \alpha^2}{(4-\beta)^2} \\
&= \frac{-2(\beta-2)(4-\beta-\alpha)(4-\beta+\alpha)}{(4-\beta)^2}
\end{aligned}$$

3.4 Positions interdites

On avait indiqué, dans la remarque 1.2, qu'il existait des positions où la boule orange ainsi frappée touchera irrédiablement la boule rouge avant d'impacter le bord Nord. Ce sera le cas où l'angle de tir est nul.

Si tel est le cas, on aurait la formule suivante :

$$\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR} = \left\|\overrightarrow{IO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{IR}\right\| \times \cos(0)$$

Or $\cos(0) = 1$ d'où :

$$\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR} = \left\|\overrightarrow{IO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{IR}\right\|.$$

Ainsi si on remplace par les formules en fonction de α et β :

$$\begin{aligned}
\frac{-2(\beta-2)(4-\beta-\alpha)(4-\beta+\alpha)}{(4-\beta)^2} &= \frac{2}{4-\beta}\sqrt{\alpha^2 + (4-\beta)^2} \times \frac{2-\beta}{4-\beta}\sqrt{\alpha^2 + (4-\beta)^2} \\
\Leftrightarrow \frac{-2(\beta-2)(4-\beta-\alpha)(4-\beta+\alpha)}{(4-\beta)^2} &= \frac{2(2-\beta)(\alpha^2 + (4-\beta)^2)}{(4-\beta)^2}
\end{aligned}$$

Or $-2(\beta-2) = 2(2-\beta)$ donc :

$$\Leftrightarrow (4-\beta)^2 - \alpha^2 = (4-\beta)^2 + \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

3.5 Angle de tir

On calcule l'angle de tir $\widehat{OIR}$ dans le cas où $\alpha \neq 0$. On utilise la formule suivante :

$$\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR} = \|IO\| \times \|IR\| \times \cos(\widehat{OIR}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{OIR}) = \frac{\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR}}{\left\|\overrightarrow{IO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{IR}\right\|}$$

ou encore :

$$\widehat{OIR} = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR}}{\left\|\overrightarrow{IO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{IR}\right\|}\right).$$

On calcule $\dfrac{\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR}}{\|IO\| \times \|IR\|}$

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IR}}{\|IO\| \times \|IR\|} &= \frac{\dfrac{-2(\beta-2)(4-\beta-\alpha)(4-\beta+\alpha)}{(4-\beta)^2}}{\dfrac{2(2-\beta)(\alpha^2 + (4-\beta)^2)}{(4-\beta)^2}} \\
&= \frac{2(2-\beta)((4-\beta)^2 - \alpha^2)}{(4-\beta)^2} \times \frac{(4-\beta)^2}{2(2-\beta)(\alpha^2 + (4-\beta)^2)} \\
&= \frac{(4-\beta)^2 - \alpha^2}{(4-\beta)^2 + \alpha^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\widehat{OIR} = \arccos\left(\frac{(4-\beta)^2 - \alpha^2}{(4-\beta)^2 + \alpha^2}\right)$$

4 Algorithme de résolution

On donne un algorithme de résolution pour le problème. Dans l'algorithme, on notera $a = \alpha$ et $b = \beta$.

```
from math import *
a=float(input("alpha="))
b=float(input("beta="))
# BORD NORD
print("Bord Nord")
print("I(",2*a/(4-b),";",2,")")
print("Angle de tir :",degrees(acos(((4-b)**2-a**2)/((4-b)**2+a**2))))
# BORD SUD
print("Bord Sud")
print("I(",2*a/(4+b),";",-2,")")
print("Angle de tir :",degrees(acos(((4+b)**2-a**2)/((4+b)**2+a**2))))
# BORD OUEST
print("Bord Ouest")
print("I(",-4,";",-4*b/(-8-a),")")
print("Angle de tir :",degrees(acos(((8+a)**2-b**2)/((8+a)**2+b**2))))
# BORD EST
print("Bord Est")
print("I(",4,";"4*b/(8-a),")")
print("Angle de tir :",degrees(acos(((8-a)**2-a**2)/((8-a)**2+b**2))))
```

Si on teste ce programme pour $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, on retrouve nos valeurs calculées précédemment. La calculatrice NumWorks nous propose ceci :

```
>>> from billard import *
alpha=2
beta=1
Bord Nord
I( 1.333333333333333 ; 2 )
Angle de tir : 67.38013505195958
Bprd Sud
I( 0.8 ; -2 )
Angle de tir : 43.60281897270363
Bprd Ouest
I( -4 ; 0.4 )
Angle de tir : 11.42118627499929
Bord Est
I( 4 ; 0.6666666666666666 )
Angle de tir : 18.92464441605124
```