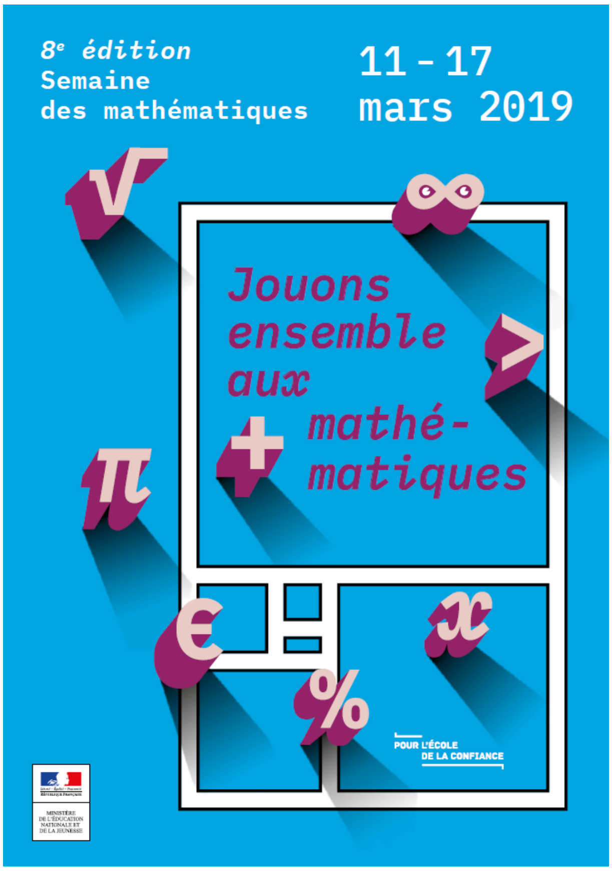
SEMAINE DES MATHÉMATIQUES 2019

Jouons ensemble aux mathématiques

6 - Énigmes de la Voix du Nord

Clément Boulonne

2 mai 2019



Résumé

Petit bonus pour vous ! Comme tous les ans, lors de la Semaine des Mathématiques, le journal régional des Hauts-de-France, « La Voix du Nord » publie, chaque jour de cette fameuse semaine, une énigme de mathématiques (ou de logique). Ma grand-mère n'a pas raté l'événement et m'a découpé les énigmes pour que je puisse les résoudre.

Je l'en remercie ! Voici donc les énoncés et solutions (solutions rédigées par mes soins bien entendu) des énigmes (en page suivante).

1 La formule « gourmande »

1.1 Énoncé

Au restaurant, la formule « gourmande » propose un choix parmi 3 entrées, 2 plats et 4 desserts. Combien de menus différents « entrée-plat-dessert » puis-je composer ?

1.2 Solutions

On peut numéroter les entrées, plats et desserts. Soit donc E_1, E_2 et E_3 les trois choix d'entrées possibles, P_1 et P_2 les deux choix de plats possibles et D_1, D_2, D_3 et D_4 les quatre choix de desserts possibles.

La composition d'un menu est la composition d'un triplet ordonnée, entrée-plat-dessert, c'est-à-dire le triple $(E_i; P_j; D_k)$ avec $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$ et $1 \leq k \leq 4$.

Par analogie, on peut faire correspondre ces triplets par les triplets $(i; j; k)$ avec $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$ et $1 \leq k \leq 4$. Cela revient donc à calculer le nombre d'éléments dans l'ensemble $\mathbb{N}_3^* \times \mathbb{N}_2^* \times \mathbb{N}_4^*$ où $\mathbb{N}_n^* = \{1,2,\dots,n\}$ et $A \times B \times C$ est le produit cartésien de trois ensembles A, B et C.

Dans cet ensemble, il y a $3 \times 2 \times 4 = 6 \times 4 = 24$ éléments donc il y a 24 combinaisons possibles « entrée-plat-dessert ».

Remarque 1.1. On peut modéliser le problème par un arbre de possibilités avec 24 branches en prenant les notations E_1, E_2, P_1, P_2, P_3, D_1, …

2 La taille de la fratrie

2.1 Énoncé

Léo a autant de frères que de sœurs. Léa a deux fois plus de frères que de sœurs.

Sachant que Léo et Léa sont eux-mêmes frère et sœurs, combien y a-t-il d'enfants dans la famille ?

2.2 Solutions

Soit f le nombre de filles dans la fratrie et g le nombre de garçons. Du point de vue Léo, il a autant de frères que de sœurs donc si on le retire du groupe de ses frères, le nombre de garçons -1 est égal au nombre de filles. Donc $g-1=f$.

Du point de vue de Léa, elle a deux fois plus de frères que de sœurs. Donc si on retire Léa du groupe des filles, il y a deux fois plus de garçons que de filles. Ainsi $g=2(f-1)$.

On doit ainsi résoudre le système d'équations suivant d'inconnues f et g :

$$\begin{cases} g-1=f \\ g=2(f-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(f-1)-1=f \\ g=2(f-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f-3=f \\ g=2(f-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=3 \\ g=2(3-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=3 \\ g=4 \end{cases}$$

Il y a donc 3 filles et 4 garçons dans la fratrie.

3 Les litres d'eau

3.1 Énoncé

Un seau contient 3 litres plus la moitié de sa contenance totale. En portant un seau rempli dans chaque main, combien de litres d'eau puis-je transporter ?

3.2 Solutions

Soit L la contenance du seau. Le seau contient 3 litres plus la moitié de sa contenance totale. Donc l'équation à résoudre pour trouver la contenance totale est :

$$L = 3 + \frac{1}{2}L \Leftrightarrow L - \frac{1}{2}L = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}L = 3 \Leftrightarrow L = 3 \times 2 = 6.$$

Un seau a une contenance de 6 litres. Comme on en porte un seau rempli dans chaque main, on porte $6 \times 2 = 12$ litres d'eau.

4 Les rangées de chocolat

4.1 Énoncé

Sur un plateau sont disposées 5 rangées complètes de chocolats. François mange 1 chocolat. Pour que son acte passe inaperçu, il décide de disposer les chocolats restants en rangées complètes. Il constate qu'il peut former 3, 4, 6 ou 7 rangées complètes.

Initialement, combien y avait-il de chocolats par rangée sur le plateau ?

4.2 Solutions

On cherche le dénominateur commun de 3, 4, 6 ou 7.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 3 & & & \\ 4 & 2 & 2 & & \\ 6 & 3 & 2 & & \\ 7 & 7 & & & \\ \hline DC & 3 & 2 & 2 & 7 \end{array}$$

Le dénominateur commun est $3 \times 2 \times 2 \times 7 = 6 \times 14 = 84$. Si on rajoute 1 à ce nombre, on trouve 85 qui est bien divisible par 5.

Conclusion : il y avait 85 chocolats initialement sur le plateau et donc il y avait $85 \div 5 = 17$ chocolats par rangée.

5 Monter l'escalier

5.1 Énoncé

Pour accéder au premier étage de la maison, j'emprunte un escalier de 16 marches. Sachant qu'à chaque pas, je ne peux monter qu'une ou deux marches, de combien de façons différentes puis-je atteindre le premier étage ?

5.2 Solutions

Voici l'énigme la plus difficile de cette série (normal, c'est la dernière !). Il nous faut en fait trouver une modélisation mathématiques adéquat pour dénombrer toutes les possibilités.

Il y a 16 marches et on les monte une par une ou deux par deux (par intermittence). Imaginons que l'on monte les marches une par une. On a donc 16 étapes de 1 marche. On peut modéliser cela par la somme de 16 « 1 ».

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 16 \times 1 = 16.$$

Maintenant, montons les marches deux par deux. Il faut se souvenir qu'il y a 16 marches donc la somme de chaque montée doit être égale à 16. Ainsi, on a une seule possibilité que l'on peut modéliser par :

$$2+2+2+2+2+2+2+2 = 8 \times 2 = 16.$$

On peut remarquer que dans les deux cas, on a :

Cas 1 $16 \times 1 + \mathbf{0} \times 2 = 16$

Cas 2 $0 \times 1 + \mathbf{8} \times 2 = 16$

Mais on peut aussi avoir des cas intermédiaires : des cas où on monte une fois les marches 2 par 2, deux fois, trois fois etc. Il faudrait trouver le nombre de fois que l'on peut monter les marches une à une.

Nb 1	Nb 2	Emp.	Poss.
16×1	$+0 \times 2$	16	
14×1	$+1 \times 2$	15	
12×1	$+2 \times 2$	14	
10×1	$+3 \times 2$	13	
8×1	$+4 \times 2$	12	
6×1	$+5 \times 2$	11	
4×1	$+6 \times 2$	10	
2×1	$+7 \times 2$	9	
0×1	$+8 \times 2$	8	

Dans la colonne de droite, on a indiqué le nombre d'emplacements pour les 1 et les 2 dans la somme, c'est-à-dire si $a \times 1 + b \times 2$, le nombre d'emplacements est $a+b$.

Ensuite pour dénombrer toutes les possibilités, on utilise les combinaisons de p éléments dans un ensemble de n éléments (c'est-à-dire le nombre de façons de placer p éléments dont l'ordre importe dans n emplacements) :

$$\binom{n}{p} = \frac{p!}{n!(n-p)!} \text{ avec } n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Ainsi, par exemple, dans la troisième ligne du tableau, le nombre de possibilités de placer 2 2 sur 14 emplacements est représenté par le nombre $\binom{14}{2}$. D'où :

Nb 1	Nb 2	Emp.	Poss.
16×1	$+0 \times 2$	16	$\binom{16}{0} = 1$
14×1	$+1 \times 2$	15	$\binom{15}{1} = 15$
12×1	$+2 \times 2$	14	$\binom{14}{2} = 91$
10×1	$+3 \times 2$	13	$\binom{13}{3} = 286$
8×1	$+4 \times 2$	12	$\binom{12}{4} = 495$
6×1	$+5 \times 2$	11	$\binom{11}{5} = 462$
4×1	$+6 \times 2$	10	$\binom{10}{6} = 210$
2×1	$+7 \times 2$	9	$\binom{9}{7} = 36$
0×1	$+8 \times 2$	8	$\binom{8}{8} = 1$

Pour avoir le nombre de possibilités de monter au premier étage, on fait la somme de toutes les possibilités présentes dans le tableau :

$$1 + 15 + 91 + 286 + 495 + 462 + 210 + 36 + 1 = 1597.$$

Il y a donc 1597 possibilités de monter l'escalier.